Dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales en la educación secundaria*

*Néstor Mario Castaño Arbeláez***
*Ligia Inés García Castro****

Recibido: 25 de julio 2014
Aprobado: 15 de noviembre de 2014

Para citar este artículo | To cite this article | Pour citer cet article
Castaño–Arbeláez, N. M., García-Castro, L. I. (2014). Dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales en la educación secundaria. *Magistro*, 8(16), 123-158.

Resumen

En esta investigación se determinan las dificultades que se le presentan a los docentes de educación básica secundaria en el área de matemáticas, más específicamente en la enseñanza de los números racionales y sus operaciones básicas. El estudio es de tipo mixto, pero con un enfoque dominante o principal, con tendencia a lo cualitativo, además, es de corte descriptivo. Se sustentó teóricamente en Polya (1945), Ausubel (1963), Brousseau (1976), Kieren (1980), Duval (1993), Freudenthal (1994), Porlán (1997), D'Amore (2004), Creswell (2005), Posada & Villa (2007), Fandiño (2009), et al. Se aplicó primero un cuestionario con diez preguntas cerradas

* Artículo de investigación. Desarrollado en el marco de la Maestría en Enseñanza de la Ciencias, Universidad Autónoma de Manizales.
** Estudiante de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias, Universidad Autónoma de Manizales. Contacto: nesmarcas@gmail.com
*** Estudiante de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias, Universidad Autónoma de Manizales. Contacto: ligiaines.garcia@gmail.com

cuyas respuestas se ubican en una escala Likert, las cuales fueron analizadas con el paquete estadístico SPSS, cada una de estas preguntas tenía su respectiva argumentación, las cuales se analizaron con el software cualitativo Atlas.ti; luego se aplicó un taller con una pregunta abierta y cinco problemas, los instrumentos se validaron con una prueba piloto, realizada en una escuela normal, después de su validación se aplicaron en 24 colegios públicos y privados de la ciudad de Manizales, dirigidos a los docentes de bachillerato del área de matemáticas de todos los grados, 70 docentes participaron en la encuesta y 12 en el taller. Los resultados evidenciaron que los docentes sí poseen ciertas dificultades en la enseñanza de los números racionales con sus operaciones, puesto que como lo mencionan algunos de ellos, carecen de mejores métodos y estrategias de enseñanza.

Palabras clave: números racionales, operaciones, dificultades didácticas, dificultades ontológicas, dificultades epistemológicas, subconstructos

Difficulties in teaching operations with rational numbers in secondary education

Abstract

In this research are determined the difficulties for teachers of basic secondary education in the area of mathematics, more specifically in teaching rational numbers and their basic operations. The study is of mixed type, but with a dominant or main approach, with qualitative tendency, also, descriptive cut. It is theoretically based on Polya (1945), Ausubel (1963), Brousseau (1976), Kieren (1980), Duval (1993), Freudenthal (1994), Porlán (1997), D'Amore (2004), Creswell (2005), Posada & Villa (2007), Fandiño (2009), et al. First a questionnaire with ten closed questions was applied whose answers were placed in a Likert scale, which were analyzed with the SPSS statistical package, each one of these answers had their respective arguments, which were analyzed with the Atlas.ti qualitative software; then a workshop with one open question and five problems was applied, the instruments were validated with a pilot test, performed at a normal school, after its validation they were applied in 24 private and public schools in the city of Manizales, addressed to high school teachers in the areas of mathematics of every grade, 70 teachers participated in the survey and 12 in the workshop. The results showed that teachers do have certain difficulties in teaching rational numbers in their operations, since as some of them mention, they lack the best teaching methods and strategies.

Keywords: Rational numbers, operations, didactic difficulties, ontological difficulties, epistemological difficulties, sub-constructs

Difficultés dans l'enseignement des opérations de nombres rationnels dans l'éducation secondaire

Résumé

Au cours de cette recherche, on identifie les difficultés qui se présentent aux enseignants de l'éducation basique secondaire, en matière de mathématiques, plus spécifiquement dans l'enseignement des nombres rationnels et ses opérations basiques. L'étude est de tipe mixte, mais avec une approche dominante ou principale, de tendance qualitative, et en outre d'inspiration descriptive. Elle s'est appuyée théoriquement sur Polya (1945), Ausubel (1963) Brousseau (1976), Kieren (1980), Duval (1933), Freudenthal (1944) Porlan (1997), D'Amore(2 004), Creswell (2005), Posada &Villa (2007), Fandiño (2009), et al. Un questionnaire de dix questions fermées, et dont les réponses se déterminent à l'échelle Likert, a été appliqué, lesquelles ont été analysées avec le module de statistiques SPSS. Chaque question avait sa propre argumentation, lesquelles ont été analysées avec le software qualitatif Atlas.ti ; Ensuite un atelier avec une réponse ouverte et cinq problèmes a été mis en place, les instruments ont été validés par une preuve pilote, réalisée dans une école traditionnelle, suite à sa validation, on l'a appliqué sur 24 écoles publiques et privés de la ville de Manizales, dirigés aux enseignants de secondaire dans le domaine des mathématiques de toutes les années, 70 enseignants participèrent au sondage et 12 à l'atelier. Les résultats ont mis en évidence que les enseignants ont des difficultés dans l'enseignement des nombres rationnels et leurs opérations, dès lors que certains d'entre eux ont fait part de leur carence de méthodes et stratégies d'enseignement plus performantes.

Mots-clés: Nombres rationnels, opérations, difficultés didactiques, difficultés ontologiques, difficultés épistémologiques, concepts dérivées des constructions principales

1. Introducción

En la matemática, se han propuesto varios sistemas numéricos, entre los cuales hay uno que presenta cierta dificultad para el aprendizaje y también para su enseñanza. Este sistema es el de los números racionales, al cual se le han dedicado numerosas investigaciones y se han escrito varios libros. De todas formas, la mayoría de investigaciones se han enfocado en el aprendizaje y muy pocas a la enseñanza, pues se suele culpar al estudiante por el fracaso en la asimilación de este tema. Los principales antecedentes de investigaciones recientes en que se basó este estudio, referencian a Fernández & Llinares (2010), Flores & Martínez (2009), Ruíz & Valdemoros (2006, 2008), et al. En vista de todo lo anterior, en esta investigación se pretende indagar y, por consiguiente, determinar cuáles son las dificultades que presentan los docentes en la enseñanza de los números racionales con sus operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división), para lograrlo, se aplicaron dos instrumentos (cuestionario y taller) para la recolección de la información, al cuestionario se le realizó un análisis cuantitativo utilizando para ello un software estadístico (SPSS), luego se le hizo un análisis cualitativo, usando otro software, Atlas.ti, al taller también se le llevó a cabo un análisis cualitativo, empleando la misma herramienta informática, para este segundo instrumento no se facilitó realizar un análisis estadístico.

2. Materiales y métodos

2.1 Diseño y metodología

Es un estudio mixto, Creswell (2005), define cuatro tipos de diseños de los métodos mixtos según sus intenciones: los procedimientos, las variantes comunes a los tipos de estudio que se combinan, las fortalezas de cada uno y los retos que enfrentan. Uno de los diseños corresponde a la triangulación, cuyo propósito es combinar las fortalezas de las metodologías para obtener datos complementarios sobre un mismo problema de investigación, a partir de la comparación y la contrastación de los datos.

En la presente investigación, el diseño es recurrente, puesto que se hace una aplicación secuencial de un diseño cuantitativo y uno cualitativo que se aplican independientemente, pero cuyos resultados se complementan (Creswell, 1998), pues con ellos se pretenden identificar las dificultades que manifiestan los docentes para la enseñanza de las operaciones con números racionales.

La investigación tendría un enfoque dominante o principal, con tendencia a lo cualitativo. Además, se consideran los aspectos metodológicos en la revisión de antecedentes, donde se observa que el tema de investigación ha sido poco estudiado, pues la mayoría de estudios han apuntado al aprendizaje de los números racionales y son escasos los que dirigen sus indagaciones a la enseñanza. Esta escasez hace que la investigación tenga un carácter exploratorio. También se pretende reconocer en los docentes las formas didácticas que emplean en la enseñanza de los números racionales, lo cual le da un carácter descriptivo.

2.2 Procedimiento e instrumentos

En primera instancia se hace una recolección de datos cuantitativos, empleando como primer instrumento de recolección de información un cuestionario con preguntas cerradas, cuyas respuestas se ubican en una escala Likert con alternativas de respuesta: no sabe o no responde, nunca, raras o pocas veces, algunas veces, muchas veces o frecuentemente y siempre. Las cuales se analizaron utilizando el SPSS, un software o paquete estadístico. El número total de casos a considerar son 70, en cada uno de ellos se utilizaron 19 variables, diez corresponden a las preguntas, las otras nueve variables tienen que ver con información básica y personal del docente (profesión, experiencia docente, entre otras). El alcance de este primer ejercicio estadístico es descriptivo a partir de la frecuencia de aparición de las respuestas.

Algunos de los datos obtenidos en el cuestionario tales como argumentos o justificaciones a las respuestas ubicadas en la escala Likert, fueron analizadas en la fase cualitativa del estudio. Tanto el análisis de estas respuestas como los datos obtenidos a partir de la posterior aplicación de un taller, fueron analizados con el apoyo del software cualitativo Atlas.ti.

El segundo instrumento fue un taller, compuesto de dos tipos de ítems, el primero de ellos pedía: "Narre alguna experiencia que haya tenido en la enseñanza de los números racionales. Escriba paso a paso las actividades realizadas y los logros obtenidos por los estudiantes", y el segundo punto: "En cada una de las siguientes situaciones problema propuestas, responda las siguientes preguntas: ¿Para qué me serviría este ejercicio con mis estudiantes? ¿Qué conceptos relacionados con los números racionales estaría enseñando? ¿Cómo les enseñaría a resolver esta situación?". En este último ítem, se propusieron cinco problemas diferentes, cada uno de ellos hace referencia a un subconstructo de los números racionales (parte-todo, medida, operador, cociente y razón), según la definición de Kieren (1976).

Este diseño integra los resultados de los dos métodos en la fase de interpretación, dando lugar a las categorías emergentes que permiten responder a la pregunta de investigación, para posteriormente hacer contrastación de ellas hasta llegar a los hallazgos finales.

2.3 Participantes y sector objeto de estudio

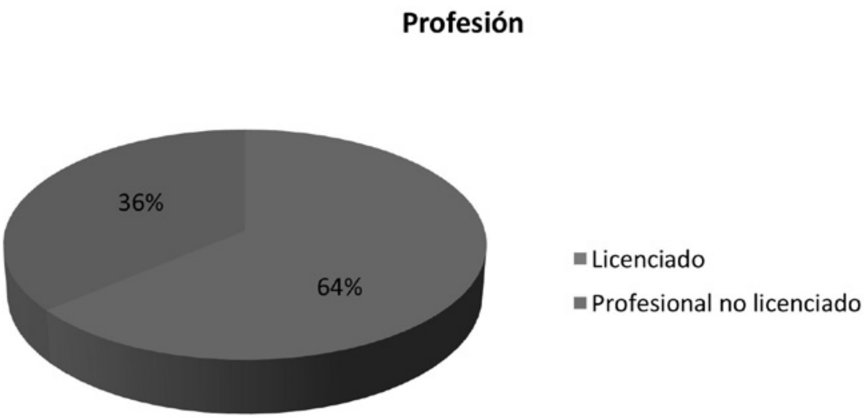
Los instrumentos para la recolección de los datos (cuestionario y taller), fueron trabajados con docentes de bachillerato del área de matemáticas de todos los grados, en 24 colegios de la ciudad de Manizales, 70 docentes participaron en la encuesta y 12 en el taller, los cuales fueron clasificados en licenciados y profesionales no licenciados. Estos últimos tienen una profesión diferente (ingenieros, economistas, etc.). La muestra es de maestros y maestras y los participantes cuentan con una experiencia docente de 1 y 40 años. Entre los colegios en los que se realizaron las indagaciones hay públicos y privados. Algunos son solo de varones, otros son femeninos y otros mixtos. La cantidad promedio de estudiantes por salón es de 35.

Es importante tomar en consideración que el número de docentes licenciados y los no licenciados no es igual, como se muestra en la tabla y la figura siguiente:

Tabla 1. Profesión.

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	Licenciado	44	62,9	63,8	63,8
	Profesional no licenciado	25	35,7	36,2	100,0
	Total	69	98,6	100,0	
Perdidos	Sistema	1	1,4		
Total		70	100,0		

Figura 1. Profesión.

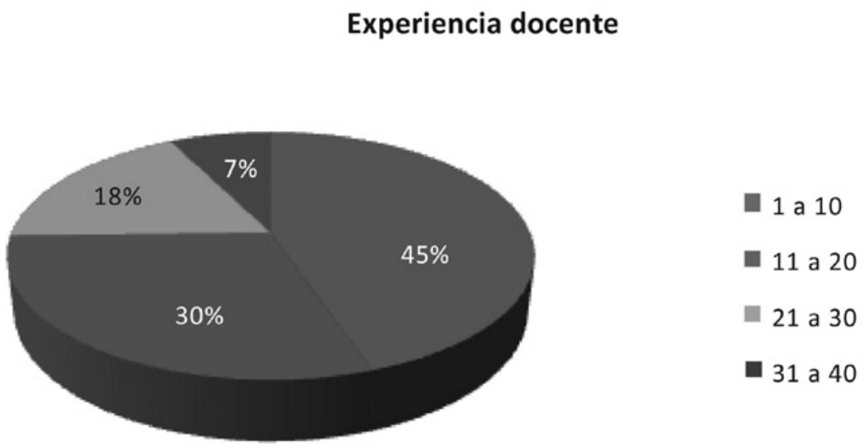


Por otro lado, la experiencia docente se considera conjuntamente para los docentes licenciados y los profesionales no licenciados, y oscila entre 1 y 40 años. Se agrupa en intervalos de la siguiente manera:

Tabla 2. Experiencia docente en matemáticas en años.

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	1 a 10	30	42,9	44,8	44,8
	11 a 20	20	28,6	29,9	74,6
	21 a 30	12	17,1	17,9	92,5
	31 a 40	5	7,1	7,5	100,0
	Total	67	95,7	100,0	
Perdidos	Sistema	3	4,3		
Total		70	100,0		

Figura 2. Experiencia docente en matemáticas en años.



3. Resultados

En las preguntas del cuestionario, se tomaron en consideración a los docentes sin discriminar edad, profesión o experiencia laboral, con el fin de evitar posibles sesgos al comparar variables demasiado heterogéneas. Además, la cantidad de docentes licenciados difiere de los profesionales no licenciados. Lo mismo ocurre con las demás variables (edad, experiencia laboral), lo cual aumenta el sesgo.

Al considerar las preguntas en su orden, se observa que la mayoría de los docentes (81,4 %) consideran que algunas veces (41,4 %) y muchas veces o frecuentemente (40 %), la enseñanza de los números racionales es de difícil comprensión para los estudiantes, lo que es más o menos igual para ambas opciones. Algunas veces (31,4 %) y muchas veces (45,7 %), con mayor tendencia en esta última, los docentes usan de alguna estrategia especial cuando enseñan los números racionales y sus operaciones.

Respecto a las dificultades de comprensión de los estudiantes en el aprendizaje de los números racionales y sus operaciones, más de la mitad de los docentes (67,1 %) se inclinan por las opciones de muchas veces (30 %) y siempre (37,1 %), con preferencia por la última. También se observa una muy marcada predilección por la opción siempre (68,6 %) respecto a la preparación de las clases de matemáticas y especialmente lo relacionado con los números racionales.

Como en el caso anterior, la mayoría de los docentes (72,9 %) siempre se preocupan por cambiar de estrategia con el fin de obtener una mejor comprensión, cuando los estudiantes les dicen que no entienden las operaciones con los números racionales.

En su gran mayoría (70 %), los docentes siempre son pacientes y comprensivos cuando los estudiantes no comprenden las operaciones con los números racionales, con una tendencia menor hacia la opción de muchas veces (24,3 %). De igual modo, siempre (75,7 %) son abiertos a las sugerencias o recomendaciones hechas por amigos y compañeros docentes, y las aceptan y toman en cuenta para mejorar en la enseñanza de los números racionales con sus operaciones, similar comportamiento se presenta cuando las sugerencias o recomendaciones son hechas por los mismos estudiantes, pero en una proporción solo ligeramente menor (68,6 %).

A la mayoría de docentes (82,9 %), nunca les molesta que un estudiante les corrija o les haga caer en la cuenta de algún error cometido en la enseñanza de los números racionales. A menos de la mitad de los docentes consultados (47,1 %) nunca les parece difícil explicar temas como el de los números racionales, mientras que algo más de un cuarto de ellos (27,1 %) solo algunas veces les parece complicado.

Si se toman todas las respuestas en su conjunto, se puede observar que la tendencia es favorable, puesto que es muy escaso el porcentaje que indica un comportamiento desfavorable de los docentes hacia los estudiantes o hacia la enseñanza de los números racionales, lo que hace pensar que las cosas marchan bien, lo cual sería alentador si reflejara la realidad completa, por lo tanto, es necesario un análisis complementario exhaustivo, que pueda indicar el verdadero estado de la situación, lo cual se buscó mediante el taller.

Tal como se expresó en la metodología del estudio, se aplicaron dos técnicas cualitativas y de cada una de ellas se hizo un primer análisis categorías, de tal manera que posteriormente se pudieran contrastar las categorías entre el taller y la entrevista.

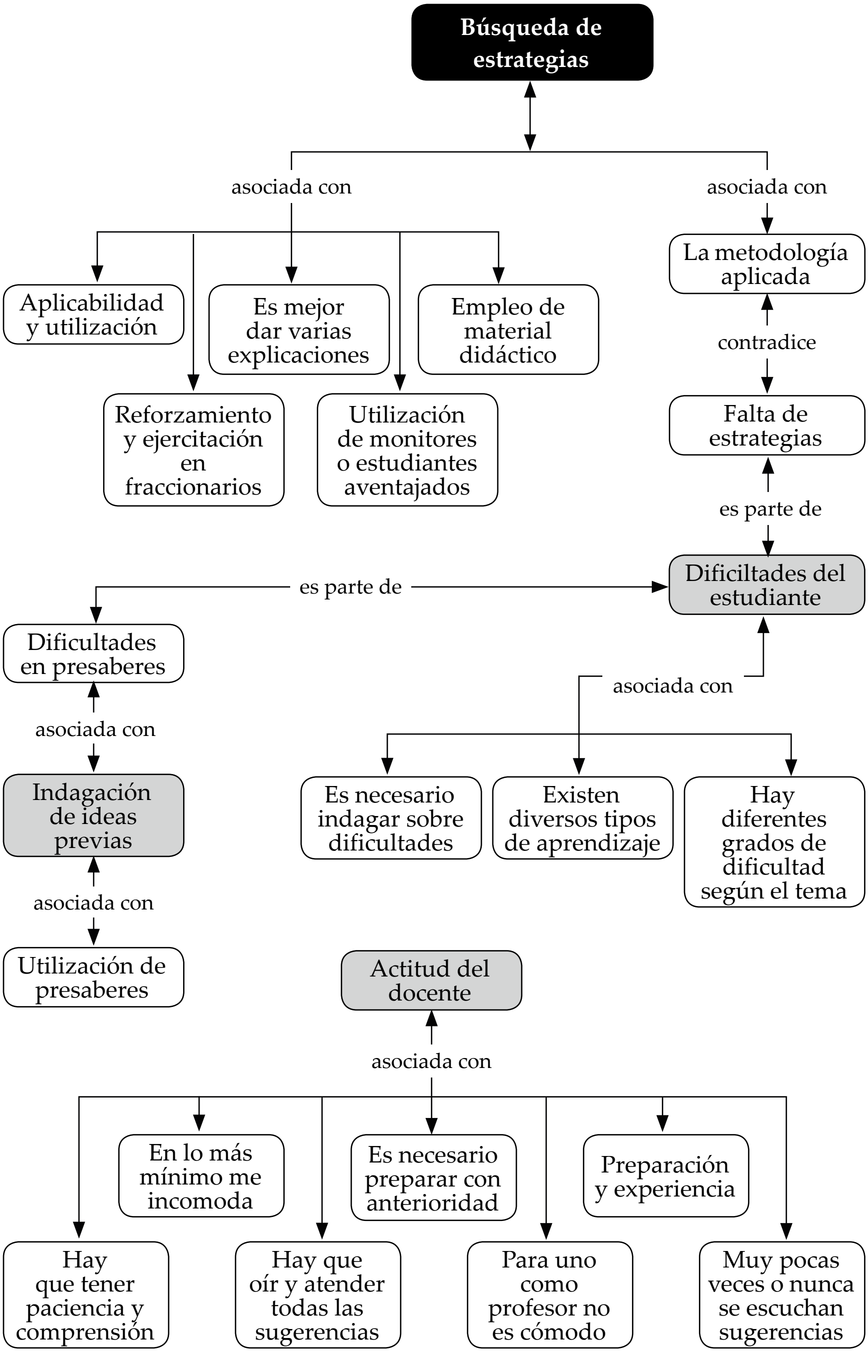
El taller dio como resultado 23 categorías emergentes, de las cuales, las tres categorías que tuvieron una mayor frecuencia fueron: Búsqueda de estrategias, Dificultades de estudiante y Actitud del docente. En la página siguiente, se observa la respectiva red con sus relaciones.

Retomando lo que dice Brousseau (1998), en las categorías emergentes se pueden evidenciar tres tipos de dificultades: didácticas, ontológicas y epistemológicas.

3.1 Dificultades didácticas

Entre las principales estrategias utilizadas por los docentes, se destacan la utilización de monitores o estudiantes aventajados, el empleo de material didáctico, la aplicabilidad y la utilización en el entorno, la ejercitación en fraccionarios, la búsqueda de varias explicaciones y el uso de diferentes metodologías.

Algunos de los relatos de los docentes sobre la búsqueda de estrategias, son los siguientes:


Búsqueda de estrategias
asociada con
asociada con
Aplicabilidad y utilización
Es mejor dar varias explicaciones
Empleo de material didáctico
Reforzamiento y ejercitación en fraccionarios
Utilización de monitores o estudiantes aventajados
La metodología aplicada
contradice
Falta de estrategias
es parte de
Dificiltades del estudiante
es parte de
Dificultades en presaberes
asociada con
Indagación de ideas previas
asociada con
Utilización de presaberes
asociada con
Es necesario indagar sobre dificultades
Existen diversos tipos de aprendizaje
Hay diferentes grados de dificultad según el tema
Actitud del docente
asociada con
En lo más mínimo me incomoda
Es necesario preparar con anterioridad
Preparación y experiencia
Hay que tener paciencia y comprensión
Hay que oír y atender todas las sugerencias
Para uno como profesor no es cómodo
Muy pocas veces o nunca se escuchan sugerencias

Respecto a la utilización de monitores o estudiantes aventajados, uno de los docentes dice: "Sí, trabajo con monitores, con los alumnos que más entiendan o busco otras estrategias" (docente participante). Esto se hace porque los estudiantes se entienden mejor entre ellos mismos, usan un lenguaje particular y peculiar que muchas veces no es compartido con los docentes.

En la teoría de la "Zona de Desarrollo Próximo", Vygotsky (1989) define este concepto de la siguiente manera:

> La Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) es la distancia en el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más eficaz (1989, p. 133).

Vygotsky considera que la ZDP define las funciones que todavía no han madurado, pero que están en proceso de maduración y que al alcanzar su desarrollo pleno, se llega al nivel óptimo de desarrollo.

Al respecto, otro de los docentes dice: "Para las operaciones, es mejor emplear el lenguaje del estudiante; por ejemplo, numerador 'arriba', denominador 'abajo', luego emplear la mímica o expresión corporal, 'movimiento de los brazos'" (docente participante).

De acuerdo con Chevallard (citado en Gómez, 2005):

> Un contenido del saber sabio que haya sido designado como saber a enseñar sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que un objeto de saber a enseñar hace para transformarlo en un objeto de enseñanza se llama transposición didáctica.

En esta forma, Chevallard busca un equilibrio en la relación ternaria que hay entre docente, alumno y el saber matemático, lo cual conforma un sistema didáctico.

El "empleo de material didáctico" es clave para muchos docentes, uno de ellos dice: "Busco nuevos ejemplos y nuevas formas de presentarlos (real, gráfica, videos)" (docente participante). Otro agrega: "El diseño de diapositivas en PowerPoint con los temas a enseñar me ha reportado ganancias significativas en el proceso" (docente participante). En este caso, es significativo el uso de la tecnología como material didáctico, puesto que los jóvenes pertenecen a una generación llamada "generación digital", por lo cual conviene utilizar el computador como herramienta de enseñanza para las matemáticas, y usar un software educativo (JClic, MicroMundos Pro, GeoGebra, et al.), Monereo, et al. (2002) dicen que:

> Si examinamos detenidamente toda la potencialidad de las aplicaciones edumáticas, no las podemos considerar "un recurso educativo más"; el ordenador, como señala Martí (1992), es un meta-medio porque puede expresar, manipular y combinar cualquier tipo de símbolo utilizado por otros medios (lingüísticos, icónicos, sonoros, matemáticos, cinéticos, etc.). Esta característica le confiere un conjunto de propiedades peculiares altamente aprovechables en contextos educativos y muy especialmente en el ámbito de la enseñanza de estrategias de aprendizaje (2002, pp. 309-310).

El empleo del computador puede ser útil para potenciar las estrategias didácticas del docente, pero sin caer en el riesgo de mecanizar las tareas, puesto que de esa manera se relegan a un segundo plano los procesos cognitivos del estudiante, porque, si el estudiante se limita a alimentar el computador con datos y esperar las respuestas del aparato, ya no es necesario pensar en lo que la máquina está haciendo, y se limita a obtener resultados.

El uso de la tecnología, como el computador, que es una poderosa herramienta de trabajo y de enseñanza, no debe circunscribir a un único uso, como el manejo de aplicaciones o software educativos, o para hacer las tareas con ayuda de los buscadores de internet, lo cual es muy útil, pero se deja de lado la comprensión de los procesos. Además, es preciso valorar la computadora, en conjunto con internet, para el trabajo cooperativo en el salón de clases y fuera de las aulas. A este respecto, Monereo, et al.

(2002) mencionan como principales características del trabajo cooperativo las que:

> …hacen referencia al uso estratégico de los procedimientos de aprendizaje, que facilitan la discusión, entre los alumnos y con el profesor, sobre la naturaleza del aprendizaje y las actividades académicas. También permite negociar las propias opiniones y poner énfasis en los aspectos metacognitivos, favoreciendo la reflexión y la autoevaluación (2002, p. 102).

Johnson & Johnson (citados en Monereo, et al., 2002), consideran cuatro principios en los que se basa el trabajo en grupos cooperativos, que son los siguientes:

1. Favorecer una interdependencia positiva entre los miembros de un grupo.

2. Durante la realización del trabajo, el profesor tendrá que ofrecer retroalimentación, tanto grupal como individualmente.

3. Se espera que cada miembro del grupo lleve a cabo el trabajo asignado y colabore con los compañeros cuando lo necesiten.

4. Es necesario que los grupos tengan tiempo de discutir si el trabajo que está efectuando cada miembro del grupo se complementa con el de los otros y si se están alcanzando los objetivos propuestos.

Es evidente que se deben buscar alternativas que permitan superar una educación tradicionalista que no propicia el uso de recursos novedosos, tal como lo menciona Gómez (2002):

> Existen diversos factores que se oponen a la enseñanza tradicional, entre los que podemos destacar dos: la rápida evolución del conocimiento y de la técnica y a su vez la rápida obsolescencia de las mismas –que reducen la utilidad de los contenidos en favor de la capacidad de renovación– y el desarrollo de las comunicaciones y

> los ordenadores que posibilitan nuevas formas de aprendizaje y comunicación o interacción entre el profesor y el alumno (2002, p. 27).

La "aplicabilidad y utilización en el entorno" es primordial para algunos docentes, como se observa en el siguiente relato: "Falta fundamentación y relación con la cotidianidad e interacción lúdica para inducir y afianzar el conocimiento" (docente participante), otro sostiene que:

> La mejor manera es la cotidianidad y la demostración enseñar con ejemplos de la vida diaria, en cuanto a esta estrategia didáctica es esencial en el sentido de que el estudiante se puede encontrar mucho más motivado e interesado por aprender, puesto que muchos de ellos le preguntan al profesor, "¿y eso para qué me sirve en la vida? (docente participante).

El profesor muchas veces no sabe responder esa pregunta. A este respecto, Monereo, et al. (2002) piensan que:

> La utilidad de la matemática se manifiesta a través de su dilatado ámbito de aplicación (trabajo, vida doméstica, comercio, etc.) y, también, porque se puede considerar que esta disciplina está en el fundamento mismo del desarrollo científico y esto no sucede de manera tan constitutiva, por ejemplo, en otros saberes culturales. Por otro lado, su concisión y universalidad vienen dadas porque la matemática se convierte en un poderoso medio de comunicación sin ambigüedades que hace que trascienda las fronteras de la diversidad idiomática, unificando las posibles distintas formas de expresión con el uso compartido de notación simbólica (2002, p. 219).

En este sentido, la modelización matemática no se aborda en el aula de clase de forma comprensiva y accesible a los estudiantes, y es precisamente de la cotidianidad de donde provienen las fórmulas que el profesor escribe en el tablero. Por ejemplo, Eratóstenes, en el siglo III a. C., pudo calcular la circunferencia de la Tierra utilizando el ángulo de la sombra producida por la torre de Sienna y la distancia de esta a la ciudad de Alejandría. Este es uno de los innumerables ejemplos que se pueden encontrar en la historia de la matemática, y corresponde a un problema práctico de la vida de los griegos. Hay muchas definiciones de modelación en matemáticas, entre las cuales podemos encontrar las de Giordano, Weir, Fox, Biembengut, Hein (citados por Villa, 2007) pero únicamente interesa aquí desde el punto de vista didáctico. Según Bassanezi (citado en Posada & Villa, 2006), "un modelo matemático es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación".

En el *reforzamiento* y la *ejercitación* en fraccionarios, para algunos docentes es necesario utilizar este tipo de estrategia con el fin de que los estudiantes puedan afianzar el conocimiento. Al respecto, uno de ellos dice que "se debe reforzar continuamente en las clases y ejercitarlos, más que todo la lógica de los fraccionarios en estudiantes mayores" (docente participante). Otro comenta que se necesita la "ejercitación a partir de situaciones y problemas" (docente participante). Además de lo mencionado por los maestros, conviene considerar las actividades lúdicas como una forma de ejercitación de las operaciones con números racionales. Al respecto, se puede hacer una distinción entre ejercicios y problemas o situaciones problemáticas, que se confunden como si fueran sinónimos. Como mencionan Monereo, et al. (2002), son cuestiones o conceptos con algunas diferencias entre ellos:

> Concretamente, siguiendo autores como Schoenfeld (1988) y posteriormente, entre otros, Alfieri (1993) o Pozo y cols. (1994), recordamos que un problema, a diferencia de un ejercicio, es una situación que precisa de una solución pero que, generalmente, no tiene un camino de solución rápido y directo, sino que se debe ir haciendo una toma de decisiones (y, por tanto, modificando y comprobando) a lo largo de la propia resolución. De esta manera, se infiere que lo que puede ser un problema para un alumno, puede no serlo para otro, situación que diversifica claramente el panorama escolar (2002, p. 221).

Los docentes suelen asignar a los estudiantes ejercicios que confunden con problemas, pero esos "problemas", que en realidad son ejercicios, son simplemente planteamientos que se resuelven de una forma algorítmica y mecánica, que no requieren que el alumno razone en lo más mínimo.

3.2 Dificultades ontogenéticas

Monereo, et al. (2002), se refieren a dos enfoques respecto a las estrategias de aprendizaje, cuyos pioneros fueron los modelos de procesamiento de la información representados por autores como Danserau, Weinstein y Mayer o Zimmerman y Schunk, (citados en Monereo, et al., 2002), el primer modelo dice que:

> Desde su perspectiva, las estrategias varían según la información sea procesada a un nivel más superficial y fonológico (estrategias de repetición) o más profundo y semántico (estrategias de elaboración y de organización), existiendo, aparte, unas estrategias de apoyo relacionadas con los procesos motivacionales (2002, p. 29).

El otro modelo se enmarca en el "aprendizaje situado o contextualizado", que es un concepto reciente. Liderados por autores como Pressley o Bransford et al. (citados por Monereo, 2002), cuyo modelo se basa en los enfoques socio-culturales defendidos por Vygotsky, Bruner y Rogoff, de acuerdo con el aprendizaje situado "una estrategia es una acción socialmente mediada y mediatizada por instrumentos, como son los procedimientos" (2002, p. 29).

El aprendizaje situado se basa en la teoría de la Zona de Desarrollo Próximo de Vygotsky y en la teoría cognitivista, y se apoya en el "andamiaje" para la construcción del conocimiento, que sostiene que este debe partir de los saberes previos de los estudiantes, en una íntima relación con el entorno.

Algunas de las principales dificultades encontradas por los docentes en los estudiantes están relacionadas con sus presaberes y los diversos tipos de aprendizaje. Hay diferentes grados de dificultad en el aprendizaje, según el tema, y los docentes reconocen que es preciso indagar sobre las dificultades de los estudiantes. Entre los relatos de los docentes, tenemos:

Las dificultades en presaberes son abordadas por algunos docentes: “Todo depende de la predisposición del alumno y del conocimiento sobre las matemáticas que tengan” (docente participante). “Se insiste constantemente en su aprendizaje, pero es notoria la falta de dominio de conceptos de grados inferiores” (docente participante). En este caso, se nota que para muchos docentes los estudiantes deben tener claros muchos conceptos adquiridos con anterioridad, lo que no siempre ocurre.

En el X Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (2009), según Garrido, et al. (2009), se hace mención a los presaberes al decir que “es importante que para el diseño de las situaciones problema se tenga en cuenta los conocimientos previos del estudiante. Para Piaget, estos influyen en la interpretación de ellas”.

Los docentes de secundaria acostumbran responsabilizar a los docentes de primaria de las dificultades que traen los estudiantes. A su vez, los docentes de universidad culpan a los de secundaria y así sucede en todo el ciclo propedéutico.

Entre los relatos respecto a los tipos de aprendizaje, los docentes son conscientes de que: “Depende de cada estudiante, según capacidades pensantes” (docente participante). “Puesto que la población es cambiante y las fortalezas, debilidades y exigencia debe ser acordes a las características del grupo como tal” (docente participante). En este sentido, no todos los estudiantes tienen las mismas capacidades y estilos para aprender, por lo cual, es importante que el docente oriente la clase tomando en cuenta a los estudiantes menos aventajados y aproveche a los más aventajados como monitores. Garrido (2009), continúa la reflexión al respecto diciendo que “las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas pueden ser de diferente naturaleza”, algunas de las cuales, según Socas (citado en Garrido et al., 2009), son “las que tienen que ver con los procesos cognitivos de los estudiantes, estas se refieren al desarrollo intelectual de los estudiantes, de sus capacidades y limitaciones propias de su desarrollo cognitivo”.

Monereo, et al. (2002), se refieren a las capacidades cognitivas que conciben como “un conjunto de disposiciones genéticas que tenemos desde el momento de nacer (y probablemente antes), y que nos permiten ejecutar una serie de conductas muy relacionadas con nuestra supervivencia” (2002, p. 25). El autor dice que los seres humanos nacemos con capacidades parecidas, a excepción de aquellos que pueden presentar alguna deficiencia congénita. Añade que, con el tiempo, se va adquiriendo un conjunto de procedimientos gracias a la interacción con el entorno cultural y sus interlocutores y, a raíz de estos procedimientos, las capacidades se hacen más versátiles y sofisticadas, y pueden evolucionar en habilidades que, a diferencia de las capacidades, pueden ser analizadas conscientemente a través de los procedimientos.

Para algunos docentes, "es necesario indagar sobre las dificultades presentadas por los estudiantes", de modo que "para poder continuar con procesos es necesario indagar sobre dificultades para lograr avances" (docente participante); otro docente opina al respecto: "Pienso que una de las cosas más importantes que uno debe hacer como docente, es la de indagar las fortalezas y debilidades que nuestros alumnos tienen en relación con los números racionales o con cualquier tema relacionado con matemáticas" (docente participante). Aunque muchos docentes se preocupan por indagar las dificultades presentadas por los estudiantes para el aprendizaje de los números racionales, hay muchos que no les interesa averiguar sobre dichas dificultades, ignorando con ello un valioso recurso para su quehacer pedagógico. Abrate, Pochulu & Vargas (2006), hacen referencia a las dificultades de los estudiantes con los números racionales de la siguiente manera:

> Es sabido y manifestado por los profesores de matemáticas, que la operatoria con números racionales origina una serie de dificultades para los alumnos, las que se extienden a lo largo de todos los años del Nivel Medio.
>
> Una de estas dificultades comienza cuando el estudiante se ve enfrentado a que un mismo número admite múltiples representaciones.

Es obvio que esta dificultad radica en la conceptualización misma del número racional, donde muchos de los alumnos aún no tienen un concepto claro de fracción, ni siquiera en un contexto muy concreto (p. 110).

3.3 Dificultades epistemológicas

Respecto al uso de presaberes, los docentes piensan que "en este caso, trato de simplificar un poco más el concepto retomando presaberes para encontrar el vacío o el punto que genera el no entendimiento de la explicación" (docente participante); otro docente expone el proceso que sigue de menor a mayor complejidad:

> En primer lugar, se trabaja con los números naturales, luego con los números enteros. Dominados estos dos sistemas, se puede entrar a los números racionales que es el conjunto numérico que contiene a los anteriores (el concepto de fraccionario y decimal es indispensable).

Con respecto a estas manifestaciones de los docentes, es posible comprender la importancia que le otorgan a los presaberes para lograr un aprendizaje significativo. Según Ausubel (1963), "un aprendizaje es significativo cuando los contenidos son relacionados de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe". En este caso, es preciso partir de los presaberes de los estudiantes, para que no se conviertan en un obstáculo para el aprendizaje. Por otro lado, puede haber cierta dificultad para el estudiante cuando se ven primero los números naturales y luego los enteros, porque muchos de ellos extienden estos conceptos a los racionales, y suman las fracciones como si fueran números enteros.

La indagación de ideas previas es abordada por los docentes cuando sostienen que "debe conocerse previamente el 'nivel' de preconceptos que tienen los estudiantes frente a los números racionales, para diseñar estrategias que les permitan 'desaparecer' las dificultades que traen" (docente participante). "Tanto en el conocimiento de los presaberes que traen los alumnos, como el por qué no entienden, tienen una importancia fundamental, dado que este conjunto numérico abarca todas las operaciones y funcionalidad de los conceptos matemáticos desarrollados en el tiempo" (docente participante). La indagación de ideas previas al igual que el uso de los presaberes, son cuestiones claves y no son tan recientes. Aristóteles (384-322 a. C.) hace mención de ello en su Metafísica (nombre puesto por Andrónico de Rodas en el siglo I a. C. en la primera edición de las obras de Aristóteles) de la siguiente manera:

> El que aprende la geometría tiene necesariamente conocimientos previos, pero nada sabe de antemano de los objetos de la geometría y de lo que se trata de aprender. Las demás ciencias se encuentran en el mismo caso. Por consiguiente, si como se pretende, hay una ciencia de todas las cosas, se abordará esta ciencia sin poseer ningún conocimiento previo. Porque toda ciencia se adquiere con el auxilio de conocimientos previos[1], totales o parciales, ya proceda por vía de demostración, ya por definiciones; porque es preciso conocer antes, y conocer bien, los elementos de la definición (Aristóteles, 1945, p. 45).

Para una definición actual de ideas previas se puede citar a Carretero (citado en Porta, 2007):

> Las concepciones previas no son correctas desde el punto de vista científico. Son específicas de dominio. Suelen ser dependientes de la tarea utilizada para identificarlas/evaluarlas. En general, forman parte del conocimiento implícito del sujeto. Son construcciones personales. Suelen ser guiadas por la percepción, la experiencia y el conocimiento cotidiano del alumno. No todas poseen el mismo nivel de especificidad. Tienen cierto grado de estabilidad. Tienen un grado de coherencia y solidez variable: pueden constituir representaciones difusas y más o menos aisladas o pueden formar parte de un modelo mental explicativo (2007, p. 146).

Para los grados de dificultad de un tema, los docentes piensan que "el tema es sencillo de comprender hasta que se encuentran con la adición y la sustracción" (docente participante), o bien, "Les cuesta expresar los números racionales de diferentes formas y realizar operaciones entre ellos" (docente participante).

Con respecto a la primera observación, a los estudiantes se les dificulta más la adición y la sustracción que la multiplicación y la división, lo que

1 "Toda ciencia, todo conocimiento inteligible, proviene de un conocimiento anterior." Esta proposición fundamental es la primera frase de los *Segundos Analíticos*. Esta es una parte de la obra de Lógica de Aristóteles que está agrupada en un conjunto llamado *Organon*.

ocurre debido a que la suma y la resta de fraccionarios a veces la realizan como si fueran números enteros, o sea; suman numerador con numerador y denominador con denominador.

De acuerdo con un artículo de Garrido, et al. (2009), otra de las dificultades son "las asociadas a la complejidad de las matemáticas, estas se presentan por la utilización de símbolos y signos, y el uso de expresiones verbales, que pueden tener un significado diferente en el lenguaje habitual".

El segundo instrumento fue el taller, en el análisis surgieron dos redes semánticas, la primera con dos categorías y seis subcategorías y la segunda, con tres categorías y trece subcategorías. A continuación, se hace el respectivo análisis de la primera red:

La categoría Estrategias de Enseñanza-Aprendizaje está compuesta por cuatro subcategorías: *Análisis y planteamiento de problemas, Razonamiento, Métodos mecánicos y Utilización de la realidad*. Estas provienen de algunos de los relatos de los docentes:

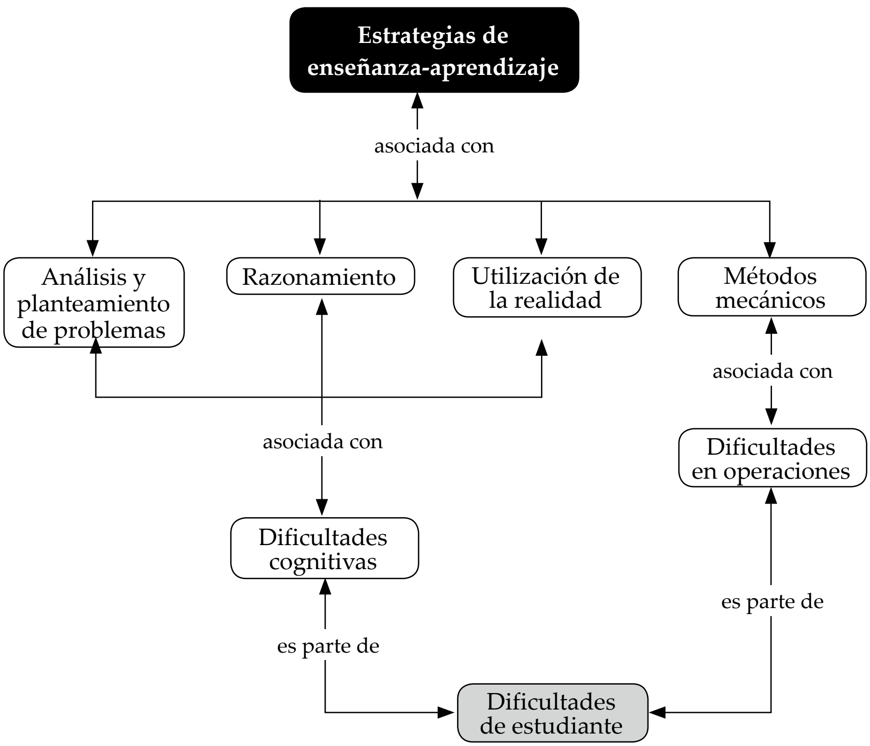
3.4 Dificultad epistemológica

Para la subcategoría *Análisis y planteamiento de problemas*, uno de los docentes dice: "Un lenguaje claro determina procesos analíticos claros" (docente participante), otro dice: "Todos los problemas siempre van a tener la misma finalidad: comprensión de un enunciado, aplicación de una teoría" (docente participante). Un lenguaje claro puede permitir la comprensión del enunciado, para lo cual se precisa una lectura analítica, pues el estudiante puede leerlo sin asimilar una sola palabra. Muchas veces se requiere más de una lectura para comprenderlo, dependiendo de la dificultad del problema. En este sentido, Polya (1945) propone cuatro pasos para resolver un problema:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
3. Ejecutar el plan.
4. Examinar la solución obtenida.

Tanto docentes como estudiantes han aplicado estos pasos de manera intuitiva, sin conocer de antemano la formalización hecha por Polya en 1945.

Respecto a la subcategoría *Razonamiento*, los docentes dicen: "Sirve para afianzar razonamiento lógico y observación" (docente participante). "Desarrollo de habilidades lógicas y de razonamiento, bien sea abstracto, espacial" (docente participante). Se ha pensado que las matemáticas pueden ayudar a desarrollar la lógica y el razonamiento, pero esto depende del tipo de planteamiento matemático, pues autores como Schoenfeld (1988), y posteriormente Alfieri (1993) o Pozo & cols. (1994), distinguen entre ejercicios y problemas. Para ellos, un ejercicio no requiere un proceso de razonamiento complejo, es algo mecánico y algorítmico, mientras que un problema sí requiere ese proceso. Por eso, el docente debe plantear a los estudiantes problemas y no solo ejercicios, y se trata también de ubicarlos en situaciones a-didácticas que, según Brousseau (1986) (citado

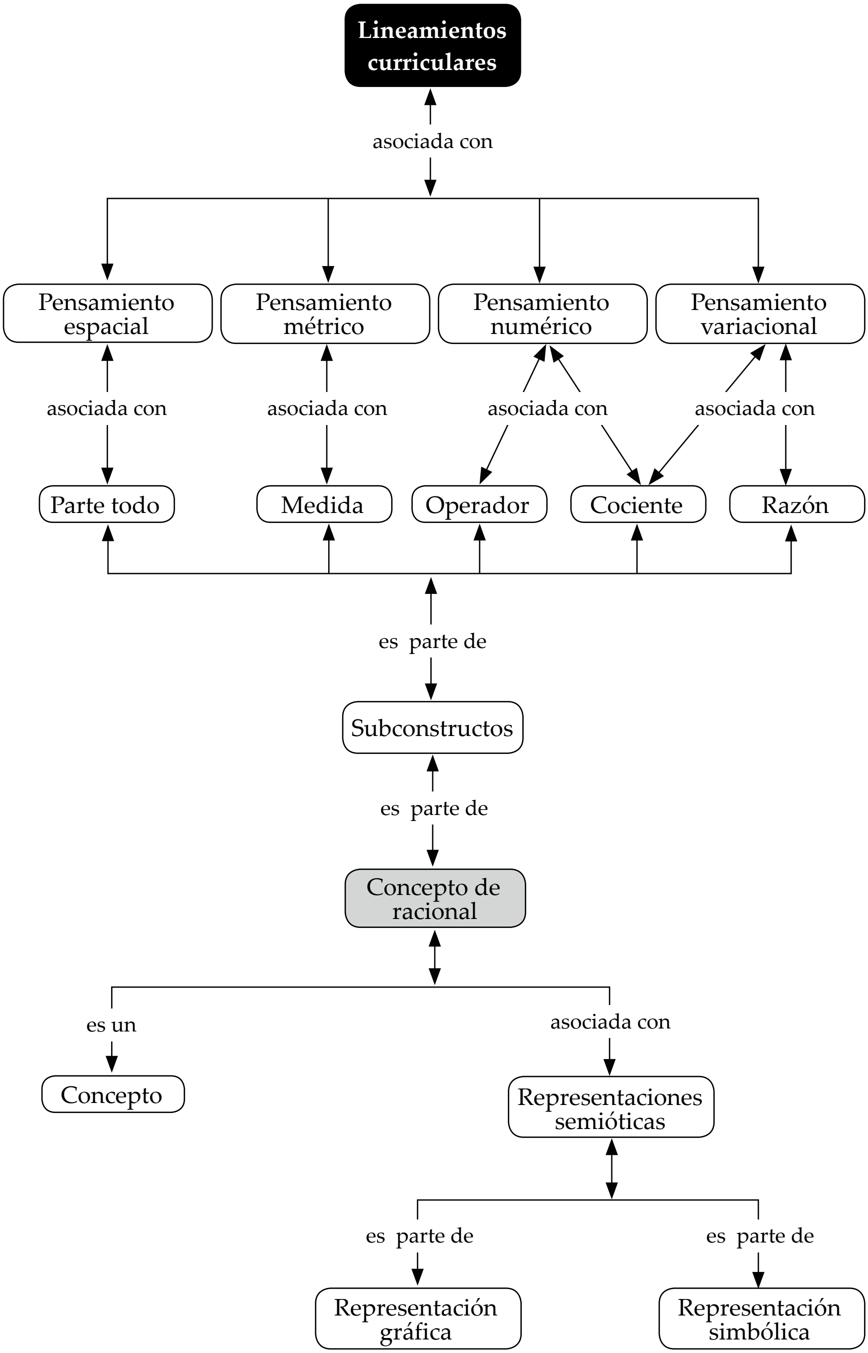


por Fandiño, 2009), son las situaciones en las cuales la intervención del docente es escasa, con un enfoque de tipo constructivista, en el cual el estudiante busca y construye el conocimiento.

La subcategoría *Métodos mecánicos*, contradice la anterior en relación con la característica de los algoritmos y los ejercicios de ser mecanismos que automatizan operaciones. No obstante, sirven para desarrollar la lógica y el razonamiento, siempre y cuando el estudiante los comprenda y no solo que los mecanice, aunque algunos docentes dicen que "el lenguaje matemático y los algoritmos marcan la comprensión y el entendimiento del problema" (docente participante), y también que "algunos programas de computador permiten complementar el trabajo involucrando conceptos asociados" (docente participante). El uso del computador, como el de los algoritmos, puede convertirse en un método mecánico en el que las operaciones se automatizan. Es el computador quien resuelve el problema o el ejercicio y no el estudiante, pues este solo necesita saber manejar la aplicación o el programa de computador. Por supuesto, no se trata de desdeñar un recurso didáctico tan poderoso como es el computador que, si es bien empleado, es una herramienta poderosa de enseñanza y de aprendizaje, pues, según Martí (1992), "el ordenador, es un meta-medio porque puede expresar, manipular y combinar cualquier tipo de símbolo utilizado por otros medios". Y uno de estos medios es el matemático. El autor recalca la potencialidad de las aplicaciones edumáticas en las estrategias de aprendizaje.

3.5 Dificultad didáctica

En la subcategoría *Utilización de la realidad*, los docentes ofrecen algunos relatos como los siguientes: "Comprender desde la realidad el concepto de fracción" (docente participante). "Lograr que cada uno de los estudiantes experimenten con material real" (docente participante). En esta forma, indican que para ellos es importante que los alumnos trabajen los números racionales en relación con la vida cotidiana, pues, de esta forma, pueden motivarse al ver la utilidad inmediata de lo aprendido. Fandiño (2009), hace algunas sugerencias sobre la manera de utilizar las fracciones de una forma espontánea, usando el lenguaje cotidiano y ocasiones reales en que se presenten las fracciones.


Lineamientos curriculares
asociada con
Pensamiento espacial
Pensamiento métrico
Pensamiento numérico
Pensamiento variacional
asociada con
asociada con
asociada con
asociada con
Parte todo
Medida
Operador
Cociente
Razón
es parte de
Subconstructos
es parte de
Concepto de racional
es un
asociada con
Concepto
Representaciones semióticas
es parte de
es parte de
Representación gráfica
Representación simbólica

3.6 Dificultad ontogenética

La categoría *Dificultades del estudiante* se subdivide en dos subcategorías: *Dificultades cognitivas* y *Dificultades en operaciones*, que están relacionadas con las anteriores subcategorías, como se puede observar en la respectiva red semántica. Algunos de los relatos de los profesores son:

"Se presentan muchos casos en los cuales los estudiantes no manejan la parte conceptual y por ende la demostración y terminología" (docente participante). "En la parte de suma y resta con diferente denominador se puede complicar un poco. En la división y producto no se presenta dificultad" (docente participante). A los estudiantes se les dificulta mucho más la suma y la resta con racionales, mientras que el producto y la división no tienen mayores inconvenientes, pues la suma y la resta la hacen de la misma forma que cuando operan con los números naturales o con los enteros. Hay una inercia en este sentido, difícil de cambiar. Como dice Fandiño (2009), en la literatura se observa que los estudiantes tienen dificultad conceptual para realizar operaciones entre fracciones. Más adelante, la autora propone varios ejemplos, como los estudiantes realizan con facilidad las operaciones con racionales que involucran el producto y la división, mientras que en la adición y la sustracción, suman o restan los numeradores entre sí, y los denominadores también. Fandiño (2009), se refiere a la dificultad de los estudiantes en el manejo de los racionales, no como la ausencia de conocimientos, sino como su presencia (obstáculos), de la siguiente forma:

> La investigación en didáctica de la matemática ha evidenciado ampliamente cómo, a la base de los nuevos aprendizajes, hay obstáculos didácticos o epistemológicos que son verdaderos conocimientos, adquiridos previamente en otros campos, que funcionaron bien en estos pero que revelan un fracaso cuando se intenta aplicarlos en nuevas situaciones. La investigación de Fischbein de los años 80 mostró precisamente esto, mientras la teoría de los obstáculos iniciada por Brousseau de los años 70 se impuso en la explicación de este fenómeno; con frecuencia todo está vinculado a problemas de gestión semiótica, como evidenció Duval en los años 80 (2009, p. 147).

A continuación, se considera la segunda red semántica, en la cual se observan tres categorías y trece subcategorías:

La categoría *Representaciones semióticas* se divide en dos subcategorías: *Representación gráfica y Representación simbólica*, para las cuales los profesores ofrecen algunos relatos en la siguiente clasificación:

3.7 Dificultad didáctica

Los docentes piensan que se pueden utilizar "representaciones gráficas con figuras geométricas" (docente participante). Para la "representación de números racionales y sus operaciones" (docente participante). Por lo general, los docentes cuando representan gráficamente una fracción acuden a una pizza, una torta o simplemente a un círculo, o a un cuadrado o un rectángulo, que dividen en partes iguales, lo cual permite elaborar ejemplos con fracciones "egipcias", en las que el numerador es menor que el denominador, y por consiguiente, son fracciones propias. Esto puede confundir al estudiante cuando se encuentra con fracciones impropias, pues puede llevarlos a la *paradoja cognitiva* de Duval (citado por Fandiño, 2009), que dice que el maestro espera que el alumno construya el concepto (noética) a partir de las representaciones semióticas, pero solo si el estudiante conociera de antemano el concepto, sería capaz de reconocer en esas representaciones semióticas el concepto, pero como no lo conoce, únicamente puede ver representaciones semióticas.

Lo anterior deriva en la siguiente categoría con la cual está relacionada, como se puede observar en la red semántica, la categoría Concepto de racional está dividida en dos subcategorías: *Conceptos y Subconstructos*, esta última se subdivide en cinco subcategorías: *Parte todo, Medida, Operador, Cociente y Razón*.

Los cinco subconstructos están relacionados con la categoría *Lineamientos curriculares* a través de sus respectivos pensamientos (espacial, métrico, numérico, variacional y aleatorio). Estos conforman las subcategorías. Estos cinco tipos de pensamientos en los lineamientos curriculares indican que los números racionales solo se tratan en profundidad en el pensamiento numérico, en los demás tipos de pensamientos se mencionan muy poco o simplemente no se mencionan, pero ello no quiere decir que en los demás tipos de pensamiento no se utilicen. Por ejemplo, como se puede observar en la red semántica, el subconstructo *Parte-todo* está relacionado con el pensamiento espacial, pues, por lo general, cuando se divide un todo en partes iguales, siempre se recurre a una figura geométrica, como ya se mencionó antes, o también, el subconstructo *Razón* relacionado con el pensamiento aleatorio, pues la razón es una relación o proporción, en la cual una cantidad puede cambiar aumentando o disminuyendo guardando una proporcionalidad directa o inversa con respecto a la otra. Conviene aclarar que en el análisis con Atlas.ti, el pensamiento aleatorio no surgió como una categoría, como era de esperarse.

Con respecto a la enseñanza del número racional, Obando (2003) dice que:

> El trabajo escolar en el número racional inicia con el estudio de las fracciones, a través de estrategias metodológicas y conceptuales centradas en la partición y el conteo, y en la mecanización de reglas y algoritmos; en consecuencia, en el proceso de conceptualización de las fracciones, la medición no es el eje central, ni hay un tratamiento cuidadoso del tipo de magnitud y del tipo de unidad. Estos elementos, como se verá a continuación, son fuente de dificultades en los procesos de conceptualización de los alumnos.
>
> La enseñanza actual enfatiza en actividades de partir y contar, y por tanto, los alumnos centran el proceso de conceptualización en el número natural y no en la fracción como tal. En efecto, al centrar la atención en el número de partes que representa el numerador y el número de partes que representa el denominador –y no en la relación cuantitativa entre las cantidades de magnitud de la parte y el todo–, se piensa la fracción como dos números naturales separados por una rayita (vínculo) y no como una relación cuantitativa entre la parte y el todo (2003, pp. 56-57).

3.8 Dificultad epistemológica

Para la subcategoría *Subconstructos*, algunos relatos de los docentes son: "Una fracción representa una unidad dividida en partes iguales" (docente participante). "Reconocen que un racional no solo representa las partes que se toman de una unidad, sino también de un todo, además representa el cociente entre dos números, al igual que el resultado de una medida" (docente participante). Se observa que los profesores utilizan la noción *Parte-todo*, así el subconstructo sea otro. Entiéndase este, según Kieren (1980), como algo entero que es roto en partes iguales. Para este autor, tres subconstructos (cociente, razón y medida) tienen una estrecha relación con el subconstructo *Parte-todo*, a excepción del subconstructo Operador, que tiene una función multiplicativa. Cabe recordar que estos cinco subconstructos fueron definidos por Kieren en 1980, a partir de siete interpretaciones iniciales para los números racionales.

En la subcategoría *Conceptos*, algunos relatos de los docentes son: "El concepto de fraccionario, fracción, los términos: numerador, denominador" (docente participante). "Se debe aplicar el concepto de número fraccionario" (docente participante). Ya se dijo anteriormente que hay una estrecha relación entre esta categoría y la anterior, como dice Duval: "No hay noética sin semiótica". Además, según Fandiño (2009), tanto el aprendizaje de conceptos como el aprendizaje semiótico son dos de los cinco elementos claves en el aprendizaje matemático, los otros tres son: el aprendizaje de algoritmos, el aprendizaje estratégico y el aprendizaje comunicativo.

Recientemente se ha investigado en las ciencias cognitivas otro tipo de aprendizaje, se trata del aprendizaje perceptivo que, según Carey (2011):

> Durante años, se ha esperado que los estudiantes aprendan primero las reglas –los teoremas, el orden de las operaciones, las leyes de Newton– y después traten de resolver la lista de problemas al final del capítulo.
>
> Sin embargo, una investigación reciente ha arrojado que los verdaderos expertos poseen algo por lo menos tan valioso como un dominio de las reglas: comprensión instantánea del tipo de problema que enfrentan. Como el maestro de ajedrez que "ve" el mejor movimiento, han desarrollado un excelente ojo.
>
> Hoy, un pequeño grupo de científicos cognitivos argumenta que las escuelas y los estudiantes podrían aprovechar mucho más esta

> habilidad, llamada aprendizaje perceptivo. Después de todo, el cerebro es una máquina de reconocimiento de patrones, y cuando se concentra adecuadamente, puede rápidamente profundizar la comprensión de un principio por parte de una persona, sugieren nuevos estudios (2011).

En el mismo artículo, el autor ofrece un ejemplo práctico de la utilización de este tipo de aprendizaje, que se puede aplicar a nuestro caso de interés:

> En un estudio del 2010, varios investigadores hicieron que estudiantes de sexto año, en una escuela pública de Filadelfia, utilizaran un programa de entrenamiento de la percepción para practicar el trabajo con fracciones. En el módulo computacional, una fracción aparecía como un bloque. Los estudiantes usaron una "rebanadora" para cortar ese bloque en fracciones y un "clonador" para copiar esas rebanadas. Usaron estos trozos para construir un bloque nuevo a partir del original para representar fracciones diferentes. En una prueba posterior, con problemas que los estudiantes no habían visto antes, el grupo tuvo un 73 por ciento de aciertos. Un grupo de comparación formado por alumnos de primero de secundaria, a quienes se les había enseñado a resolver dichos problemas como parte de las clases habituales, logró solo un 25 por ciento de aciertos en el examen (2011).

En este ejemplo, aunque se puede observar que el empleo del computador como herramienta para facilitar ese tipo de aprendizaje es útil, lo más importante es la estrategia didáctica que se utiliza para la enseñanza de las fracciones y recalcar los buenos resultados obtenidos.

4. Discusión y conclusiones

De acuerdo con los objetivos específicos, respecto a los cuales se refieren estas conclusiones, y según lo obtenido en la encuesta y en el taller, las dificultades manifestadas por los maestros respecto al aprendizaje del número racional y de las operaciones con los números racionales se refieren a un conocimiento acumulado de conceptos anteriores, puesto que la actividad de clase se organiza en torno a una secuencia de temas que pretende recoger lo que el estudiante debe saber sobre la disciplina.

Para los maestros que piensan que los estudiantes deben tener otros conocimientos antes que los números racionales, consiste en explicar a los estudiantes los contenidos esenciales a la asignatura a partir del seguimiento de los lineamientos y estándares como la organización de contenidos por grado y por campos temáticos.

Se da una tensión entre los programas académicos y las dificultades que presentan los estudiantes para comprender los conceptos matemáticos, debido en gran parte a la planeación rígida de las instituciones educativas y con las que el maestro se compromete a cumplir a cabalidad.

Se observa una visión técnica de la enseñanza (Porlán, 1997), con una hipótesis de causalidad según la cual la enseñanza da lugar al aprendizaje, lo que significa que todo aquello que es bien enseñado ha de ser automáticamente bien aprendido por los estudiantes y si esto no se logra se debe a que los estudiantes presentan dificultades para el aprendizaje.

Con esta visión mecánica de la enseñanza con respecto al aprendizaje, las dificultades para enseñar las operaciones con números racionales, se refieren a las dificultades de aprendizaje de los estudiantes.

El desarrollo de las matemáticas en el transcurso de la historia ha dado cuenta de las múltiples relaciones entre las matemáticas y el mundo real (Posada & Villa, 2007), lo que incluye los números racionales y sus operaciones, entre otras cosas porque es precisamente este conjunto numérico el que más posibilidades reales ofrece de aplicación.

Cuando los docentes exponen, como dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales, el poco acercamiento que puede hacerse de estos conceptos con la vida cotidiana, se debe precisamente a que se parte de los procesos de abstracción antes que de situaciones reales.

La visualización en la didáctica de la matemática ha sido ampliamente discutida y estudiada por los investigadores en la enseñanza de la matemática, lo que no se escapa a la reflexión y al análisis de los maestros en torno a las posibilidades representacionales que ofrece la tecnología para la enseñanza.

Se puede reconocer que, para los maestros, una de las dificultades en la enseñanza de la matemática se refiere a la necesidad de recurrir a representaciones externas para comprender los conceptos matemáticos y, de allí, las posibles representaciones que ofrece la tecnología se convierte en una herramienta mediadora importante.

5. Agradecimientos

Deseo agradecer a todas aquellas personas e instituciones que hicieron posible esta investigación, especialmente al Instituto Universitario de Caldas, por su valiosa colaboración relacionada con la recolección de la información, a la Universidad Autónoma de Manizales, por su apoyo en cuanto a la documentación, también, a la magíster Ligia Inés García Castro, por su tiempo, recomendaciones y valiosas asesorías.

Referencias

Abrate, R. S., Pochulu, M. D. & Vargas, J. M. (2006). *Errores y dificultades en matemáticas. Análisis de causas y sugerencias de trabajo.* Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Álvarez, C. (2010, 22 de octubre). Necesitamos profesores más preparados. *El Espectador*, 21.

Aristóteles. (1969). *Metafísica*. México D.F.: Porrúa.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Creswell, J. W. (1998). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five traditions.* Thousand Oaks. California: Sage Publications, Inc.

D'Amore, B. (2004). *Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución.* Barcelona: Uno.

D'Amore, B., Fandiño, M. I., Marazzani. & Sbaragli. (2008). *La didáctica y la dificultad en matemática*. Trento: Erickson.

Dickson, L. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. México: Trillas.

Escolano, R. & Gairín, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (1), 17-35.

Fandiño, M. I. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos.* Bogotá: Editorial Magisterio.

Fernández, C. & Llinares, S. (2010). Relaciones entre el pensamiento aditivo y multiplicativo en estudiantes de educación primaria. El caso de la construcción de la idea de razón. *Horizontes Educacionales, 15*(1), 11-22.

Flores, R. (2010). *Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria. (Tesis maestría).* México D.F.: Instituto Politécnico Nacional. Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/flores_2010.pdf

Flores, R. & Martínez, G. (2009). *Una construcción de significado de la operatividad de los números fraccionarios.* X Congreso Nacional de Investigación Educativa, área 5: educación y conocimientos disciplinares. Recuperado de http://www.comie.org.mx/congreso/memoria/v10/pdf/area_tematica_05/ponencias/1594-F.pdf

Francis, S. (2005). El conocimiento pedagógico del contenido como categoría de estudio de la formación docente. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación", 5*(2), 1-18.

Freudenthal, H. (1994). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* México D.F.: CINVESTAV-IPN.

Garrido, L., Baquero, A. & Baiz, L. (2009). Interpretación del cambio y la variación a través de situaciones problemas con relaciones funcionales. En *X Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Bogotá: Asociación Colombiana de Matemática Educativa–ASOCOLME.

Garrido, L., Baquero, A. & Baiz, L. (2009). Interpretación del cambio y la variación a través de situaciones problemas con relaciones funcionales. *X Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Bogotá: Asociación Colombiana de Matemática EducativaASOCOLME.

Gil, D., Pessoa, A., Fortuny, J. & Azcárate, C. (2001). *Formación del profesorado de las ciencias y la matemática. Tendencias y experiencias innovadoras.* Madrid: Editorial Popular.

Gómez, M. (2005). La transposición didáctica: Historia de un concepto. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, 1*, 83-115.

Guzmán, R. (2010, 29 de noviembre). Cómo aprenden los profesores. *El Espectador,* 8.

ICFES. (2010). *Resultados de Colombia en TIMSS 2007. Resumen ejecutivo*. Bogotá: Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación.

Kieren, T. (1980). *Recent Research on Number Learning*. Columbus: Eric/Smeac.

Kieren, T. (1980). The rational number constructs. Its elements and mechanisms. En T. K. (Ed.). *Recent research on number learning*, pp. 125-149. Columbus: OH: Eric/Smeac.

Luelmo, M. (2004). Concepciones matemáticas de los docentes de primaria en relación con la fracción como razón y como operador multiplicativo. *Revista del Centro de Investigación.* Universidad La Salle, Distrito Federal 6(22), 83-102.

Meza, A. & Barrios, A. (2010). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones.* 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1174/1/674_Propuesta_Didctica_Asocolme 2010.pdf

Monereo, C., Pérez, M., Miquel, E., Castelló, M., Barberà, E., Gómez, M. et al. (2002). *Estrategias de aprendizaje*. Madrid: Antonio Machado Libros.

Moreno, A. & Flores, P. (2000). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Un acercamiento a los números racionales. En G. y. (Eds.). *IX Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, 211-214. Cádiz: "THALES". U. Cádiz y SAEM THALES.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación Parte-todo. *Revista EMA*, *8*(2), 1-27.

Obregón, I. (2007). *Magia y belleza de las matemáticas y algo de su historia.* Bogotá: Intermedio Editores.

Orduz, R. (2010, 28 de septiembre). Sin calidad en la educación no hay innovación. *El Espectador*, 42.

Perera, P. & Valdemoros, M. (2007). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de Educación Primaria (tesis doctoral)*. México: CINVESTAV.

Polya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas.* México D.F.: Editorial Trillas. Serie de Matemáticas.

Porlán, R. (1997). *Constructivismo y escuela.* Barcelona: Gedisa.

Porta, S. (2007). *Las ideas previas y las situaciones de enseñanza.* Quehacer Educativo. Recuperado de http://www.quehacereducativo.edu.uy/docs/ 14cc07c3_86-028.pdf

Posada, F. & Villa-Ochoa, J. (2006). Razonamiento Algebraico y Modelación Matemática. En G. O. F. Posada, *Pensamiento variacional y razonamiento algebraico, 2*, 127-163. Medellín: Gobernación de Antioquia.

Ruíz, E. & Valdemoros, M. (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, RELIME, 9*(2), 299-324.

Salazar, M., Martinic, S. & Maz, A. (2011). *Diseño de una investigación para identificar los significados de fracción que ponen de manifiesto los profesores de primaria en Chile*. Comité Interamericano de Educación Matemática, CIAEM-XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recuperado de http://cimm.ucr.ar.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/paper/view/2472

Sánchez, Á. (2000). *Diccionario Jeroglíficos Egipcios*. Madrid: Aldebarán Ediciones.

Tamayo, O., Vasco, C., Suárez de la Torre, M., Quiceno, C. & García, L. (2011). *La clase multimodal y la formación y evolución de conceptos científicos a través del uso de tecnologías de la información y la comunicación.* Manizales: Universidad Autónoma de Manizales.

Valdemoros, M. & Ruíz, E. (2008). El caso de Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, RELIME, 11*(1), 127-157.

Vasco, C. (2010). Problemas y retos de la educación por competencias en las matemática de 5° grado (Conferencia). En *Programa de Mejoramiento de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en Barranquilla*. Barranquilla: Universidad del Norte.

Villa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, 63-85.

Vygotsky, L. (1989). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona: Crítica.