Números y utopías

Humberto R. Alagia

...pero los matemáticos no leen a Platón,
mientras que quienes lo leen no saben matemática
y consideran que su opinión sobre este tema es
meramente una curiosa aberración.

B. Russell, 1917.

¿Por qué una producción puramente mental como la matemática es tan útil en situaciones variadas, diferentes y concretas? Lo que se plantea es menos simple de lo que puede parecer; es la pregunta en torno al por qué la matemática en cuanto producción mental no motivada por las aplicaciones posibles resulta ser tan eficaz justamente en sus aplicaciones. No es necesario restringir el sentido de la palabra aplicación; puede ser en el mundo físico, en áreas fuera de la matemática, pero también en la misma matemática. No obsta que en cada caso individual quizá pueda encontrarse un problema particular, motivador de la aparición de un concepto matemático; ni tampoco afecta a esta cuestión que teorías matemáticas centrales se hayan originado en la resolución de problemas del mundo físico. Nos referimos más bien a la proliferación espontánea de aplicaciones no entrevistas al comienzo.

En la actividad concreta de matemáticos hay un énfasis —al menos una aguda atención— en las características formales de los objetos matemáticos, tanto que aparecen como construcciones arbitrarias. Esto no ocurre porque se construyan arbitrariamente o sean lúdicas; pero culturalmente las proposiciones matemáticas suelen ser percibidas como "verdaderas, concisas e irrelevantes".*[1]

Estas reflexiones se apoyan en otra percepción, en otro énfasis, se sustentan en un asombro o al menos una perplejidad ante *la irrazonable eficacia de la matemática.*[2] Esta feliz expresión entrelaza la matemática

---

* Las traducciones de las citas de la bibliografía han sido realizadas por el autor.

[1] "Mathematics: The Unifying Thread in Science", *Notices Am. Math. Soc.*, vol. 33, 1986, págs. 716-733.

[2] E. P. Wigner, "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", *Commun. Pure Appl. Math.*, 13, 1960, págs. 1-14. R. W. Hamming, "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics", *Am. Math. Monthly,* 87, 2, 1980, pp. 81-90.

(que es racional) con la eficacia (que es razonable) y modifica a ambas con el calificativo irrazonable. Eficaz y sus sinónimos efectivo, eficiente, refieren a la producción de un resultado o efecto definido; razonable tiene que ver con la razón práctica; racional refiere al razonamiento lógico con su connotación de falta de emoción. Anotemos esta sugerente serie de palabras en relación al tema: verdadera, racional, concisa, eficaz, irrelevante, irrazonable.

Hay otras motivaciones para estas reflexiones; tienen que ver con las utopías tecnológicas, y las variadas sugerencias intelectuales que la expresión propone. Estas cuestiones tienen una pertinencia especial por nuestra ubicación temporal: ahora, en el desquicio causado por la revolución con raíces profundas en la lógica, la matemática, la teoría cuántica. Hay un trasfondo en el que la informatización, la automatización, el control automático de procesos, la inteligencia artificial, la eficacia electrónica, son signos de que estamos en el umbral de una utopía.

Hay elementos concretos que acotan estas especulaciones y que ayudan a precisar una discusión; pensamos en los instrumentos o artefactos (en sentido amplio) que aparecen como agentes de la situación bosquejada. En su génesis aparentemente está la satisfacción de necesidades previamente identificadas (resolución de problemas). Pero es un fenómeno observable que el instrumento no se agota en la resolución del problema originador: ocurre que otros problemas se resuelven porque ahora está el instrumento. Otro aspecto concierne a la creación de necesidades (con una connotación de ficticio o artificial indestilable de la expresión). No hay línea de separación, hay una zona de incerteza: resolución de problemas —satisfacción de necesidades que existían— y creación de necesidades, porque existe el instrumento que conlleva su satisfacción. Quizás artefacto, que es un objeto o cosa resultado del trabajo humano, es la palabra con la connotación deseable ya que tiene en su raíz los elementos de arte y artificial. Hay artefactos cuya eficacia no es contenida por su definición original; puede discernirse una capacidad didáctica en acción.[3]

Aquí planteamos la posibilidad de considerar la matemática como un lugar desde el cual reflexionar sobre estas cosas: muchos de los elementos señalados están en ese lugar. La matemática alberga componentes utópicos, variados y novedosos. Y no es claro si los objetos matemáticos son artefactos o si ya existen y se van descubriendo.

[3] Este trabajo resultó de nuestra participación en un seminario sobre "Utopías Tecnológicas" dirigido por H. Schmucler en el Centro de Investigaciones de la Facultad de Filosofía y Humanidades de la U.N.C. durante 1991.

Estas notas se desarrollan en el análisis de algunas situaciones simples y conceptualmente ricas que pueden dar apoyos y precisiones a los comentarios precedentes. Dos actividades son básicas para la evolución del conocimiento matemático: contar y medir.[4]

CONTAR. Se trata de contar los elementos de un conjunto finito cualquiera. Los números naturales son los objetos matemáticos asociados con la abstracción que 1, 2, 3, etc. son lo que tienen en común, respectivamente, todos los conjuntos con un único elemento, con dos elementos, con tres elementos, etc. Lo dicho aproxima la descripción de una génesis del concepto de número natural y también una de sus definiciones formales. El concepto de número natural es una abstracción simple y extraordinariamente eficaz, como asimismo lo son sus notables consecuencias (tales como "dos más dos es cuatro"). Su jerarquía conceptual es profundamente diferente de cada una de las acciones individuales para contar los elementos de un conjunto dado; también lo es la del deducir que dos conjuntos cualesquiera de dos elementos, agregados tienen cuatro elementos. Esta diferencia conceptual puede inferirse del desarrollo psicológico; pero aquí ponemos el énfasis en la autonomía aparente del objeto, en una trascendencia de su sentido. El objeto, entre otras cosas, sirve para contar; no es claro que sea contenido en el artefacto.

MEDIR. Contar y medir son actividades relacionadas: si consideramos segmentos rectilíneos y elegimos uno de ellos, podemos intentar contar cuántas veces este segmento fijo cabe en otro segmento. Esta es la actividad de medir el otro segmento con el segmento fijo como unidad de medida: medir con una regla es análogo a lo que estamos describiendo. La situación problemática ocurre cuando la unidad de medida no agota el segmento a medir y hay un *resto* (el menor resto, que es menor que la unidad de medida). Una solución a este problema podría ser reiterar el proceso, repetirlo esta vez para contar cuantas veces cabe el resto en la unidad de medida. Por ejemplo, si el segmento unidad cabe seis veces en el segmento a medir y sobra un resto y si este resto cabe exactamente dos veces en la unidad de medida, se concluye que el segmento mide "seis y medio" o "13/2". Geométricamente estas operaciones son comparaciones de longitudes de segmentos, encontrar *razones* o *ratios;* este es el origen de la noción de *fracciones* o *números racionales*. Estas razones son cosientes de números naturales y aparecieron en contextos concretos variados; uno,

[4] A. J. Bishop, (ed), "Mathematics Education and Culture", *Educ. Stud. Math.*, 19, 2, 1988.

bien conocido resultó de los experimentos musicales de Pitágoras y la división de la octava en una escala de tonos y semitonos.

También aquí el objeto matemático que resulta tiene un alcance, cubre una extensión conceptual más allá de lo que la actividad de medir parece delimitar. La aritmética de los números naturales se extiende a los numeros racionales; extensión tiene un significado preciso: cada número natural es también un número racional y los resultados de las operaciones con naturales son los mismos si se los considera como racionales. Asimismo las fracciones se pueden ordenar, decidir cuándo una es mayor que otra, como extensión del ordenamiento de los naturales. Pero aquí aparece una novedad profunda: cada número natural x tiene un "siguiente", el número natural $x+1$, pero esto no ocurre en el conjunto de los racionales. Si a y b denotan dos fracciones con a menor que b, entonces la fracción $(a + b) / 2$ es mayor que a y menor que b. Esto demuestra que entre dos fracciones siempre hay una tercera; entonces no tiene sentido "la fracción siguiente" a una dada. Al extender el concepto de número se encuentra esta propiedad de "densidad", estructuralmente diferente de la "buena ordenación" de los números naturales.[5]

En el procedimiento de medición analizado puede ocurrir que el segmento resto no quepa un número entero de veces en el segmento unidad de medida. Podríamos entonces repetir el procedimiento: medir el primer resto con el segundo resto que aparece. Entonces, o este paso permite medir el segmento original o sino aparece un tercer resto; y así sucesivamente. Es tentador concluir que es verdadera la siguiente *Proposición:* -"Dados dos segmentos rectilíneos siempre puede encontrarse otro segmento (quizás muy pequeño, según las veces que haya que repetir el procedimiento) tal que cada uno de los segmentos originales puede dividirse en un número entero de partes iguales al tercer segmento". En el ejemplo que vimos el resto es tal tercer segmento: el segmento a medir puede dividirse en 13 partes y la unidad de medida en 2 partes iguales al resto. Así podemos convencernos de que la proposición precedente equivale a la afirmación de que a todo segmento es posible asignarle una medida que es un número racional; ésta es una versión precisa y fuerte del enunciado "las fracciones sirven para medir". Por cierto, los argumentos anteriores no constituyen una demostración de la proposición.

Menos claro y más profundo es el hecho que la proposición es falsa: los numeros racionales a veces sirven para medir, pero no bastan para medir todos los segmentos. Parece que tenemos un objeto matemático conceptualmente rico pero ineficaz como instrumento de medida. Es

[5] Densidad y Buena Ordenación son conceptos matemáticos precisos, pero no es necesario dar aquí más detalles.

necesario precisar que éste es un problema teórico: en la práctica la descripta es la única forma de medir segmentos. La ineficacia se plantea en otro nivel de sentido.

La falsedad de nuestra proposición suele expresarse así: "Existen segmentos inconmensurables", pares de segmentos para los cuales no existe el tercer segmento de la proposición. La existencia de segmentos inconmensurables es una consecuencia del Teorema de Pitágoras. Una de las formas de enunciarlo es: "En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"; si denotamos por **d** la hipotenusa (lado opuesto al ángulo recto) y por **a,b** los catetos, entonces el teorema puede abreviarse a la fórmula $\mathbf{d^2 = a^2 + b^2}$. Cada uno puede elegir su prueba preferida de este teorema, entre las más de trescientas documentadas. Aquí trataremos de medir la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos dos catetos son iguales y miden un centímetro. Si nuestro procedimiento para medir el segmento hipotenusa tomando el cateto como unidad de medida fuese exitoso, entonces encontraríamos una fracción r/s que sería la medida de la hipotenusa; puede suponerse que si uno de los números r/s es par el otro es impar (si no, puede simplificarse la expresión). Por la fórmula $r^2/s^2 = 1^2+1^2 = 2$ y así $r^2 = 2s^2$; entonces r^2 es par y necesariamente también lo es r. Primera conclusión: s es impar. Ahora como r es par puede expresarse $r = 2p$ y otra vez la fórmula implica $4p^2 = 2s^2$; si se simplifica el 2 resulta que $s^2 = 2p^2$. Como antes con r, obtenemos la conclusión que también s es par. Ambas conclusiones se contradicen y así resulta que ninguna fracción puede ser la medida de la hipotenusa. Dicho de otra manera: en un triángulo rectángulo un cateto y la hipotenusa son segmentos inconmensurables.

Nos interesa mirar más los argumentos utilizados, tratar de entender las creencias y presupuestos que hicieron de esta situación un problema. Cuando el Teorema de Pitágoras se enuncia como lo hicimos, su sentido se sustenta en una serie de identificaciones. La hipotenusa y los catetos son segmentos: se identifican los segmentos con sus longitudes; "d cuadrado" es el cuadrado de la hipotenusa o el cuadrado de la medida de la hipotenusa. Estas identificaciones presuponen la creencia que cada segmento tiene una longitud cuya medida es un número. Conclusiones análogas resultan de un análisis de las pruebas más elementales —y hermosas— del teorema, que utilizan métodos de disección de figuras geométricas. Esencialmente se divide una figura en dos formas diferentes y se comparan áreas; entre otras cosas se presupone que una figura tiene un área expresable por un número. Pero hay más: en los argumentos precedentes los números son naturales o razón de dos naturales: implícita o explícitamente número es número racional.

Pitágoras dijo "todas las cosas son números" o quizás "el número es la medida de todas las cosas". En su experiencia, como los estudios sobre una escala musical que mencionamos antes, los números eran racionales. Es posible que esto esté en el origen de todo el sistema de creencias que estamos esbozando. Pero no hay dudas sobre las consecuencias e influencias profundas de ese sistema de creencias. La crisis de los inconmensurables convenció a los griegos de que había que fundar la geometría sin los números: se abandonó la aritmética en favor de la geometría; los "Elementos" de Euclides contienen una variedad de fórmulas aritméticas demostradas con métodos geométricos. Curiosamente el matemático griego Eudoxo inventó la "teoría de los inconmensurables" y resolvió el dilema de Pitágoras, esencialmente de la manera aceptada modernamente. Pero la influencia del sistema pitagórico fue notablemente persistente en el tiempo: cuando Descartes fundó la Geometría Analítica en el siglo XVII, se aritmetizó la geometría, pero se ignoró el tema de los inconmensurables. Estas observaciones intentan sugerir la sutil y profunda calidad de las interacciones conceptuales en esta cuestión.

Es preciso mirar nuevamente al Teorema de Pitágoras: la longitud de la hipotenusa es la distancia entre sus extremos y es así como la fórmula $\mathbf{d^2 = a^2 + b^2}$ permite medir la distancia entre dos puntos cualesquiera en el plano o en el espacio.[6] Hamming afirma que Pitágoras es el primer gran *físico* de la historia: el teorema expresa el concepto que vivimos en lo que hoy se llama un espacio euclídeo—¡donde las medidas se encuentran con la fórmula de Pitágoras. Más aún, éste no es un resultado deducido de los postulados de la geometría, sino que es uno de los resultados que indican cómo deben ser los postulados. No es fácil exagerar la riqueza conceptual de todo lo expuesto: hay una complicada jerarquía, una quizás inextricable red de filiaciones, de grados de sentido y de significados. Aunque en un contexto algo diferente, Chevallard arguye que un concepto matemático no puede ser contenido por una definición.[7] Por su lado Hamming señala que la idea que los teoremas siguen de los postulados no está de acuerdo con la observación. El énfasis está en que los resultados no pueden ser contenidos por su demostración. Las demostraciones son el criterio de verdad en la matemática y por supuesto no hay matemática sin ellas. Lo que pretendemos indicar son otros ámbitos, otros lugares, otros modos dónde y con qué explorar la irrazonable eficacia de la matemática.

[6] Y. Chevallard, *La trasposition didactique,* La pensée sauvage, Grenoble, 1991

[7] *Ibidem.*

Los números naturales no son la medida de todas las cosas porque las *ratios* de números naturales no son eficaces para medir. Ocurre como si el Teorema de Pitágoras fuese la base para construir la contrautopía de la utopía pitagórica de la transparencia numérica.

Por otro lado ocurre algo asombroso: el dilema de Pitágoras tiene su solución. Se trata de asignar un número a cada segmento (su longitud); como faltan números (los racionales no bastan) el recurso es inventar (o descubrir) los números que faltan. Y exactamente tantos como se necesitan para resolver el dilema. La que sigue es una manera de contar esta historia.

Imaginemos una recta que se extiende indefinidamente en ambas direcciones. Usemos un compás para marcar un segmento unidad sobre la recta; a un extremo lo denotamos por 0 y al otro por 1; con la misma abertura del compás podemos después marcar puntos que se correspondan con los números naturales. Es decir que empezamos a construir una regla graduada. Con un poco más de ingenio geométrico podemos proseguir y terminar asignando un punto a cada fracción. Tomemos un segmento cualquiera, apliquemos un extremo en el punto 0 y girémoslo para que el otro extremo también esté sobre la recta: si este extremo coincide con uno de los puntos que tienen asignada una fracción, entonces esa fracción es la longitud del segmento.

Ahora construyamos otro segmento: sobre el punto 1 dibujemos un segmento perpendicular a la recta y cuya longitud es igual al segmento en la recta con extremos 0 y 1. Unamos el 0 con el extremo del segmento perpendicular que no pertenece a la recta: el segmento que resulta es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos iguales de longitud 1. Ahora hagamos centro con el compás en el punto 0 y tracemos la circunferencia de radio igual a la hipotenusa: la intersección de esta circunferencia con la recta es un punto. Este punto no tiene asignada ninguna fracción en la regla graduada que imaginamos: el segmento que comienza en el 0 y termina en este punto es igual a la hipotenusa que, como vimos, es inconmensurable con el cateto. El segmento no tiene longitud en el sentido que deseaba Pitágoras.

Esta versión del dilema sugiere otra interpretación: el punto sin fracción asignada es la representación de un número que es la longitud de la hipotenusa. Tal número no puede ser racional como se demostró; entonces hemos inventado o descubierto los números *irracionales*. Si los únicos puntos que tomamos en cuenta son los que se alcanzan marcando fracciones, la recta queda "incompleta": los números irracionales aparecen para completarla. Se llaman números *reales* a todos los números que consideramos, racionales e irracionales.

Esta versión de la historia de la aparición de los números reales es suficiente para nuestro propósito, a pesar de sus deficiencias. Notemos que la fundamentación de los números reales —de acuerdo con los lineamientos descriptos— se estableció rigurosamente y se institucionalizó a fines del siglo XIX, alrededor de veinticinco siglos después de Pitágoras y de Eudoxo. El matemático alemán Dedekind fue quizá el principal autor de esa fundamentación; es pertinente para nuestras reflexiones contar que Dedekind recurrió explícitamente a los griegos y dejó en claro que su objetivo era "pedagógico", que nunca consideró que su obra reveló algún "objeto nuevo de la investigación matemática".[8] Esto ayuda a poner en contexto el hecho que los números reales están en la base del fenomenal desarrollo de la matemática en los tiempos modernos , desde Newton hasta la segunda mitad del siglo XIX. Ocurrió que los números reales fueron los números decimales y entre ellos, los irracionales, aquellos con infinitas cifras después de la coma (salvo bien conocidas excepciones). Los números decimales siguen siendo una forma usual y correcta para representar números reales; pero ciertas falencias importantes en la fundamentación motivaron el trabajo de Dedekind.

Los hechos y la reflexión de Dedekind tienden a sugerir, otra vez, que el objeto no depende —en algún sentido profundo— de la prueba de su existencia. Aquí la irrazonable eficacia de la matemática aparece con una connotación de pragmatismo: el manejo de los conceptos no es contenido por las exigencias formales, parece que el hilo va por otro lado. En el trabajo de producción de matemática, en la cotidianeidad de un matemático esto es casi obvio. Pero la observación tiene otra densidad cuando se aplica a todo un trayecto temático.

Una consecuencia de la elaboración, actualmente aceptada como la lógicamente óptima, del concepto de número real es la de completar el cierre de un ciclo. A partir de una definición axiomática de los números naturales (o sino con su construcción basada en una teoría de conjuntos) es posible construir paso a paso los números enteros, después los racionales y culminar con los irracionales. Entonces resulta que Pitágoras creyó bien: los números naturales son el fundamento de todos los números, por lo menos.

La centralidad de los números reales en la matemática y en las ciencias experimentales es un elemento crucial. Es plausible que se los llame

[8] Citado en *Ibidem*.

números reales porque son un instrumento eficaz para medir no sólo segmentos de recta, sino todas las cantidades geométricas o físicas: ángulos, distancias, aceleraciones, energía, etc. Sin embargo los números reales son objetos ideales, construcciones mentales. La descripción de su construcción que presentamos revela esto; por ejemplo los segmentos, como otros objetos geométricos, son idealizaciones.

Como lo demostramos para los números racionales, también es cierto que entre dos números reales siempre hay un tercero: la recta es completa, o continua. Sin embargo no existe evidencia de que esto se corresponda con alguna realidad física, externa al objeto matemático. Hay números reales tan pequeños como deseemos, las fracciones $1/n$ con n tan grande como necesitemos; pero no es necesariamente cierto que haya distancias físicas arbitrariamente pequeñas, o sea objetos físicos tan próximos como queramos. El conjunto de los números reales —el *continuo*— no parece corresponder a una realidad física.

Penrose explica esta aparente contradicción: "El sistema de números reales se elige en la física por su utilidad *matemática,* simplicidad y elegancia junto con el hecho que concuerda, en un rango muy amplio, con los conceptos físicos de distancias y tiempo. *No* se los elige porque se sepa que concuerda en *todos* los rangos" (Enfasis en el original). Pero seguidamente señala que es asombroso que los mismos números que nos sirven para describir fenómenos a escala cotidiana o mayor sean también útiles a escalas subtómicas: "Esta es una extrapolación extraordinaria de la experiencia".[9]

De acuerdo con nuestros planteos introductorios surge otra reflexión. El sistema de los números reales, que hubiese satisfecho algunas de las expectativas de Pitágoras y que satisface y asombra a los científicos veinticinco siglos después, es quizás una utopía, una construcción, un artefacto que funciona. ¿Es por eso que creemos en la armonía matemática de la naturaleza? Porque recordemos con Wigner "que no es nada natural que existan 'leyes de la naturaleza' y mucho menos que el hombre pueda descubrirlas".[10]

La lógica de funcionamiento de los objetos matemáticos tanto en la misma matemática como en las aplicaciones a otras zonas del conocimiento —que tratamos de ilustrar en algunos casos particularmente accesibles y significativos— permite entrever ciertos conflictos o tensiones. Por un lado la compleja relación entre una construcción, una invención mental y, en contrapunto, los signos de una autonomía propia de lo que ya "estaba" y

[9] R. Penrose, *The Emperor's New Mind,* Oxford University Press, 1989.

[10] E. P. Wigner, *op. cit.*

que se descubre. Por otro lado las tensiones conceptuales que se entretejen en las diferentes corrientes de la filosofía matemática y, otra vez en contrapunto, la praxis matemática y sus aplicaciones. Y en todo esto el continuado debate sobre la ubicación de una ciencia lógico-deductiva en un contexto de ciencias experimentales y sociales, contexto en el que ocurre la irrazonable eficacia. Esta cuestión profunda es por supuesto conocida y viene siendo discutida desde muchas perspectivas.

La palabra inglesa *pattern* transmite de manera óptima el sentido exacto de arreglo de forma, de distribución de diversos elementos en un diseño, de modelo y de, literalmente, patrón. Steen comenta que la matemática, "no ya más solamente el estudio del número y del espacio", se ha vuelto "la ciencia de *patterns,* con la teoría construida sobre relaciones entre *patterns* y con aplicaciones derivadas del encaje entre *pattern* y observación".[11] Este comentario refleja las preocupaciones actuales y urgentes sobre el tema de nuestra reflexión, en parte importante impuestas por los cambios originados en la informática. Esta línea de reflexión relativamente nueva y de creciente vigencia, inevitablemente plantea una vez más la irrazonable eficacia. El debate sobre la matemática como "un hilo unificador" transcripto en [-1-], la sugerencia de que matemática es no solamente la ciencia de algunos *patterns* sino de todos los posibles, indican puntos para un camino de discusión.

Es apropiado cerrar estos apuntes con una vuelta a Pitágoras cuya influencia en el pensamiento matemático es obvia, pero que Bertrand Russell señalara fuertemente en sus escritos, en especial los elementos pitagóricos en Platón. En el prólogo a su autobiografía describe las componentes que se entremezclan en las cuestiones que planteamos al comienzo: "Quise comprender el corazón de los hombres. Quise saber porqué brillan las estrellas. Y traté de aprehender el poder Pitagórico por el cual el número ejerce control por encima de la realidad cambiante".[12]

---

[11] L. A. Steen, "The Science of Patterns", *Science,* 240 págs. 611-616, 1988.

[12] B. Russell, *Autobiography,* Atlantic-Little, Brown, 1967.