Aceptando la existencia de un terreno inexistente en un problema matemático: el uso prevalente de argumentos pragmáticos por docentes de primaria

José Antonio Juárez López, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

Lidia Aurora Hernández Rebollar, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

Josip Slisko Ignjatov, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

Recibido el 9 del 11 de 2013; aceptado el 22 de septiembre de 2014

Aceptando la existencia de un terreno inexistente en un problema matemático: el uso prevalente de argumentos pragmáticos por docentes de primaria

Resumen

El presente estudio aborda los diferentes tipos de argumentaciones dados por 69 profesores de primaria para justificar la existencia (o inexistencia) de un terreno cuyo dibujo se encontraba en un problema propuesto en el libro de matemáticas de quinto grado de primaria en México. La tarea de los maestros no era resolver el problema sino argumentar acerca de la existencia real del terreno cuyas características numéricas son imposibles. La gran mayoría de los docentes aceptaron la posible existencia de dicho terreno, proporcionando diferentes tipos de argumentos. En este artículo se reportan los resultados de la categorización de estos argumentos. Todos los argumentos son de naturaleza pragmática, es decir, los docentes no formularon ningún argumento con sustento matemático. Aunque no debían resolver el problema diseñado para los alumnos, 44 profesores lo resolvieron. La característica más notable de sus respuestas es la ausencia de argumentos sobre las condiciones en que dichas respuestas son aceptables.

Palabras clave: Argumentación; profesores; existencia; terreno; realidad.

Aceitando a "existência" de um campo inexistente em un problema matemático: o uso predominante dos argumentos de professores primários

Resumo

O presente estudo aborda os diferentes tipos de argumentações dados por 69 professores do nível fundamental de educação (primária) para justificar a existência (ou inexistência) de um prédio cujo desenho foi proposto em um livro de matemática do quinto grau de primária no México. A tarefa dos professores não era dar solução ao problema, mas discutir sobre a existência real do prédio cujas características numéricas são impossíveis. A grande maioria dos professores aceitou a possível existência do prédio, oferecendo diferentes tipos de argumentos. Neste artigo são reportados os resultados da categorização destes argumentos. Todos os argumentos são de natureza pragmática, ou seja, os professores não formularam nenhum argumento com sustento matemático. Embora não deviam resolver o problema desenhado para os alunos, 44 professores resolveram. A característica mais

Para citar: Juárez, J. A., Hernández, L. A., & Slisko, J. (2014). Aceptando la existencia de un terreno inexistente en un problema matemático: el uso prevalente de argumentos pragmáticos por docentes de primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 6*, 45 - 61.

notável das respostas é a ausência de argumentos sobre as condições em que essas respostas são aceitáveis.

Palavras chave: Argumentação; profesores; existencia; terreno; realidade.

Accepting the existence of a non-existent field in a mathematical problem: the prevalent use of pragmatic arguments in primary teachers

Abstract

The present study addresses the different types of arguments given by a group of primary teachers to justify the existence (or absence) of land which was drawing in a proposed activity on the math book fifth grade in Mexico. It was applied to 69 teachers a task to be arguing about the real existence of a land whose numerical characteristics are impossible in the real terrain. In other words, teachers had to answer whether such land may or may not exist in reality, and also argue the answer. The vast majority of teachers accepted the possible existence of such land by providing different types of arguments. In this article we report the results of the categorization of these arguments. All arguments are pragmatic in nature, i.e., teachers did not make any arguments with mathematical support. Although they were not supposed to solve the problem designed for students, 44 teachers did so. The most notable feature of their answers is an absence of the arguments regarding the circumstances in which these answers would be acceptable.

Key words. Argumentation, teachers, existence, field, reality.

Accepter l'existence d'un champ inexistant dans un problème mathématique: l'utilisation répandue des arguments pragmatiques pour les enseignants du primaire

Résumé

L'étude présente aborde différents types d'argumentations donnés par 69 professeurs de primaire pour justifier l'existence (ou une inexistence) d'un terrain dont le dessin se trouvait dans un problème proposé dans le livre de mathématiques du cinquième degré de primaire au Mexique. La tâche des maîtres n'était pas de résoudre le problème mais d'argumenter à propos de l'existence réelle du terrain dont les caractéristiques numériques sont impossibles. La grande majorité des enseignants ont accepté l'existence possible du dit terrain, en fournissant différents types d'arguments. Dans cet article se calment les résultats de la catégorisation de ces arguments. Tous les arguments sont d'une nature pragmatique c'est-à-dire les enseignants n'ont pas formulé d'argument avec un soutien mathématique. Bien qu'ils ne dussent pas résoudre le problème dessiné pour les élèves, 44 professeurs ils l'ont résolu. La caractéristique la plus remarquable de ses réponses est l'absence d'arguments sur les conditions dans lesquelles les dites réponses sont acceptables.

Paroles clés. Argumentation, enseignants, existence, raison, réalité.

1. Introducción

En el Plan de Estudios de Educación Básica de México del 2011 se plantea que “A lo largo de la Educación Básica se busca que los alumnos sean responsables de construir nuevos conocimientos a partir de sus saberes previos, lo que implica… buscar argumentos para validar procedimientos y resultados…” (Secretaría de Educación Pública, 2011, p. 50). La habilidad argumentativa de los estudiantes no se ha incorporado en el currículo del nivel básico de manera explícita. Sin embargo, se espera que sea adquirida a través de ciertas actividades en las que se solicita que los alumnos validen sus procedimientos o resultados. Es natural suponer que esta habilidad debería estar presente también en los docentes.

Investigaciones sobre el conocimiento, habilidades y la sabiduría obtenida con la experiencia de los maestros, en general, no son muy comunes en México. En un estudio reciente (Cordero, Luna & Patiño, 2011) se señala la importancia de "realizar investigación educativa sobre la sabiduría práctica de los profesores para desarrollar un corpus teórico, metódico y sistemático sobre la enseñanza efectiva". Las autoras Alatorre y Sáiz (2010) han llevado a cabo investigaciones sobre el conocimiento del contenido matemático de los profesores en México, especialmente del conocimiento y uso de propiedades de los triángulos. Ellas retoman las opiniones de Shulman (1986), Llinares y Krainer (2006) y da Ponte y Chapman (2006) (citados en Alatorre y Sáiz, 2010) para concluir que es importante diagnosticar y resolver las dificultades de los profesores acerca del contenido matemático del nivel que ellos enseñan.

De las pocas investigaciones que se enfocan más específicamente en los argumentos de los docentes, encontramos el estudio de Alatorre, Flores y Mendiola (2012), en el que la importancia del estudio de la argumentación y sus posibles implicaciones para la enseñanza radica en que sirve de base para convencer a otros. En la docencia, buena parte del discurso del profesor se realiza mediante argumentos. Knipping (2004) enfatiza que es importante analizar el discurso y las argumentaciones para un mejor conocimiento de ciertos tipos de pruebas y sus implicaciones en la enseñanza. También Rodríguez (2004) señala dicha importancia como "…un elemento de la competencia comunicativa, que se adquiere o en forma natural, o en contacto con discursos argumentativos o gracias a un método…" (p. 3). Por su parte, De Olaizola y Santos (2004) destacan la importancia de redefinir la cultura matemática en el aula cuando los estudiantes argumentan la inexistencia de soluciones en la resolución de problemas.

En el libro de texto de matemáticas de quinto grado (Secretaría de Educación Pública, 2010) se encontró una figura geométrica, un polígono irregular, la cual representaba a un terreno cuyas medidas de los lados violan la desigualdad triangular. Por este error, el terreno en cuestión no es posible que exista en la realidad. Al presentar este terreno a diferentes personas, se descubrió que eran muy pocas las que detectaban la imposibilidad de su existencia.

Por lo anterior se plantearon las preguntas que inspiraron esta investigación:

- ¿Qué pasaría con los docentes de primaria que tienen que trabajar con esta figura, detectarían o no el error?
- En el caso de que lo detecten, ¿cómo explicarían a sus estudiantes que dicha figura, la cual aparece en su libro de texto, es imposible que exista en la realidad?
- ¿Qué argumentos específicos proporcionarían a sus alumnos?

Resumiendo lo anterior, el objetivo del presente estudio fue, en primer lugar, conocer si docentes de primaria en servicio serían capaces de detectar la imposibilidad de la existencia del polígono irregular mencionado y, en segundo lugar, conocer los diferentes tipos de argumentos que utilizarían para justificar la existencia o inexistencia de la figura.

En la sección que sigue, se presentan los antecedentes relacionados con este trabajo. Se trata de investigaciones en las que los autores han analizado argumentos, tanto de docentes como de alumnos.

En la sección 3 se señala la metodología utilizada en este estudio, la cual es de tipo interpretativo exploratorio, se describen la muestra, el instrumento de investigación y el proceso mediante el cual se realizó el análisis de las respuestas al instrumento.

En la sección 4 se presentan los resultados y, dentro de éstos, una categorización de los argumentos que expusieron los docentes. En la revisión, que se hace de estos argumentos, se detecta, por un lado, un análisis superficial de la figura, pues los docentes se centran solo en la forma y dejan de lado los datos numéricos. Por otro lado, observamos una inclinación de los maestros hacia el uso de argumentos pragmáticos, su tendencia a usar la experiencia personal como una garantía y, por tanto, la ausencia de elementos matemáticos en su argumentación. También, aunque no se les solicitó a los docentes, se presenta un análisis de las respuestas que dieron al problema en el cual está involucrada la figura inexistente.

En su estudio, Monzón (2011) concluye, entre otras cosas, que el número de investigaciones realizadas en México en torno al tema de la argumentación es escasa y la mayoría de ellas se enfocan en el nivel básico y medio. De lo anterior, creemos que este estudio encuentra su justificación, ya que no se han reportado estudios que muestren la importancia del proceso argumentativo en los docentes de matemáticas y sus posibles implicaciones en la enseñanza de esta asignatura escolar.

Además de contribuir al conocimiento sobre los tipos de argumentos que proporcionan los docentes de primaria, consideramos que este trabajo aporta información importante referente a los conocimientos y habilidades que ellos poseen, acerca de elementos erróneos en los libros de texto, la coherencia necesaria entre la forma y la medida, y la desigualdad del triángulo.

2. La argumentación en Educación Matemática

En este estudio de investigación se considera que un argumento es un enunciado que utilizan las personas para validar algo y convencer a otros. Un argumento está constituido por datos, justificaciones o garantías y una conclusión. Dependiendo del campo de la argumentación, existen diferentes tipos de garantías y éstas le dan diferentes grados de fuerza a la conclusión. De acuerdo con Toulmin (1958), además de los datos, un argumento puede contener respaldos o apoyos para las garantías o justificaciones. La diferencia entre éstos es que los datos y los apoyos se dan explícitamente mientras que las justificaciones pueden estar implícitas. Un ejemplo, similar al que propone S. E. Toulmin, es el siguiente: Pedro nació en Puerto Rico, Puerto Rico pertenece a Los Estados Unidos, entonces Pedro es estadounidense. En este ejemplo, "Pedro nació en Puerto Rico" es un dato, "Puerto Rico pertenece a los Estados Unidos" es un apoyo y "Pedro es Estadounidense" es la conclusión. La justificación o garantía, implícita en este argumento, es "una persona que nace en Puerto Rico es estadounidense".

Balacheff (2000), por otro lado, clasifica los tipos de pruebas o demostraciones en pragmáticas e intelectuales. En las primeras, los enunciados se validan con acciones concretas o mentales, e incluyen dos niveles, empirismo ingenuo y experimentos cruciales. Las pruebas intelectuales basan sus argumentos en conceptos y en el lenguaje e incluyen ejemplos genéricos y experimentos mentales. Las pruebas intelectuales no son necesariamente formales pero se separan de acciones concretas.

León y Calderón (2001) estudian los argumentos que exponen estudiantes de nivel superior, pero centran su trabajo en la elaboración de una clasificación de los recursos matemáticos que emplearon estos estudiantes. En la manifestación de recursos argumentativos de tipo matemático observaron que, cuando los estudiantes trabajaban de manera individual, usaban argumentos empíricos y de influencia externa. Al trabajar en parejas, usaron argumentos con mayor elaboración matemática y de tipo discursivo. Finalmente, al presentar su prueba al grupo, sintieron la necesidad de usar argumentos de tipo explicativo. Estas autoras concluyen que, en la elaboración de argumentos predominó más la representación matemática que la discursiva y el criterio de que "mostrar" el proceso realizado se considera suficiente para convencer.

En una investigación realizada con profesores en formación, Tapan y Arslan (2009) mencionan que dichos profesores tendieron a usar argumentaciones pragmáticas basadas en elementos visuales puros. Lo anterior ocurrió cuando se les pidió trazar un triángulo equilátero y argumentar la validez del método usado para la construcción de tal figura. En su investigación concluyen que los profesores en formación usaron excesivamente los elementos visuales, tanto para la construcción como para sus justificaciones y que el empirismo ingenuo es el tipo de argumentación que predominó.

Knipping (2004) expone en su estudio los diferentes tipos de argumentaciones que pudieron ser reconstruidos en las diversas demostraciones y justificaciones del Teorema de Pitágoras que observó en aula. Para ella, los argumentos pragmáticos son aquellos que están basados en acciones, pudiendo ser de tipo constructivo o métrico; mientras que los argumentos semánticos pueden ser de varias clases: visual-intuitivo, computacional, metafórico y analógico.

En la investigación de Alatorre et al. (2012) se reportan las justificaciones que docentes de primaria proporcionaron cuando se les cuestionó acerca de la construcción de triángulos con medidas arbitrarias. La creencia que prevalece entre estos docentes es que siempre es posible dibujar un triángulo, por lo que, la pregunta sobre la posibilidad o no de la construcción con ciertas medidas les pareció absurda. Muchos de los docentes consideraron que el tener "tres lados" era condición necesaria y suficiente para obtener un triángulo y en sus justificaciones aludían al tipo de triángulo o a que se trataba de un triángulo con dos lados iguales. Los autores observaron un "divorcio entre los trazos y sus longitudes", pues los docentes trazaron algunos triángulos cuyas medidas no coincidían con la longitud real. Finalmente, una de las conclusiones de estos autores es que el razonamiento y la argumentación no son parte de la práctica profesional de muchos docentes de primaria.

Gran parte de la investigación realizada sobre las pruebas y demostraciones se ha enfocado en diferentes tipos de razonamiento y los argumentos que utilizan los estudiantes durante los procesos de demostración (Crespo & Farfán, 2005). Sin embargo, como señala Douek (1999b), "las argumentaciones son usualmente usadas informalmente entre los matemáticos para desarrollar, discutir o comunicar problemas matemáticos y sus resultados, pero no son reconocidas socialmente en un reporte de investigación en el que se presenten nuevos resultados…" (p. 129-130).

3. Metodología

3.1. Tipo de estudio y sujetos participantes

La investigación, cuyos resultados se reportan en este artículo, es un estudio cualitativo del tipo interpretativo exploratorio. Los sujetos que participaron en esta investigación fueron 69 docentes de educación primaria en servicio. Dichos docentes se encontraban terminando un curso de capacitación en matemáticas al momento de contestar las preguntas de la actividad.

La preparación de los docentes era, en general, la de profesor normalista en educación primaria con quince años de servicio en promedio. Dicha preparación se realiza después del bachillerato en las escuelas normales básicas. El enfoque principal de la carrera está en la preparación pedagógica y no se enfatizan los conocimientos de matemáticas y ciencias naturales. El mencionado curso de capacitación se diseñó precisamente porque, en la era de la evaluación externa del desempeño académico de los alumnos, se notaron deficiencias de los docentes en los conocimientos matemáticos.

3.2. Instrumento y procedimiento

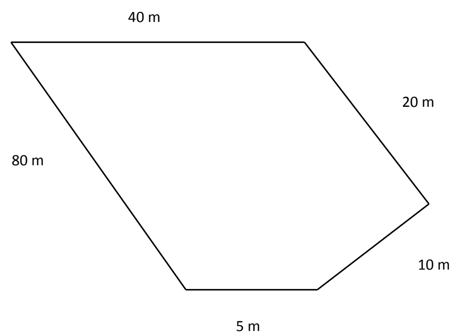
Con la finalidad de conocer cómo son los argumentos que manejan docentes de primaria acerca de la existencia en la realidad de un terreno que aparece como contexto de un problema en el libro de matemáticas de quinto año de primaria (Secretaria de Educación Pública, 2011), y de averiguar si ellos eran capaces de detectar la imposibilidad de la existencia de dicho terreno, se diseñó una hoja de trabajo en la que

(a) se les preguntaba *"¿puede existir en la realidad el terreno que se describe en el problema de arriba?"* y

(b) se les solicitaba *proporcionar detalladamente todos los argumentos que apoyaban su respuesta* (Figura 1).

En un libro de texto de matemáticas de quinto grado de primaria apareció la siguiente actividad titulada "El Terreno del Señor Javier", con la siguiente instrucción:

1. En equipo lleven a cabo la actividad
La siguiente figura muestra la forma que tiene el terreno del señor Javier. Si lo quiere cercar con malla y cada rollo contiene 20 m, ¿cuántos rollos se emplearán para cercar dicho terreno?____



Escribe aquí la operación que realizaste para determinar el número de metros que se ocuparán para cercar el terreno.

Tu tarea no es resolver el problema planteado, sino responder a la pregunta: **¿Puede existir en la realidad el terreno que se describe en el problema de arriba?**

a) Sí puede existir. b) No puede existir. c) No sé cómo decidir

Proporciona detalladamente todos los argumentos que apoyan tu respuesta

____

____

Figura 1. Hoja de trabajo aplicada a los docentes de educación primaria.

El problema, en el que está involucrado el terreno, se encuentra dentro del eje Forma, Espacio y Medida del quinto grado de primaria. En él se pide hallar el número de rollos de malla necesarios para cercar el terreno, para lo cual se tendría que calcular su perímetro, y después, realizar una división de números naturales.

Como se puede observar en la Figura 1, se dice explícitamente que la tarea de los docentes no es resolver el problema planteado, sino responder la pregunta acerca de la existencia o inexistencia del terreno y dar los argumentos que apoyan su respuesta.

Al llamar la atención sobre la posibilidad o no de la existencia de dicho terreno, se esperaba que los profesores observaran no solo la forma de la figura sino las medidas de los lados y, al hacer esto, que notaran que:

1. Las longitudes de los lados no corresponden con los números o medidas proporcionadas. El lado más largo tiene la etiqueta de 80 m, el segundo en longitud se dice que mide 40 m. Sin embargo, se aprecia en el dibujo que el segundo no cabe dos veces en el primero. El resto de los lados están marcados con 20, 10 y 5 metros, pero igual que los dos primeros el lado que “mide” 5 m no cabe dos veces en el que “mide” 10 m y así sucesivamente.
2. Este terreno tiene un lado cuya medida es mayor que la suma de los demás lados, relación que no puede ocurrir en los polígonos. El lado que tiene la etiqueta de 80 m mide más que la suma del resto de los lados, que es de 75 m, lo cual es imposible. Tal imposibilidad se demuestra aplicando la desigualdad del triángulo, sucesivamente, en los triángulos cuyo vértice común es el punto que une a los lados de 80 y 40 metros.

Por todo lo anterior, la respuesta que se esperaba es que el terreno no puede existir en la realidad, y una justificación apropiada sería cualquiera de los puntos 1 o 2 de arriba.

Al aplicar el instrumento, no se les preguntó a los docentes si habían trabajado anteriormente la actividad con sus alumnos, ya que por la antigüedad en el servicio que tiene la mayoría de ellos, (15 años o más), supusimos que tenían la experiencia requerida para manejar este tipo de situaciones.

3.3. Procedimiento de Análisis

En primer lugar, se dividieron las respuestas de los docentes en los que afirmaban que el terreno “sí puede existir”, “no puede existir” y “no sé cómo decidir”. Después, se revisaron los argumentos proporcionados en cada uno de estos grupos. Para analizar y clasificar los diferentes tipos de argumentos proporcionados por los docentes de primaria utilizamos el modelo de Toulmin (1958), la clasificación de tipos de pruebas de Balacheff (2000) y los resultados de investigadores como Douek, (1999a, b), Knipping (2004), León y Calderón (2001) y Tapan y Arslan (2009), quienes también han clasificado tipos de argumentos, tanto de profesores como de estudiantes.

Aunque la clasificación de N. Balacheff es una clasificación de pruebas o demostraciones y en esta investigación no se solicita esta actividad explícitamente a los docentes, la consideramos pertinente porque analizamos los tipos de justificaciones o garantías que ellos proporcionan. Los procedimientos de argumentación, en sentido amplio, son similares a los procesos de generar demostraciones o pruebas.

Una diferencia substancial de este trabajo con los que hemos revisado en la literatura es que en éste, los argumentos se generaron para justificar la existencia o inexistencia de un terreno supuestamente real, modelado matemáticamente como una figura geométrica imposible.

Por último, debemos mencionar que, aunque la mayoría de los argumentos proporcionados son para validar una respuesta errónea, hemos destacado la presencia o ausencia de garantías, así como la presencia o ausencia de alguna información de apoyo.

4. Resultados

Después de aplicar a los 69 profesores la actividad que contiene el problema "El terreno del señor Javier", encontramos los siguientes resultados concentrados en la Tabla 1.

Tabla 1. *Cantidad de respuestas dadas en la actividad "El terreno del señor Javier".*

	Sí puede existir	**No puede existir**	**No sé cómo decidir**	**No contestan**
Docentes de Primaria	62	3	1	3

Hay que notar, en primer lugar, la enorme diferencia en el número de respuestas entre las opciones. Prácticamente el total de los profesores afirmó que un terreno como el que se muestra en el problema sí puede existir. Sólo tres de ellos afirmaron que no puede existir, mientras que cuatro de los docentes no supieron cómo decidir.

4.1 Argumentos de los que niegan la existencia del terreno

De los tres docentes que seleccionaron la respuesta "No puede existir", solo uno proporcionó un argumento correcto, el cual corresponde con la primera opción esperada, es decir, que las longitudes de los lados no corresponden con los números o medidas proporcionadas. El docente P39 anotó:

P39 *Las medidas proporcionadas no corresponden a las longitudes de cada lado, no guardan relación entre sí.*

Sin embargo, enseguida comentó:

P39 *En cuanto a la forma puede ser posible, porque muchas veces la forma que adquiere un terreno depende de la manera como el dueño o los dueños de los terrenos adyacentes van vendiendo o lotificando.*

Este profesor detectó parte del error, una incongruencia entre las longitudes de los lados y las medidas expuestas en el terreno. Sin embargo, no consideró que con dichas medidas no era posible formar un polígono.

Los otros dos profesores que eligieron la respuesta *"No puede existir"* basaron su argumento en la forma del terreno. La justificación que dan es *"Por lo regular, todos los terrenos son cuadrados o rectangulares"*. Uno de ellos agrega *"la verdad nunca he visto uno así"*, como apoyo a su justificación. Los argumentos de dichos profesores se muestran en seguida.

P48 *Por lo regular todos los terrenos son cuadrados, rectángulos, la verdad nunca he visto uno así.*

P49 *Porque casi por lo regular la mayoría de los terrenos son rectangulares, cuadrados o romboides.*

4.2 Clasificación de los argumentos que apoyan la existencia del terreno

De acuerdo con la clasificación de Balacheff (2000), todos los argumentos proporcionados por este grupo de profesores son pragmáticos. Sin embargo, dentro de las respuestas, distinguimos algunas afirmaciones que no tienen una estructura argumentativa. Estas afirmaciones las hemos dividido en:

(1) las que se relacionan con la pregunta y
(2) las que no se relacionan con la pregunta sino con el problema.

Después, encontramos afirmaciones con estructura argumentativa que pueden considerarse argumentos. Éstos se han dividido *en los que no tienen información de apoyo* y *los que sí cuentan información de apoyo*. Los que no tienen información de apoyo se dividen por el tipo de garantía que usan y los que sí tienen alguna información de apoyo se dividen de acuerdo al tipo de información de apoyo que ofrecen.

Aparte de los que ya hemos mencionado, hay un argumento que justifica la existencia del terreno *"porque sería absurdo plantear un problema con un terreno inexistente"*, éste lo hemos puesto en la categoría de *Otros*.

Cabe resaltar que en la mayoría de los argumentos, que utilizaron los profesores de primaria para sostener que sí puede existir en la realidad un terreno con tales características, prevalece la idea de la forma del terreno. Solo un docente se apoyó en la noción de medida y ninguno en las propiedades geométricas de los polígonos.

También es interesante notar que, pese a que en la actividad se menciona que "tu tarea no es resolver el problema planteado", la mayoría de los docentes de primaria resolvieron el problema (44 de 69). En la sección 4.3 se presentan sus respuestas y un análisis a las mismas.

Tomando en cuenta que en el proceso de resolución los maestros usaron la información numérica para realizar la suma, se puede inferir que ellos no analizaron la relación entre los números y su representación geométrica (longitud de los lados) ni compararon las sumas parciales con el valor de un sumando (80 m). Su tratamiento de los números fue mecánico y no se observó intento alguno de darles un significado real y congruente con la forma del terreno.

En la Figura 2 se resume la clasificación de las respuestas que sostienen que el terreno sí puede existir en la realidad.

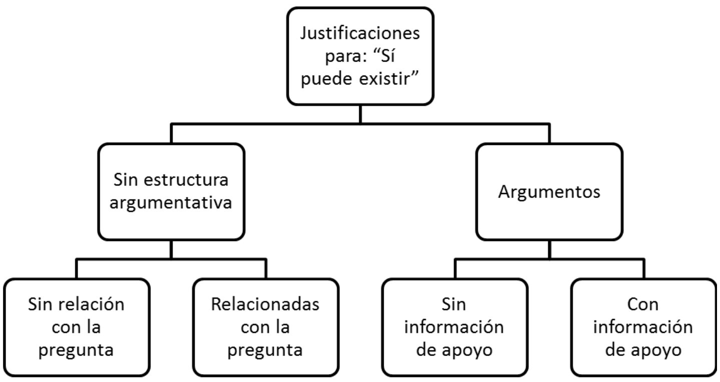


Figura 2. Clasificación de las justificaciones para la respuesta "Sí puede existir".

Afirmaciones sin estructura argumentativa

Sin relación con la pregunta. En este grupo encontramos aquellas afirmaciones que no guardan relación con la pregunta planteada. Parece ser que los profesores sólo atendieron a la instrucción de resolver el problema y eludieron el requerimiento de argumentar sobre la existencia o inexistencia del terreno. En seguida se dan algunos ejemplos.

P63 *Quiere saber el perímetro, se suman sus lados y se dividen en 20 para saber cuántos rollos.*

P45 *Primero hacer una suma. Hacer una división. Por último una aproximación.*

P1 *El perímetro es la suma de lados.*

P56 *Son terrenos irregulares, no importa la forma que tenga el terreno, sólo quiero el perímetro del terreno.*

P2 *Es una figura plana, con más de 3 lados y que se unen en todos sus puntos, quedando cerrada.*

Relacionadas con la pregunta. En este tipo de afirmaciones encontramos tres que, a pesar de estar relacionadas con la pregunta planteada, sólo afirman la existencia sin proporcionar más información ni garantías:

P68 *Sí puede existir un terreno con esta forma"*

P53 *Porque en la realidad sí puede existir esta forma de terreno"*

P44 *Sí puede existir un terreno con esas dimensiones"*

Argumentos

Sin información de apoyo. En este grupo encontramos los siguientes tipos de garantías: "porque los terrenos irregulares existen", "porque no todos los terrenos son regulares", "porque los terrenos pueden ser de cualquier forma" y "porque este tipo de terrenos los he visto en….".

Porque los terrenos irregulares existen

P3 *Porque sí existen terrenos de forma irregular.*

P61 *Creo que sí puede existir porque hay terrenos con muchas formas irregulares, tal vez más que las que presenta el dibujo del problema planteado.*

P8 *La irregularidad de los terrenos siempre se presenta, de hecho los terrenos en la mayoría de las ocasiones son irregulares, más que regulares.*

P10 *Hay diversos terrenos que pueden ser como éste y hay otros que tienen incluso más lados y más medidas que este ejemplo.*

Porque los terrenos pueden ser de cualquier forma

P57 *Hay diferentes formas del terreno que pueden formar diferentes figuras geométricas…*

P4 *Los terrenos pueden tomar cualquier forma.*

Porque no todos los terrenos son regulares

P60 *Sí, no todos los terrenos tienen forma regular.*

Porque este tipo de terrenos los he visto en…

P65 *Sí hay terrenos con esta forma irregular, en lo personal el terreno de mi casa es muy similar.*

P30 *Mi mamá me heredó un terreno con características similares, sólo que en la parte que mide 5 m no es recta, sino circular.*

P24 *Hay terrenos en esa forma, en algunas comunidades los terrenos son así.*

P21 *En el contexto rural sí existen terrenos irregulares con la necesidad de cercar, para el ganado.*

Argumentos con información de apoyo. En este grupo la garantía es del primer tipo que enunciamos arriba “porque existen los terrenos irregulares”, pero se distinguen de los anteriores en que contienen una información de apoyo. Esta información es para explicar la razón de la irregularidad de los terrenos. Encontramos de tres tipos:

(a) debido a fenómenos naturales,
(b) debido a prácticas sociales y
(c) una mezcla de las dos primeras.

Irregularidad debida a fenómenos naturales

P59 *En las comunidades rurales y más sobre las serranías, existen este tipo de terrenos donde la irregularidad y lo accidentado del relieve lo hacen factible a la realidad.*

P18 *No con mucha probabilidad pero sí, cuando colinda con un arroyo, barranca, etc.*

P17 *Se puede dividir en una hectárea, la figura planteada. En ocasiones los diferentes terrenos deformados por lluvia sí quedan así.*

P19 *Existen en la realidad terrenos irregulares debido a los factores tales como la geografía de los terrenos.*

Irregularidad debida a alguna acción o práctica social

P67 *Sí, puede llegar a existir, no muy usual pero hay terrenos muy irregulares que son limitados por calles, por el terreno, (límite del vecino) que obstruye otra cosa como torrecillas.*

P15 *Por la ubicación en la que se encuentre, muchas veces existen terrenos muy irregulares en los que ya existen construcciones y se va reduciendo a las condiciones en las que va quedando.*

P9 *Aunque en la realidad la mayoría de los terrenos están cuadrados o rectangulares, si puede formarse esta figura al unirlos.*

P22 *Generalmente los terrenos tienen formas cuadrangulares, pero si los dueños de los terrenos venden partes o fracciones de los mismos…*

P66 *Que sí existen terrenos de esta forma porque no existió una adecuada planeación.*

P32 *Sí, por ejemplo en algunos lugares hay terrenos cercados de esta forma más cuando crían ganado.*

P54 *Porque las tierras son repartidas de tal manera como le pueda convenir al dueño.*

P26 *Que de alguna manera esté así la superficie porque lo que está alrededor se ocupa para diferentes necesidades.*

P58 *Algunas veces al abrir calles toman partes de algunos terrenos y quedan de forma irregular. O al separarlo o dividirlo para varias personas, sembradíos, viviendas, etc.*

Con justificaciones mixtas

P27 *He observado diversos terrenos en que su superficie tiene formas irregulares, no todos tienen una forma rectangular o cuadrangular. En ocasiones es por la forma de relieve que tiene y en otras ocasiones simplemente se limita.*

P34 *Puede tratarse de un terreno que tenga límites que lo hagan de esta forma como por ejemplo, la calle, un río, una ladera, un precipicio, etc.*

Otros. Un profesor dio un argumento en el que se ve reflejada una creencia sobre los libros de texto. Se refiere a que en ellos se deben plantear problemas que tengan solución y que contengan, además, objetos reales:

P69 *Uno de los objetivos de la evaluación es que no confundan al alumno, ser objetivas, reales, prácticas. Si se debe de aplicar lo aprendido en la escuela a la vida diaria sería ilógico y absurdo plantear un problema con un terreno inexistente, ¿qué caso tendría entonces? Debe ser real.*

Destaca, también, el hecho de que este profesor establece su argumento basado en cierta praxis educativa cuando se refiere a los objetivos de la evaluación.

4.3 Las soluciones no solicitadas del problema

En el instrumento de investigación que se aplicó a los docentes de primaria estaba incluida la actividad denominada "El terreno del señor Javier", en la cual, en su versión original en el libro de texto, se pedía a los alumnos resolver el problema:

"La siguiente figura muestra la forma que tiene el terreno del señor Javier. Si lo quiere cercar con malla y cada rollo contiene 20 m, ¿cuántos rollos se emplearán para cercar dicho terreno?"

En las instrucciones del instrumento de investigación, dirigido a los maestros, se escribió: *"Su tarea no es resolver el problema planteado, sino responder a la pregunta: ¿Puede existir en la realidad el terreno que se describe en el problema de abajo?"*

Sin embargo, observamos que 44 de los 69 docentes intentaron resolver el problema, planeado para los alumnos en el libro de texto.

Para resolver este problema, se debe calcular el perímetro, el cual es de 155 m, y después, realizar la división 155/20, cuyo resultado es 7.75. La mayoría de los docentes realizó las operaciones correctamente y obtuvo este número, solo cuatro de ellos se equivocaron en la suma o en la división.

No obstante, debemos agregar que este resultado numérico requiere de una interpretación realista para responder correctamente la pregunta del problema. La respuesta puede ser 8 rollos o 7.75 rollos dependiendo de si se considera que usar ¾ de un rollo significa que se ha empleado un rollo, en cuyo caso la respuesta correcta sería 8 rollos. La segunda respuesta significaría que únicamente y exactamente se emplearían 7.75 rollos. Las respuestas que proporcionaron los docentes y su frecuencia relativa se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. *Frecuencia relativa de las respuestas dadas al problema*

Respuestas	**Frecuencia**
7.75 rollos o 7 ¾ rollos	34%
8 rollos	31.8%
8 rollos y le sobran 5 m	11.3%
7 rollos	4.5%
155 m	4.5%
7 rollos y medio	2.2%
7 rollos y 75 cm	2.2%
77.05	2.2%
7 rollos faltando 15 m	2.2%

Como se puede observar en la Tabla 2, la mayoría de los docentes (aproximadamente 77%) da como respuesta alguna de las dos opciones, el entero 8 rollos o la fracción 7.75 rollos. Sin embargo, no anotaron una justificación, por lo que no es posible concluir si los que respondieron 7.75 rollos interpretaron correctamente el resultado de la división.

Es claro que el 43% consideró que se emplearía un número entero de rollos y por eso la respuesta que dieron es “8 rollos” u “8 rollos y le sobran 5 m”. Esta respuesta presupone que la práctica de compra-venta de rollos se realiza solamente en forma de rollos enteros. Ninguno de los docentes propuso esa práctica como la razón para la interpretación realista de este resultado.

De la misma manera, el resultado 7.75 rollos es correcto si la compra-venta de rollos permite el caso de conseguir cualquier fracción de un rollo. La falta de una explícita y adecuada interpretación realista de un resultado de división con resto se ha evidenciado en muchas investigaciones con alumnos, en las que se ha pretendido contrastar los resultados que se obtienen entre la resolución de problemas y el planteamiento o invención de los mismos (Verschaffel, Van Dooren, Chen, & Stessens, 2009), así como para estimular la reflexión de los estudiantes mediante el análisis de sus propias producciones (Selter, 2009). Los resultados que se obtuvieron con los maestros en la solución no solicitada del problema de los rollos, indican que ellos no sentían la necesidad de justificar sus soluciones apoyándose en la mencionada práctica social, tal como la conocen o la suponen.

5. Discusión y conclusiones

Al considerar la importancia que tiene la argumentación en los diversos quehaceres del ámbito educativo, en particular en el de la Didáctica de las Matemáticas, nos hemos propuesto mediante este estudio, aportar al conocimiento de los procesos argumentativos que desarrollaron un grupo de docentes de educación primaria en México frente a una tarea que implicaba el reconocimiento de ciertas propiedades geométrico-numéricas de una figura, la cual representaba un terreno. Su principal objetivo era analizar los argumentos encontrados, los cuales fueron de tipo pragmático. En este trabajo se propuso, por tanto, indagar acerca de los tipos de argumentos que exhibe un colectivo de docentes de primaria en relación con la existencia o la inexistencia de un terreno representado en una actividad del libro de texto de quinto grado de primaria diseñada para los alumnos. Hemos esperado, de hecho, que la mayoría de los docentes iban a rechazar la existencia del terreno en cuestión y nos interesaba la estructura y la verbalización de las refutaciones.

Los resultados obtenidos fueron sorprendentes porque la mayoría de los argumentos eran de aceptación. Dichos resultados permiten observar diversos tipos argumentativos que utilizan los docentes de primaria cuando justifican la existencia del terreno involucrado en la actividad. Es interesante notar que la mayoría de los profesores desarrolla argumentos de tipo pragmático, esto es, basándose en experiencias personales, las características reales de los terrenos o el uso que les da el hombre.

En la variedad de argumentos que presentan los docentes, observamos que la gran mayoría hace un análisis superficial, se centra en la forma del terreno e ignora las medidas de los lados indicadas numéricamente. Dicho de otra manera, el análisis realizado por los docentes es parcial. Este resultado coincide con el que reportan Alatorre et al. (2012), quienes observaron “un divorcio entre los trazos y sus longitudes” cuando los docentes de primaria trazaron triángulos con medidas arbitrarias.

Una posible explicación del comportamiento sorprendente de los docentes sería que ellos percibieron su tarea como la pregunta que se debe responder no con recursos matemáticos (por ejemplo, la desigualdad triangular) sino con los conocimientos adquiridos en la vida ordinaria. Es conocido que la “percepción del problema” o, en otra terminología, la “enmarcación del problema” (“problem framing”) representa el primer paso en la resolución del problema que guía la selección, tanto de la estrategia como de los recursos conceptuales y procedimientos algorítmicos que serán usados (Walkington, Sherman & Petrosino, 2012). Una posibilidad de lograr que los maestros perciban la tarea en cuestión de “modo matemático” sería formularla como un problema demostrativo: “Demostrar que el terreno del señor Javier no puede existir en realidad.” Esta hipótesis se planea ponerla a prueba en una próxima investigación.

En las investigaciones relacionadas con el “conocimiento matemático para la enseñanza” (Mochón & Morales, 2010) se suelen usar los problemas que se encuentran en los libros de texto para evaluar los conocimientos de los maestros (Gonzato, Díaz & Neto, 2011; Maanan & de Haro, 2012). En este estudio, la idea era averiguar si los maestros eran capaces de notar el aspecto erróneo de un problema diseñado para los alumnos. Al no ser así, se tiene que concluir que ellos han enseñado dicho problema tal como fue presentado en el libro de texto.

En la preparación de los maestros de matemáticas en Japón, el expertaje se construye ayudando a los maestros a que aprendan a “usar el libro de texto para enseñar matemáticas” y no “enseñar el libro de texto de matemáticas” (Takahashi, 2011). Para que esto sea posible es necesario incluir, en los cursos de educación matemática, para los futuros y los docentes en servicio, la construcción de los conocimientos y habilidades necesarios para el análisis crítico de los libros de texto de matemáticas.

Referencias bibliográficas

Alatorre, S., Flores, P., & Mendiola, E. (2012). Primary teachers’ reasoning and argumentation about the triangle inequality. En T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the*

36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 3-10

Alatorre, S., & Sáiz, I. (2010). Teachers and triangles. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. 1890-1900.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

Cordero, G., Luna, E., & Patiño, N. X. (2011). La profesionalización de los maestros de educación básica. Retos para las instituciones de educación superior. *Perfiles Educativos*, *33*, 239-249.

Crespo, C. R., & Farfán, R. M. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 287-317.

De Olaizola, I., & Santos, L. M. (2004). Hacia una redefinición de la cultura matemática en el salón de clases: argumentando la inexistencia de soluciones. *Educación Matemática*, *16*(1), 5-27.

Douek, N. (1999a). Argumentation and conceptualization in context: A case study on sunshadows in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1), 89-110.

Douek, N. (1999b). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. In I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, *1*, 125-139.

Gonzato, M., Díaz, J., & Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, *23*(3), 5-37.

Knipping, C. (2004). Argumentations in proving discourses in mathematics classrooms. In G. Tôrner, et al. (Eds.). *Developments in Mathematics Education in German-speaking Countries. Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics*, 73-84.

León, O. L., & Calderón, D. I. (2001). Validación y argumentación de lo matemático en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(1), 5-21.

Maanan, N. M., & de Haro, J. J. O. (2012). Evaluación de conocimientos de profesores en formación sobre el juego equitativo. *Números*, (80), 103-117.

Mochón, S., & Morales, M. (2010). En qué consiste el “conocimiento matemático para la enseñanza” de un profesor y cómo fomentar su desarrollo: un estudio en la escuela primaria. *Educación matemática*, *22*(1), 87-113.

Monzón, L. A. (2011). Argumentación: objeto olvidado para la investigación en México. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *13*, 2, 41-54. Recuperado el 16 de agosto de 2013 de http://redie.uabc.mx/vol13no2/contenido-monzon.html

Rodríguez, L. I. (2004). El modelo argumentativo de Toulmin en la escritura de artículos de investigación educativa. *Revista Digital Universitaria*, *5*, 1.

Recuperado el 4 de marzo de 2013 de www.revista.unam.mx/vol.5/num1/art2/ene_art2.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2010). *Matemáticas Quinto Grado*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2011). *Plan de estudios 2011. Educación Básica*. México: SEP.

Selter, C. (2009). Stimulating reflection on word problems by means of students' own productions. En L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren & S. Mukhopadhyay (Eds.) *Words and Worlds. Modelling Verbal Descriptions of Situations* (pp. 315-331). Rotterdam: Sense Publishers.

Takahashi, A. (2011). The Japanese Approach to Developing Expertise in Using the Textbook to Teach Mathematics. En Y, Li & G. Kaiser (Eds.), *Expertise in Mathematics Instruction* (pp. 197-219). New York: Springer.

Tapan, M. S., & Arslan, C. (2009). Preservice teachers' use of spatio-visual elements and their level of justification dealing with a geometrical construction problem. *US-China Education Review*, *6*(3), 54-60.

Toulmin, S. E. (1958). *The uses of argument*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Verschaffel, L., Van Dooren, W., Chen, L., & Stessens, K. (2009). The relationship between posing and solving division-with-remainder problems among Flemish upper elementary school children. En L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay, (Eds.) *Words and Worlds. Modelling Verbal Descriptions of Situations* (pp. 143-160). Rotterdam: Sense Publishers.

Walkington, C., Sherman, M., & Petrosino, A. (2012). "Playing the game" of story problems: Coordinating situation-based reasoning with algebraic representation. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(2), 174-195.

Referencias de los autores

Lidia Aurora Hernández Rebollar, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México). lhernan@fcfm.buap.mx

José Antonio Juárez López, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México). jajul@fcfm.buap.mx

Josip Slisko Ignjatov, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México). jslisko@fcfm.buap.mx

Accepting the existence of a non-existent field in a mathematical problem: the prevalent use of pragmatic arguments in primary teachers

José Antonio Juárez López, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

Lidia Aurora Hernández Rebollar, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

Josip Slisko Ignjatov, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

Researches on teachers' knowledge, skills and wisdom gained from the experience, in general, are not very common in Mexico. Some previous studies have stressed the importance of educational research on the practical wisdom of teachers.

The present study addresses the different types of arguments given by 69 primary teachers to justify the existence (or nonexistence) of a field whose drawing was found in a problem proposed in Mexican fifth-grade mathematics textbook. The task of the teachers was not to solve the problem but to argue about a real existence of the field whose numerical characteristics are impossible.

The aim of this study was, firstly, to know if in-service primary teachers would be able to detect the impossibility of the existence of the mentioned irregular polygon, and, secondly, to know the different types of arguments used by teachers to justify the existence or non-existence of the drawn figure.

The investigation, whose results are reported in this article, is a qualitative study of exploratory-interpretative type. The subjects in this study were 69 primary school in-service teachers. These teachers were completing a training course in mathematics when answering the questions in the activity. The preparation of teachers was, generally, that of pedagogical school training in primary education with, in average, fifteen years of service.

The big majority of teachers accepted the possible existence of such field, providing different types of arguments. In this article, the results of the categorization of these arguments are reported. All arguments are of pragmatic nature, namely, teachers did formulate any arguments with mathematical support. Although they were not supposed to solve the problem designed for pupils, 44 teachers did solve it. The most striking feature of their responses is an absence of arguments about the conditions under which these responses are acceptable. In the variety of arguments presented by the teachers, we note that the vast majority of them carry out a superficial analysis, focusing on the shape of the field and ignore the length of the sides indicated numerically. In other words, the analysis done by teachers was only partial.