

## DE GPS AL MAPA

*Esteban Dörries*

Escuela de Topografía, Catastro y Geodesia, Universidad Nacional  
edorries@una.ac.cr

### RESUMEN

Las coordenadas Lambert obtenidas a partir de mediciones con equipos GPS de mano, llamados a veces navegadores, en ciertos casos confunden al usuario, por diferir claramente de su posición real al ser graficadas en un mapa del Instituto Geográfico Nacional (IGN). Esto puede resolverse con suficiente exactitud mediante una transformación de Molodensky, seguida de la correspondiente proyección cartográfica. Sin embargo, los tres parámetros necesarios para la transformación, supuestamente válidos para Costa Rica, se encuentran en muchas variantes y producen obviamente resultados diferentes. En este trabajo se analizan los fundamentos del problema y sus posibles soluciones, culminando con un estudio comparativo de ocho casos, que permite seleccionar los valores más adecuados para los parámetros.

**PALABRAS CLAVES:** GPS, WGS84, Lambert, mapas, transformación, Molodensky, parámetros.

### ABSTRACT

The Lambert coordinates obtained from measurements taken with a GPS hand equipment, called sometimes navigators, tend to confuse the user, because they differ clearly from the real position when they are plotted into a map from the National Geographic Institute. This can be resolved with enough accuracy by the Molodensky's transformation, followed by the corresponding cartographic projection. However, the three parameter necessities for the transformation, supposedly valid for Costa Rica, are found in many variants and

obviously produce different results. In this work the fundamentals of the problem and its possible solutions are analyzed, ending with a comparative study of eight cases that allow selecting the more adequate values for the parameters.

**KEYWORDS:** GPS, WGS84, Lambert, maps, transformation, Molodensky, parameter.

### INTRODUCCIÓN

El título de este trabajo indica que su finalidad es la de desarrollar la forma práctica de resolver lo mejor posible el traslado de la información horizontal recogida mediante equipos GPS sencillos a los mapas del IGN, que son los únicos de acceso fácil para el profesional, y muchas veces base cartográfica de implementaciones de Sistemas de Información Geográfica.

Es de conocimiento generalizado que los receptores GPS determinan en primera instancia la posición horizontal y vertical en el sistema WGS84, y que muchos tienen incorporadas dos transformaciones, la primera pasa los datos de un sistema de referencia a otro datum, y la segunda realiza la transformación al plano cartográfico. En aquellos casos en los que el receptor sea incapaz de resolver estos dos pasos, o que no permita definirlos con parámetros propios, se puede recurrir al programa GEOTRANS de la NGA, que es de uso libre y puede bajarse de Internet.

## FUNDAMENTOS

Todo sistema geodésico, materializado en el terreno mediante sus vértices amojonados, está referido a un datum, un origen, y comprende un elipsoide asociado que tiene cierta forma, tamaño y orientación.

Un datum clásico, como el de Ocotepeque, parte de un punto fundamental que se traslada mediante cadenas geodésicas, y con él la orientación del elipsoide, en nuestro caso es el de Clarke 1866, abreviado CC.

Un datum satelitario como el WGS84 está vinculado con la Tierra mediante los satélites en sus órbitas y las estaciones de control, el elipsoide asociado resulta geocéntrico, con su eje menor coincidiendo con el de rotación de la Tierra.

En todo sistema geodésico se consideran las coordenadas de posición latitud y longitud, y la altura elipsoidal. Además, se consideran sistemas cartesianos tridimensionales X, Y, Z, con el origen en el centro del elipsoide, el eje X en el plano ecuatorial y en el meridiano de Greenwich, el eje Y en el ecuador y normal al anterior, y el eje Z coincidiendo con el eje de rotación del elipsoide.

De cualquier elipsoide con cualquier datum, se puede pasar al mapa mediante las funciones de proyección cartográfica que se desee, en las cuales intervienen la forma y el tamaño del elipsoide. La ubicación del elipsoide, el datum, no figura en las funciones de transformación, pero afecta las coordenadas de los puntos, que las obtienen pasando de su ubicación física al elipsoide y de ahí al plano cartográfico.

Se pueden establecer funciones de transformación entre coordenadas planas N y E de dos planos cartográficos diferentes, por ejemplo el Lambert Norte y el CRTM, pero se trata siempre de relaciones aproximadas, que estarán afectadas por ser originadas en dos datum diferentes.

Se pueden establecer funciones de transformación entre dos sistemas diferentes, funciones de cambio de datum, que permiten pasar de las coordenadas geodésicas latitud, longitud y altura, o X, Y, Z, de un datum al otro.

## TRANSFORMACIONES DE DATUM

Las llamadas transformaciones de datum en realidad no efectúan cambio alguno en los que coexistan en una región o país, como ocurre con Ocotepeque-Clarke66 y WGS84-WGS84 en Costa Rica. Los que se transforman son los puntos, dados por sus coordenadas en un sistema, al otro. Pueden considerarse diversos modelos de transformación, que permitirán calcular las coordenadas "nuevas" en función de las coordenadas "viejas". Estos modelos permitirán hacer la transformación una vez que se cuente con los parámetros que la hacen aplicable en cada caso. Para la determinación de esos parámetros es imprescindible contar con puntos

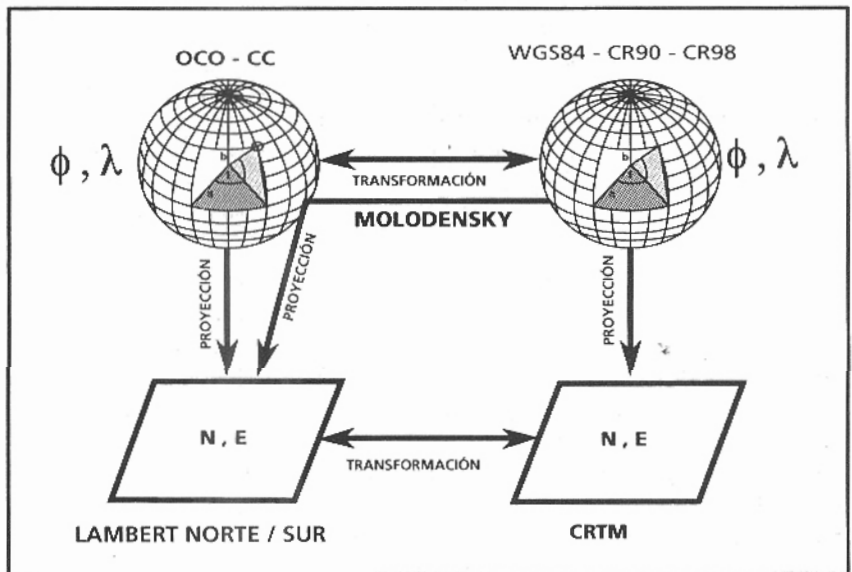


Figura 1. Datum, elipsoides y planos cartográficos.

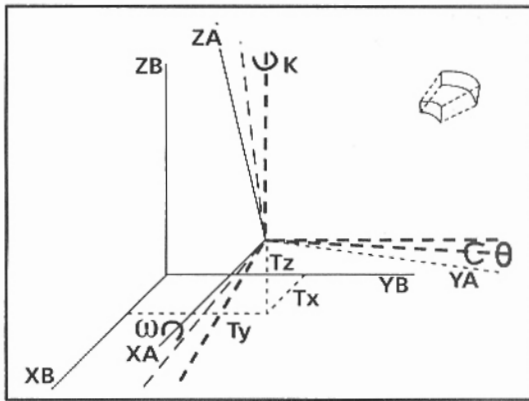


Figura 2. Los siete parámetros de la transformación semejante.

idénticos, es decir, puntos de los cuales se tienen tanto coordenadas “viejas” como “nuevas”.

Analizando la figura 2 puede observarse que para llevar a coincidir el sistema A con el B, deben realizarse las siguientes operaciones geométricas:

- Giro alrededor del eje XA llevando el eje YA a ser paralelo al plano XBOYB.
- Giro alrededor del eje YA llevando el eje XA a ser paralelo al plano XBOYB y el eje ZB a ser paralelo al eje XA.
- Giro alrededor del eje ZA hasta lograr el paralelismo de todos los ejes correspondientes.
- Traslación en TZ para llevar el plano XAOYA a coincidir con el plano XBOYB.
- Traslación en TY para hacer coincidir el eje XA con el XB.
- Traslación en TX para hacer coincidir los dos sistemas de coordenadas.
- Aplicación de un factor de escala para aproximar mejor los puntos idénticos.

En una transformación como ésta, el conjunto puntual “viejo” u “origen” es sometido a las mismas operaciones, aproximándose al sistema “nuevo” o “destino” cambiando la ubicación (tres traslaciones), la orientación (tres giros) y el tamaño (escala), pero sin cambiar de forma, por lo cual se trata de una transformación espacial semejante o

transformación de Helmert. Una transformación como ésta, o una de sus variantes, se conoce como transformación de siete parámetros, y su expresión matricial más general es la utilizada por Dörries y Roldán en el proyecto de investigación “Estudio Comparativo del Datum Geodésico de Ocotepaque y el Datum Satelitario del Sistema WGS84”:

$$\mathbf{XW} = \mathbf{XC} + \mathbf{XT} + \mathbf{R}(\mathbf{XC} - \mathbf{XO}) + (1+m)(\mathbf{XC} - \mathbf{XO}),$$

donde cada término corresponde a tres ecuaciones, con el factor de escala  $(1+m)$ , la matriz de rotación  $\mathbf{R}$  y los vectores de coordenadas diferenciados por el subíndice:  $\mathbf{W} = \text{WGS84}$ ,  $\mathbf{C} = \text{Clarke 1866}$ ,  $\mathbf{O} = \text{baricentro}$  y  $\mathbf{T} = \text{traslación}$ .  $\mathbf{O}$  en forma explícita, aunque con otra nomenclatura, como la utiliza la NGA:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta V \\ \Delta W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega & -\psi \\ -\omega & 0 & \epsilon \\ \psi & -\epsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U-U' \\ V-V' \\ W-W' \end{bmatrix}_i + \Delta S \begin{bmatrix} U-U' \\ V-V' \\ W-W' \end{bmatrix}_i$$

Si el centro de rotación, dado por la terna  $U'$ ,  $V'$ ,  $W'$ , se lleva al origen del sistema de partida, esos tres valores se anulan, obteniéndose la conocida expresión de Helmert:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{WGS84}} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + (1 + \Delta S) \begin{bmatrix} 1 & -R_Z & R_Y \\ R_Z & 1 & -R_X \\ -R_Y & R_X & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{Local}}$$

de la misma fuente que la anterior, y en la cual se pasa de un sistema local a WGS84, pero la expresión puede invertirse sin problemas.

La transformación de Molodensky, tema fundamental de este trabajo, se basa en lo anteriormente expuesto, pero introduce una simplificación muy citada, la de asumir que por pequeños los giros pueden considerarse nulos (los dos sistemas tienen ejes paralelos) y que, asimismo, el factor de escala es lo suficientemente próximo a la unidad como para poder dejar de considerarlo. Molodensky crea de esta forma una transformación entre los dos datum que contempla sólo las traslaciones entre los orígenes de ambos sistemas cartesianos, es decir,

entre los centros de ambos elipsoides. Sin embargo, se debe tener en cuenta que los elipsoides tienen diferentes tamaños, lo que puede expresarse por la diferencia entre los semiejes mayores, y que también tienen distintas formas, lo que puede expresarse por la diferencia de los achatamientos.

La meta de este trabajo es determinar la forma práctica de aplicar la transformación de Molodensky para pasar del datum satelitario WGS84, en el cual tendremos coordenadas geodésicas  $\phi_w$ ,  $\lambda_w$  y  $h_w$ , al datum Ocotepaque-Clarke 1866, con coordenadas afectadas por la diferencia entre los datum  $\phi_c$ ,  $\lambda_c$  y  $h_c$ . Las fórmulas tomadas de la publicación de Roberto Pérez Rodino son:

$$\begin{aligned}\phi_B &= \phi_A + \Delta\phi && \text{latitud} \\ \lambda_B &= \lambda_A + \Delta\lambda && \text{longitud} \\ h_B &= h_A + \Delta h && \text{altura elipsoidal}\end{aligned}$$

$$\Delta\phi^* = [-\Delta X \sin \phi_A \cos \lambda_A - \Delta Y \sin \phi_A \sin \lambda_A + \Delta Z \cos \phi_A + \Delta a (R_M e^2 \sin \phi_A \cos \phi_A) / a + \dots]$$

$$\dots + \Delta f [R_M (a/b) + R_N (b/a)] \sin \phi_A \cos \phi_A / [(R_M + h) \sin^2 \phi_A]$$

$$\Delta\lambda^* = [-\Delta X \sin \lambda_A + \Delta Y \cos \lambda_A] / [(R_M + h) \cos \phi_A \sin^2 \phi_A]$$

$$\Delta h = \Delta X \cos \phi \cos \lambda + \Delta Y \cos \phi \sin \lambda + \Delta Z \sin \phi - \Delta a (a/R_N) + \Delta f (b/a) R_N \sin 2\phi$$

siendo

$$R_M = a / (1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2} \quad R_N = a / (1 - e^2) / (1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}$$

$$\Delta a = a_B - a_A \quad \Delta f = f_B - f_A$$

O en la versión simplificada tomada del DOLA Geodetic:

$$\Delta\phi = [-\Delta X \sin\phi \cos\lambda - \Delta Y \sin\phi \sin\lambda + \Delta Z \cos\phi + (f \Delta a + a \Delta f) \sin 2\phi] / \rho$$

$$\Delta\lambda = (-\Delta X \sin\lambda + \Delta Y \cos\lambda) / (\nu \cos\phi)$$

$$\Delta h = \Delta X \cos\phi \cos\lambda + \Delta Y \cos\phi \sin\lambda + \Delta Z \sin\phi + (a \Delta f + f \Delta a) \sin 2\phi - \Delta a$$

en las cuales intervienen conocidos parámetros elipsoidicos, las tres traslaciones, la diferencia de semiejes y la diferencia de achatamientos.

## EN BUSCA DE UNA SOLUCIÓN

Debe aclararse que en este trabajo no se pretende analizar la aplicación de las fórmulas anteriores, ya que del cálculo se encarga normalmente el programa incorporado al receptor GPS o un programa externo como el ya citado GEOTRANS. Sin embargo, los programas no sólo necesitan la información métrica de los dos elipsoides, que siempre está disponible, ya que sin los tres

parámetros de traslación no se puede calcular la transformación. En prácticamente todos los equipos se tienen incorporados en la memoria los parámetros de una gran variedad de datum, correspondiendo en general a Costa Rica el dado como medio para la región centroamericana, una variante del norteamericano, el NAD27-N, con los parámetros 0, 125 y 194 m. Los resultados de la aplicación de Molodensky con estos parámetros, seguida de la proyección al plano Lambert, dejan muchísimo que desear. Es evidente que deben ser mejorados, para lo cual se requiere de puntos idénticos, con coordenadas GPS y coordenadas elipsoidicas en Clarke (IGN). Afortunadamente tenemos dos "juegos" de puntos idénticos:

**CR90:** Llamaremos de esta manera al datum definido por la materialización en el campo de 32 puntos de la red nacional de cadenas del IGN, en los cuales el Catastro Nacional midió una red GPS con cooperación de los Países Bajos. Los puntos idénticos permitieron calcular los parámetros de dos variantes de transformación de siete parámetros que se pueden encontrar en el portal del Registro Nacional. Estos parámetros se ven afectados por un posicionamiento absoluto de la red sin vínculo externo, de tal forma

que se corrige un desplazamiento de unos 262 m respecto a Ocotepaque, pero se mantienen unos 7,50 m respecto al sistema mundial WGS84.

**CR98:** Dörries y Roldán realizan un ajuste conjunto de datos de las redes de la Escuela de Topografía, Catastro y Geodesia, dos redes locales medidas con fines fotogramétricos y las mediciones en las dos cuencas oceánicas del proyecto TERRA, todo ello con amarre al sistema mundial. Los vértices de la red depurada fueron 68, de los cuales 28 son comunes a la red del IGN. El ajuste global original del proyecto TERRA también suele conocerse como CR98, las diferencias entre ambos son milimétricas.

La información correspondiente al datum CR90 está disponible, inclusive elaborada para dar lugar a dos variantes de transformación de siete

parámetros, pero no suministra información directa respecto a los tres parámetros de Molodensky. Lo mismo ocurre con los siete parámetros que definen el CR98, por lo cual se pueden plantear dos caminos para resolver el problema:

- Determinación de  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  y  $\Delta Z$  a partir de los pares de puntos idénticos, lo que evidentemente se realizaría con los 28 pares de puntos del CR98, por diferir únicamente en centímetros del sistema mundial. El procedimiento es riguroso, y comprende la formulación de  $3 * 28 = 84$  ecuaciones con los tres parámetros como incógnitas, lo que conduce a la aplicación de un algoritmo de ajuste geodésico. La desventaja radica en la falta de posibilidades de comparación con otras ternas de parámetros.
- Aplicación de la transformación de Molodensky con diferentes ternas de parámetros, partiendo de la latitud y la longitud GPS para obtener la latitud y la longitud sobre el elipsoide de Clarke, seguida por la proyección al plano cartográfico Lambert. Comparación de la posición de cada punto idéntico transformado con la posición Ocotepaque dada por el IGN:

$$(\phi_w, \lambda_w) \gg (\phi_c, \lambda_c) \gg (N_{(WGS)}, E_{(WGS)})$$

$$\Delta N = N_{(WGS)} - N_{OCO}; \Delta E = E_{(WGS)} - E_{OCO}$$

$$\Delta = (\Delta N^2 + \Delta E^2)^{1/2}$$

Este método puede aplicarse siempre y cuando se pueda asumir que los giros y el factor de escala son pequeños, ya que la red IGN de todos modos tiene problemas de escala y de tensiones, tanto originales como producto de cambios en los puntos, ya sea por causas naturales o por haber sido reconstruidos.

## ESTUDIO COMPARATIVO DE PARÁMETROS

En este estudio se consideran tres ternas de parámetros tomadas de diversas fuentes, que normalmente no revelan el procedimiento que se siguió para determinarlas, y cuatro que corresponden

a las tres traslaciones determinadas junto a las rotaciones y el factor de escala para una transformación de siete parámetros, dos del Catastro Nacional, dos del trabajo de Dörries-Roldán; además, se calcularon los parámetros para tres puntos idénticos, una variante que puede ser útil en forma local.

**Cuadro 1. Variantes de datum consideradas en el estudio.**

MODELO	DATUM	OBSERVACIONES
DMA	NAD27	Valor clásico que se mantiene en las fuentes de los EE. UU.
MAGE	NAD27	Variante dada por un fabricante de equipo, semejante a la anterior
CR90CNB	CR90	Medido por el Catastro Nacional y calculado con modelo baricéntrico
CR90CNN	CR90	Medido por el Catastro Nacional y calculado con modelo no baricéntrico
CR90NS	CR90 (?)	Metodología desconocida, de NIMA-Stentz
CR98DRB	CR98	Red ajustada por Dörries-Roldán y calculada con modelo baricéntrico
CR98DRN	CR98	Red ajustada por Dörries-Roldán y calculada con modelo no baricéntrico
CR98DR3	local	Calculado con el programa Inverse Molodensky de ILWIS

En los casos en que se procedió con puntos idénticos se excluyeron Osa, Manzanillo y Cabuyal por haber cambiado de posición. En el cálculo con el programa de ILWIS se utilizaron como puntos idénticos Buvis, Base Norte y Liberia. Los resultados se resumen en el cuadro 2, que contiene los tres parámetros utilizados, la distancia entre el punto del mapa, que corresponde a la posición IGN sobre el elipsoide de Clarke, y el transformado a partir de las coordenadas sobre el elipsoide WGS84, y la

desviación estándar calculada a partir de las 25 transformaciones.

**Cuadro 2. Parámetros y resultados para cada datum considerado.**

MODELO	$\Delta X_{[m]}$	$\Delta Y_{[m]}$	$\Delta Z_{[m]}$	$\Delta_{[m]}$	$\sigma_{[m]}$
DMA	0	125	194	351,61	1,91
MAGE	-6	127	192	353,70	1,96
CR90CNB	-67	0	217	599,15	0,93
CR90CNN	6	-49	-11	218,87	0,99
CR90NS	205	96	-98	7,53	1,53
CR98DRB	213	9	-75	1,10	0,73
CR98DRN	23	-30	2	205,82	0,91
CR98DR3	208	68	-86	2,00	1,19

## ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

- En los ocho casos los promedios de las diferencias de posición son muy diferentes, pero las desviaciones estándar son semejantes, probablemente debido a que la inseguridad se encuentra en las coordenadas del IGN.
- Los dos primeros casos, valores “medios” para la “región centroamericana”, dan resultados semejantes e igual de malos.
- Usar cualquiera de las dos variantes de traslaciones ofrecidas en la página Web del

Registro Nacional no es recomendable. Sería conveniente que se publicaran las fórmulas utilizadas, aunque en el mejor de los casos siempre se estará en el CR90.

- Los parámetros tomados a partir del modelo baricéntrico dan mejores resultados.
- Los parámetros de NIMA-Stentz dan resultados bastante buenos, pero aparentemente reflejan los 7,5 m que el CR90 está fuera del marco de referencia mundial.
- Los parámetros obtenidos a partir de tres puntos idénticos son sorprendentemente buenos, si se considera la distancia entre los puntos contemplados. Debería hacerse un estudio complementario con puntos ubicados en la zona de estudio.
- La mejor concordancia se obtiene utilizando las tres traslaciones del CR98 calculadas por Dörries-Roldán, por lo que se recomienda utilizarlas.

Debe tenerse en cuenta que los parámetros fueron determinados a partir de puntos idénticos con coordenadas GPS al centímetro, pero en correspondencia con coordenadas clásicas afectadas por errores de varios decímetros en promedio. La buena concordancia obtenida no significa que con la aplicación de los parámetros propuestos se logren resultados de la misma exactitud. Ésta seguirá dependiendo de la del instrumento y de la metodología utilizada, y si llegara a alcanzar el metro, debe pensarse en otro modelo de transformación. Mejor aún, en un nuevo sistema de referencia, un CR05 o un CR06, ojalá no un CR15, y en cartografía dentro de ese sistema, que sea actual y adecuada.

**BIBLIOGRAFÍA**

- Badekas, J. 1969. *Investigations related to the establishment of a World Geodetic System*, Report 124 Department of Geodetic Science, Ohio State University, Columbus.
- Bursa, M. 1962. *Studia Geophysica et Geodetica* 6: 209-214.
- DMA. 1986. *Technical Report 8350.2, DoD: WGS84, its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems*.
- DMA. 1990. *Technical Report 8358.1*.
- Dörries, E. 1998. *GPS, su referencia vertical*. Conferencia V Congreso Internacional de Topografía. Colegio de Ingenieros Topógrafos. Costa Rica.
- Dörries, E. y J. Roldán. 1999. *Estudio comparativo del datum geodésico de Ocotepeque y el datum satelitario del sistema WGS84*. Informe final de proyecto de investigación. Escuela de Topografía, Catastro y Geodesia. Universidad Nacional. Heredia, Costa Rica.
- NIMA. 1997. *World Geodetic System*.
- Núñez, A., J. Valbuena y J. Velasco. 1992. *GPS: La nueva era de la topografía*. Ediciones de las Ciencias Sociales. Madrid, 236 p.
- Orvis, K. 2002. *GPS Location and Costa Rican Topo Maps*. University of Tennessee.
- Pérez, R. 2002. *Parámetros de transformación entre el Sistema SIRGAS95 y los sistemas locales CDM y ROU-USAMS (Yacaré)*. Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay.
- Seeber, G. 1993. *Satellitengeodäsie*. Walter de Gruyter. Berlín, 531 p.
- Wolf, H. 1963. *Bulletin Géodésique* 68: 165-169.