

# La disyuntiva de Dios: ¿derivadas enteras o fraccionarias?

Jorge Fujioka Rojas\*

Recepción: 1 de diciembre de 2014

Aceptación: 6 de mayo de 2015

\*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, México.

Correo electrónico: fujoka@fisica.unam.mx

Se agradecen los comentarios de los árbitros de la revista.



**Resumen.** Se presentan conceptos básicos del cálculo fraccionario. Para ello, se describe una de las primeras disyuntivas que enfrentó Dios el primer día de la creación: ¿describiría las leyes físicas en términos de derivadas enteras o fraccionarias? Para salir de esta duda Dios examina lo que pasaría si en la segunda ley de Newton pusiera una derivada fraccionaria, en lugar de la segunda derivada usual. Dios resuelve este problema mediante la transformada de Laplace y esto lo conduce al descubrimiento de la función de Mittag-Leffler.

**Palabras clave:** derivada fraccionaria, ecuaciones diferenciales fraccionarias, cálculo fraccionario, oscilador fraccionario, función de Mittag-Leffler.

## God's Dilemma: ¿Fractional or Integer-Order Derivatives?

**Abstract.** This small article aims to serve as a first encounter with some basic concepts of *fractional calculus*. To this end, the first part of the article describes one of the first dilemmas that God faced on the first day of Creation: Would He write the physical laws in terms of integer-order derivatives, or would He use fractional ones? To solve this dilemma God examines what would happen if He put a fractional derivative in Newton's second law, instead of the usual second-order derivative. God solves this problem by means of the Laplace transform, and finds Mittag-Leffler's function.

**Key words:** fractional derivative, fractional differential equations, *fractional calculus*, fractional oscillator, Mittag-Leffler function.

## El primer día de la Creación

Una de las primeras cosas que Dios tuvo que decidir en el primer día de la Creación fue qué forma les daría a las leyes físicas que habrían de gobernar la evolución del universo.

Para el mediodía de ese primer día Dios, ya había decidido que escribiría las leyes físicas en forma de ecuaciones diferenciales, pero todavía tenía una duda: ¿usaría derivadas de orden entero en sus ecuaciones o introduciría alguna derivada

fraccionaria? Si usara sólo derivadas de orden entero, su imparcialidad podría quedar en entredicho. Los números irracionales (y los racionales no enteros) podrían sentirse discriminados y podrían argumentar que los enteros estaban siendo favorecidos de manera injusta.

Y la primera ecuación sobre la que Dios tenía que tomar una decisión era la forma de la ley que habría de constituir el fundamento de la mecánica clásica, es decir, la que le inspiraría a Newton a mediados del siglo XVII, y que llegaría a ser conocida

como segunda ley de Newton.

Dios se sentía inclinado a escribir esa ecuación en la forma:

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = \frac{\text{Fuerza}}{\text{masa}} \quad (1)$$

Su divina intuición le sugería que la segunda derivada sería más conveniente que una derivada fraccionaria de un orden  $\alpha \neq 2$ , pero quería tener bien claro qué pasaría si tomara una ecuación de la forma:

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = \frac{\text{Fuerza}}{\text{masa}} \quad (2)$$

donde  ${}^C_0D_t^\alpha x(t)$  fuera una derivada fraccionaria izquierda de orden  $\alpha \neq 2$ . Era claro que habría que tomar una derivada izquierda, ya que una derivada derecha daría al traste con la causalidad, y se correría el riesgo de llegar a contradicciones lógicas por demás indeseables. Recordemos que las derivadas fraccionarias izquierdas se calculan usando sólo los valores pasados de la función, mientras que las derivadas derechas requieren que conozcamos sus valores futuros (anexo: notas 1, 2 y 3). Además, Dios comprendía bien que si introducía una derivada fraccionaria en la segunda ley de Newton, lo más conveniente sería usar la definición de derivada fraccionaria de Michele Caputo a mediados del siglo xx, pues la derivada de Riemann y Liouville en el siglo xix daría problemas al considerar el problema de condiciones iniciales (anexo: nota 4).

Una vez elegido qué tipo de derivada fraccionaria utilizar en la ecuación (2), Dios pensó en introducir una fuerza sencilla en esta ecuación para ver qué resultados se obtenían con esta segunda ley de Newton fraccionaria. En la tarde de ese primer día de la Creación, Dios decidió usar una fuerza lineal, tal como la que Hooke usaría para modelar sus resortes, e introdujo una masa unitaria y una constante del resorte también unitaria (pues Dios prefiere las cosas sencillas), de modo que consideró la ecuación (anexo: nota 5).

$${}^C_0D_t^\alpha x(t) = -x \quad (3)$$

Dios sabía bien que la manera más fácil de resolver esta ecuación era utilizar la “transformada” que introduciría Laplace a finales del siglo xviii, ya que –como lo probarían los matemáticos del siglo xx– esta transformada de una derivada de Caputo satisface la ecuación (anexo: nota 6).

$$\mathcal{L}\left[{}^C_0D_t^\alpha x(t)\right] = \frac{1}{s^\beta} \mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n} x(t)\right] \quad (4)$$

donde  $\alpha$  está en el intervalo  $n - 1 < \alpha < n$  y  $\beta \equiv n - \alpha$ .

Usando la ecuación (4), y considerando que en  $t = 0$  las derivadas  $dx/dt^k$  fueran cero para  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ , Dios halló rápidamente que la transformada de la solución de la ecuación (3) tiene la forma:

$$\hat{x}(s) = x_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} \quad (5)$$

Esta expresión era un poco problemática, pues no se puede encontrar su transformada inversa en términos de las funciones especiales que conocería la humanidad hasta principios del siglo xix. Pero como Dios vio que esta expresión era interesante, decidió que le inspiraría a Gösta Mittag-Leffler la curiosidad por encontrar su anti-transformada; como producto de esa divina inspiración, Gösta tuvo el gusto de descubrir su propia función especial (la función de Mittag-Leffler), la cual se define así:

$$E_q(at^q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n t^{nq}}{\Gamma(nq+1)} \quad (6)$$

En términos de esta función podemos ya escribir la transformada inversa de la ecuación (5) así (anexo: nota 7):

$$x(t) = x_0 E_\alpha(-t^\alpha) \quad (7)$$

donde  $x_0 \equiv x(0)$ .

Cuando llegó el anochecer del primer día de la Creación, y ya sabiendo que la solución de la ecuación (3) es la función dada en (7), la mente geométrica de Dios visualizó en un instante todas las formas de esta función para todos los posibles valores de  $\alpha$ . Algunas de estas formas se muestran en las gráficas que se presentan más adelante. En estas figuras podemos ver que  $E_\alpha(-t^\alpha)$  tiende a cero cuando  $\alpha < 2$ , ya sea de manera monótona (si  $0 < \alpha \leq 1$ ) o bien mediante un comportamiento oscilatorio amortiguado (si  $1 < \alpha < 2$ ). Este comportamiento no le agradó a Dios, pues él quería una solución que resistiera el paso del

tiempo. Por otro lado, cuando  $\alpha > 2$ , la función  $E_\alpha(-t^\alpha)$  tiene un comportamiento oscilatorio explosivo, lo cual fue aún menos grato para Dios, pues sugería un comportamiento rebelde y problemático. Finalmente, cuando  $\alpha = 2$ , Dios observó que la función  $E_\alpha(-t^\alpha)$  oscilaba regular y eternamente (gráfica 1), lo cual sí le gustó mucho, ya que tiene una secreta inclinación por las cosas eternas (anexo: nota 8).

Así pues, para cuando el primer día de la Creación llegó a su fin, Dios ya había tomado las siguientes decisiones:

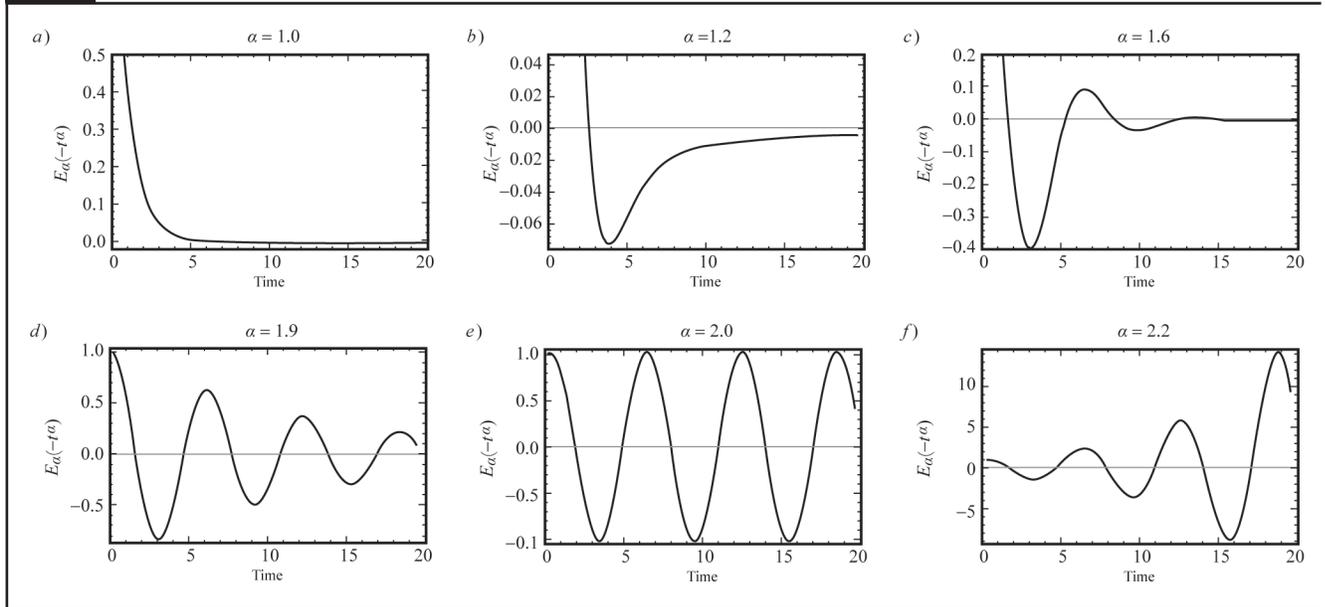
- a) Pondría una derivada de segundo orden en la segunda ley de Newton.
- b) Ayudaría a Gösta Mittag-Leffler a descubrir la función que habría de llevar su nombre para que así pudiéramos resolver la ecuación de movimiento de un oscilador fraccionario.
- c) Reservaría las derivadas fraccionarias para lo que la humanidad habría de descubrir en el siglo xxi.

Por otro lado, al finalizar ese primer día, Dios todavía no había decidido qué tipo de derivadas usaría en las ecuaciones del electromagnetismo, la mecánica cuántica y la relatividad general. De hecho, Dios necesitó otros tres días para convencerse de que también en las ecuaciones de Maxwell, en la de Schrödinger y en las ecuaciones de Einstein pondría únicamente derivadas de orden entero. Pero la descripción detallada de cómo Dios llegó a esas decisiones permanece aún sepultada en el *Archivum Secretum Apostolicum Vaticanum*, en Roma (anexo: nota 9).

Lo que el futuro le depara al cálculo fraccionario permanece aún oculto en la mente de Dios. A pesar de esto, matemáticos, físicos, ingenieros y economistas vislumbran ya aplicaciones donde este extraño cálculo podría ser útil. En México también comienzan a desarrollarse modelos novedosos que utilizan el cálculo fraccionario y es de esperarse que estas líneas de investigación crezcan y se multipliquen en los próximos años (anexo: nota 10).



**Gráfica 1.** Formas de la función  $E_{\alpha}(-t^{\alpha})$  para distintos valores de  $\alpha$  (elaboradas a partir de la definición de la función de Mittag-Leffler).



**Bibliografía**

Atanacković, T. M., Pilipović, S., Stanković, B. y Zorica, D. (2014). *Fractional calculus with applications in mechanics: Wave propagation, impact and variational principles*. Gran Bretaña: Wiley.

Camacho-Velázquez, R., Fuentes-Cruz, G. y Vásquez-Cruz, M. (2006). Declive curve analysis of fractured reservoirs with fractal geometry. *First International Oil Conference and Exhibition*. Cancún: Society of Petroleum Engineers.

Chen, W. y Holm, S. (2004). Fractional Laplacian time-space models for linear and nonlinear lossy media exhibiting arbitrary frequency power-law dependency. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 115(4), 1424-1430.

Fujioka, J., Espinosa, A. y Rodríguez, R. F. (2010). Fractional optical solitons. *Physics Letters A*, 374, 1126-1134.

Fujioka, J. (2010). Lagrangian structure and Hamiltonian conservation in fractional optical solitons. *Communications in Fractional Calculus*, 1, 1-14.

Fujioka, J., Espinosa, A., Rodríguez, R. F. y Malomed, B. A. (2014). Radiating subdispersive fractional optical solitons. *Chaos*, 24.

Fujioka, J. (2014). Fractional equivalent Lagrangian densities for a fractional higher-order equation. *Journal of Physics A*, 47.

Gorenflo, R., Mainardi, F., Moretti, D., Pagnini, G. y Paradisi, P. (2002a). Discrete random walk models for space-time fractional diffusion. *Chemical Physics*, 284, 521-541.

Gorenflo, R., Mainardi, F., Moretti, D., Pagnini, G. y Paradisi, P. (2002b). Fractional diffusion: Probability distributions and random walk models. *Physica A*, 305, 106-112.

Gutiérrez-Vega, J. C. (2007). *Fractionalization of optical beams*. I Congreso Nacional de Física.

Hernández, D., Varea, C. y Barrio, R. A. (2009). Dynamics of reaction-diffusion systems in a subdiffusive regime. *Physical Review E*, 79.

Hu, Z. y Chen, W. (2013). Modeling of Macroeconomics by a Novel Discrete Fractional dynamical system. *Discrete Dynamics in Nature and Society* 2013.

Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. y Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*. Amsterdam: Elsevier.

Lorenzo, C. F. y Hartley, T. T. (1999). *Generalized functions for the fractional calculus*. NASA / TP-1999-209424/REV1. Hanover: The NASA STI Program Office.

Magin, R. L. (2006). *Fractional calculus in bioengineering*. Redding: Begell House Publishers.

Magin, R., Ortigueira, M. D., Podlubny, I. y Trujillo, J. J. (2011). On the fractional signals and systems. *Signal Processing*, 91, 350-371.

Naber, M. (2004). Time fractional Schrödinger equation. *Journal of Mathematical Physics*, 45, 3339-3352.

Ortigueira M. D. (2008a). Fractional central differences and derivatives. *Journal of Vibration and Control*, 14(9-10), 1255-1266.

Ortigueira, M. D. (2008b). An Introduction to the fractional continuous-time linear systems: The 21st century systems. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, Third quarter, 2008, 19-26.

Ortigueira M. D. y Trujillo, J. J. (2012). A unified approach to fractional derivatives. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17, 5151-5157.

Rabei, E. M., Tarawneh, D. M., Muslih, S. I. y Baleanu, D. (2007). Heisenberg's equations of motion with fractional derivatives. *Journal of Vibration and Control*, 13, 1239-1247.

Rida, S. Z., El-Sherbing, H. M. y Arafa, A. A. M. (2008). On the solution of the fractional nonlinear Schrödinger equation. *Physics Letters A*, 372, 553-558.

Riewe, F. (1996). Nonconservative lagrangian and hamiltonian mechanics. *Physical Review E*, 53, 1890-1898.

Riewe, F. (1997). Mechanics with fractional derivatives. *Physical Review E*, 55, 3581-3592.

Samko, S. G., Kilbas, A. A. y Marichev, O. I. (1993). *Fractional integrals and derivatives*.

*Theory and applications*. Amsterdam: Gordon and Breach.

Rodríguez, R. F., Fujioka, J. y Salinas-Rodríguez, E. (2013). Fractional fluctuation effects on the light scattered by a viscoelastic suspensión. *Physical Review E*, 88, 022154.

Rodríguez, R. F., Fujioka, J. y Salinas-Rodríguez, E. (2015). Fractional correlation functions in simple viscoelastic liquids. *Physica A*, 427, 326-340.

Stanislavsky, A. A. (2006). Hamiltonian formalism of fractional systems. *European Physical Journal B*, 49, 93-101.

Tofighi, A. (2013). An especial fractional oscillator. *International Journal of Statistical Mechanics*, 2013, 175273.

Vilela Mendes, R. (2009). A fractional calculus interpretation of the fractional volatility model. *Nonlinear Dynamics*, 55(4), 395-399.

**Anexo**

**Nota 1. Caputo y Riemann-Liouville**

Hay varias formas de definir una derivada fraccionaria. En todos los casos, las expresiones para estas derivadas son complicadas, y la forma de entender su origen es recordar primero la fórmula de Cauchy para integrales repetidas (Atanacković *et al.*, 2014):

$${}_a I_t^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-t')^{n-1} f(t') dt' \tag{8}$$

Esta fórmula nos da el resultado de integrar  $n$  veces (de forma sucesiva) a la función  $f(t)$ . Si ahora reemplazamos el entero  $n$  por un número real  $\alpha > 0$ , obtenemos la expresión que nos define a una integral fraccionaria de orden  $\alpha$ :

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-t')^{\alpha-1} f(t') dt' \tag{9}$$

Una vez teniendo una definición para la integral fraccionaria podemos definir a la derivada fraccionaria de la siguiente manera (Kilbas *et al.*, 2006):

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a I_t^{n-\alpha} \left[ f^{(n)}(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-t')^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t') dt' \tag{10a}$$

Es decir, para obtener la derivada fraccionaria de orden  $\alpha$  (donde  $n-1 < \alpha < n$ ) primero calculamos la derivada de orden  $n$  y luego “nos regresamos” una cantidad  $n - \alpha$  mediante una integral fraccionaria de orden  $n - \alpha$ . Podríamos también realizar primero la integral fraccionaria de orden  $n - \alpha$ , y luego efectuar la derivada de orden  $n$ . Esto nos conduciría a la definición alternativa (Samko *et al.*, 1993):

$${}^{RL} D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left[ {}_a I_t^{n-\alpha} f(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-t')^{n-\alpha-1} f(t') dt' \tag{11a}$$

La definición (10a) es la que introdujo Caputo en 1967 y la definición (11a) fue la que propusieron Riemann y Liouville en el siglo XIX.

Podemos ver que en las definiciones (10a) y (11a) se integra sobre valores del tiempo *anteriores* al valor  $t$  en el cual se está calculando la derivada fraccionaria. Esto es, en ambas definiciones integramos sobre *valores pasados* de la función. Como este intervalo de integración está a la izquierda del punto  $t$ , a estas derivadas se les llama derivadas fraccionarias izquierdas.

De manera similar, es posible definir derivadas fraccionarias derechas de la forma siguiente:

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = {}_t I_b^{n-\alpha} \left[ f^{(n)}(t) \right] = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (t'-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t') dt' \tag{10b}$$

$${}^{RL} D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left[ {}_t I_b^{n-\alpha} f(t) \right] = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (t'-t)^{n-\alpha-1} f(t') dt' \tag{11b}$$

Estas dos expresiones, aunque muy similares a las expresiones (10a) y (11a), presentan dos problemas. El primero es la presencia del factor  $(-1)^n$ . De modo inesperado, para entender verdaderamente el origen de este factor hay que adentrarse bastante en las raíces del cálculo fraccionario. Aquí sólo mencionaremos que la presencia de este factor hace que las definiciones (10b) y (11b) se reduzcan a las derivadas normales cuando  $\alpha$  tiende a un entero *par*, pero dan un signo equivocado cuando  $\alpha$  tiende a un entero *impar*. Y el segundo problema es que para calcular el valor de las derivadas derechas en un tiempo  $t$  necesitamos conocer los valores de la función  $f(t')$  sobre un intervalo

de la forma  $t < t' < b$ , es decir, necesitamos conocer los valores que tomará la función  $f(t)$  en el *futuro*. Como esto por lo general no es posible, las derivadas *temporales* derechas sólo se utilizan en situaciones muy especiales. Un ejemplo en el que se usan tanto derivadas temporales izquierdas como derechas surge en la descripción de los solitones ópticos (Fujioka *et al.*, 2010; Fujioka *et al.*, 2014). Por otro lado, cuando las derivadas fraccionarias actúan sobre una variable *espacial*, ambas derivadas –la izquierda y la derecha– tienen sentido físico, y en ese caso no hay razón para privilegiar a una de esas derivadas por encima de la otra. Por este motivo recientemente Manuel Duarte Ortigueira ha introducido una nueva derivada fraccionaria centrada que involucra valores tanto a la izquierda como a la derecha del punto en el que se está calculando la derivada (Ortigueira, 2008a; Ortigueira y Trujillo, 2012).

**Nota 2. Sobre la notación**

En este trabajo usamos los símbolos:  ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$  y  ${}_t^C D_b^\alpha f(t)$  para denotar a las derivadas fraccionarias izquierda y derecha respectivamente siguiendo la notación usada en el texto de Atanacković *et al.* (2014), que (en opinión del autor) es la más clara, ya que los subíndices que aparecen debajo de la  $D$  indican de manera explícita los límites (inferior y superior) de las integrales que vemos en las ecuaciones (10a) y (10b). Otros autores, sin embargo, prefieren denotar estas derivadas en la forma (Kilbas *et al.*, 2006):  ${}_a^C D_{a+}^\alpha f(t)$  y  ${}_t^C D_{b-}^\alpha f(t)$  y en textos más antiguos aparecen otras notaciones más confusas, que ya prácticamente no se utilizan. Existen, además, otras derivadas fraccionarias definidas de formas distintas, por lo cual en los artículos sobre cálculo fraccionario podemos encontrar una amplia gama de símbolos que denotan derivadas fraccionarias diferentes. En particular, es conveniente mencionar aquí que un concepto “parecido”, pero diferente al de las derivadas fraccionarias, es el del laplaciano fraccionario (Chen y Holm, 2004), el cual es definido de varias formas. Sin embargo, en la definición más conocida (y contra lo que uno podría suponer), el laplaciano fraccionario no se construye poniendo derivadas fraccionarias (de un orden fraccionario  $\alpha$  cercano a 2) en lugar las segundas derivadas usuales (de orden 2) que aparecen en la definición del laplaciano normal. En lugar de hacer esto, se toma como punto de partida que la transformada de Fourier del laplaciano normal satisface la ecuación:  $F[\Delta\varphi] = F[\nabla^2\varphi] = -k^2 F[\varphi]$  donde  $\varphi(x, y, z)$  es un campo escalar y  $k$  es el módulo del vector de onda  $k$  (i.e., la variable de Fourier correspondiente al vector de posición  $r$ ). Basándose en esta ecuación, se define al laplaciano fraccionario como aquel operador cuya transformada de Fourier satisface la ecuación (Samko *et al.*, 1993):  $F[(-\Delta)^{\alpha/2}\varphi] = k^\alpha F[\varphi]$ .

Este operador es importante, ya que se utiliza al construir generalizaciones fraccionarias de la ecuación de difusión que son útiles para describir el comportamiento de sistemas complejos (como los fluidos viscoelásticos), en los cuales puede aparecer el fenómeno de la subdifusión o la supradifusión (Gorenflo *et al.*, 2002a; Gorenflo, 2002b).

**Nota 3. Izquierda y derecha**

En un primer encuentro con el concepto de derivada fraccionaria uno podría preguntarse qué tan diferentes pueden ser los valores de las derivadas izquierda y derecha. Para contestar esta pregunta fijémonos, por ejemplo,

en las derivadas de Riemann-Liouville izquierda y derecha, dadas respectivamente por las ecuaciones (11a) y (11b). (11a) nos muestra que el valor de la derivada izquierda al tiempo  $t$  de una función  $f(t)$  se calcula a partir de los valores que toma la función en un intervalo  $a < t' < t$  que está a la izquierda del punto  $t$ . En cambio, la derivada derecha, dada por (11b) se calcula con los valores de  $f(t')$  sobre un intervalo de la forma  $t < t' < b$ . Como en general los valores de  $f(t')$  en el intervalo  $a < t' < t$  no tienen ninguna relación forzosa con los valores de  $f(t')$  en el intervalo  $t < t' < b$ , no hay ninguna relación (válida en general) entre los valores de  ${}^{RL}D_t^\alpha f(t)$  y  ${}^{RL}D_b^\alpha f(t)$ . Si en un caso particular el comportamiento de  $f(t')$  en el intervalo  $a < t' < t$  fuera similar a su comportamiento en el intervalo  $t < t' < b$ , pues entonces en ese caso particular  ${}^{RL}D_t^\alpha f(t)$  y  ${}^{RL}D_b^\alpha f(t)$  serían parecidas. Eso sucede, por ejemplo, si tomamos  $f(t) = \cos t$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $n = 2$ ,  $a = -\infty$  y  $b = \infty$ . En ese caso se encuentra que:  ${}^{RL}D_t^\alpha \cos t = \cos(t + 3\pi/4)$  y  ${}^{RL}D_\infty^\alpha \cos t = \cos(t - 3\pi/4)$ , que son funciones parecidas. Pero algo muy distinto sucede si elegimos  $f(t) = e^t$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $n = 2$ ,  $a = -\infty$  y  $b = \infty$ . Si elegimos cualquier punto  $t$  en el eje real, veremos que el comportamiento de  $f(t')$  en el intervalo izquierdo  $-\infty < t' < t$  es muy diferente a su comportamiento en el intervalo derecho  $t < t' < \infty$ . En el intervalo izquierdo  $f(t) = e^t$  es una función acotada y  ${}^{RL}D_t^\alpha e^t = e^t$ . En cambio, en el intervalo derecho  $f(t) = e^t$  es una función no acotada, y la derivada derecha  ${}^{RL}D_\infty^\alpha e^t$  no existe, ya que si sustituimos  $f(t) = e^t$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $n = 2$  y  $b = \infty$ , en (11b) encontraremos que la integral que allí aparece diverge. Esto nos muestra que los valores de  ${}^{RL}D_t^\alpha f(t)$  y  ${}^{RL}D_b^\alpha f(t)$  pueden ser muy diferentes.

**Nota 4. Las condiciones iniciales**

Es importante observar que aun cuando ambas definiciones (la de Caputo y la de Riemann-Liouville) parecen bastante similares, cuando estas derivadas fraccionarias entran en ecuaciones diferenciales, e intentamos resolver estas ecuaciones mediante la transformada de Laplace (TL), aparece una diferencia importante. Consideremos, por ejemplo, que tuviéramos una ecuación diferencial con derivadas fraccionarias izquierdas. La TL de la derivada de Caputo izquierda involucra los valores iniciales de las derivadas de orden entero de la función incógnita (Kilbas *et al.*, 2006):

$$\mathcal{L}\left[{}^C D_t^\alpha f(t)\right] = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{i=0}^{n-1} C_i s^{\alpha-i-1} \quad (n-1 \leq \alpha < n)$$

donde:  $C_i = f^{(i)}(a)$   $i = 0, 1, \dots, n-1$

Por otro lado, la TL de la derivada de Riemann-Liouville izquierda tiene la forma (Kilbas *et al.*, 2006):

$$\mathcal{L}\left[{}^{RL} D_t^\alpha f(t)\right] = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{i=1}^n R_i s^{i-1} \quad (n-1 < \alpha \leq n)$$

donde ahora:  $R_i = {}^{RL} D_t^{\alpha-i} f(a)$   $i = 1, 2, \dots, n$

Es decir, en el caso de Riemann-Liouville es necesario conocer los valores iniciales de las derivadas fraccionarias  ${}^{RL} D_t^{\alpha-i} f(a)$ . Como en la inmensa mayoría de los problemas de física, ingeniería o economía no conocemos los valores iniciales de estas derivadas fraccionarias, el uso de la derivada de Riemann-Liouville puede ser problemático y la derivada de Caputo podría ser una mejor opción.

**Nota 5. El oscilador fraccionario**

En este artículo, por ser un trabajo de divulgación, presentamos a la ecuación fraccionaria (3) a la forma de resolverse mediante (4), y a las soluciones oscilatorias que se muestran en las gráficas, como si fueran cosas novedosas que sólo Dios ha considerado. Esto obviamente es sólo un recurso estilístico. En realidad el oscilador fraccionario ya ha sido estudiado en la literatura científica. Sobre esto el lector puede ver, por ejemplo, los artículos de Tofighi (2013) y Stanislavsky (2006) y las referencias allí mencionadas.

**Nota 6. Transformada de la derivada**

La demostración de que la transformada de Laplace de una derivada de Caputo está dada por la ecuación (4) se obtiene usando el teorema de convolución:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t p(t-z) q(z) dz\right] = P(s) Q(s)$$

donde  $P(s)$  y  $Q(s)$  son las transformadas de  $p(t)$  y  $q(t)$ . Si en esta identidad tomamos:  $p(t) = t^{(n-\alpha-1)}$   $q(t) = f^{(n)}(t)$  obtenemos:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t (t-t')^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t') dt'\right] = \frac{\Gamma(n-\alpha)}{s^{n-\alpha}} \mathcal{L}[f^{(n)}(t)]$$

lo cual nos conduce a la ecuación (4).

**Nota 7. Función de Mittag-Leffler**

Para demostrar que la transformada inversa de la expresión (5) está dada por (7) empecemos por notar que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^\alpha - 1}{s^\alpha + 1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^\alpha - 1}{s^\alpha \left[1 + \frac{1}{s^\alpha}\right]}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \left(1 + \frac{1}{s^\alpha}\right)^{-1}\right]$$

Si ahora recordamos la expansión binomial:  $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  veremos que:

$$\frac{1}{s} \left(1 + \frac{1}{s^\alpha}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{s}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{s^\alpha}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s^{n\alpha+1}}$$

y por lo tanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \left(1 + \frac{1}{s^\alpha}\right)^{-1}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{n\alpha+1}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{\Gamma(n\alpha+1)} = E_\alpha(-t^\alpha)$$

lo cual nos demuestra que la transformada inversa de la ecuación (5) es en efecto la ecuación (7). Siguiendo un procedimiento similar también se puede demostrar que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^\alpha}{s(s^\alpha - a)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n n!}{\Gamma(n\alpha+1)} \equiv E_\alpha(at^\alpha)$$

que es precisamente la expresión que define a la función de Mittag-Leffler (Lorenzo y Hartley, 1999).

**Nota 8. Sistemas no conservativos**

Las soluciones explosivas que se obtienen cuando  $\alpha > 2$ , así como las soluciones amortiguadas que resultan cuando  $1 < \alpha < 2$ , muestran que la derivada fraccionaria que hemos introducido en la ecuación (3) permite describir efectos similares a los que producirían fuentes y sumideros de energía. Es por este motivo que las derivadas fraccionarias se han visto como una posible forma de describir sistemas no conservativos. Sobre esto el lector puede ver las referencias Rabei *et al.*, 2007, Riewe, 1996 y Riewe, 1997.

**Nota 9. Ecuación de Schrödinger fraccionaria**

Hasta donde el autor conoce, no se han estudiado extensiones fraccionarias de las ecuaciones de Maxwell o de las ecuaciones de Einstein. En cambio, sí se han estudiado extensiones fraccionarias de la ecuación de Schrödinger normal (Naber, 2004) y de la ecuación no lineal de Schrödinger (Rida *et al.*, 2008; Fujioka, 2010; Fujioka, 2014; Fujioka *et al.*, 2010; Fujioka *et al.*, 2014).

**Nota 10. Prospectiva**

En México, con la llegada del siglo XXI, las derivadas fraccionaria han empezado a usarse en varios campos: en la industria petrolera (Camacho-Velázquez *et al.*, 2006), en óptica (Gutiérrez-Vega, 2007), en sistemas de acción-difusión (Hernández *et al.*, 2009), en la teoría de solitones (Fujioka, 2010; Fujioka, 2014; Fujioka *et al.*, 2010; Fujioka *et al.*, 2014), y en mecánica estadística (Rodríguez *et al.*, 2013; Rodríguez *et al.*, 2015). Además, el cálculo fraccionario está hallando múltiples aplicaciones en la teoría de control y procesamiento de señales (Ortigueira, 2008b; Magin *et al.*, 2011), en bioingeniería (Magin, 2006) y en economía (Hu y Chen, 2013; Vilela Mendes, 2009). Es de esperarse que en los próximos años veremos crecer las aplicaciones del cálculo fraccionario en múltiples direcciones, ya que es una herramienta relativamente nueva y la gran mayoría de los científicos y técnicos apenas comienza a familiarizarse con ella. En México, además de continuar trabajando en los temas mencionados, sería interesante, e importante, incursionar en el desarrollo de modelos macroeconómicos fraccionarios para tratar de predecir con más precisión los efectos que podrían tener las distintas propuestas en política económica.