

Remuestreo Bootstrap y Jackknife en confiabilidad: Caso Exponencial y Weibull

Bootstrap and Jackknife resampling in reliability: Case Exponential and Weibull

Reamostragem Bootstrap e Jackknife em confiabilidade: Caso Exponencial e Weibull

Fecha de recepción: 15 de septiembre de 2015
Fecha de aprobación: 19 de diciembre de 2015

Javier Ramírez-Montoya*
Ignacio Osuna-Vergara**
Jessica Rojas-Mora***
Stalyn Guerrero-Gómez****

Resumen

Se comparan los métodos de remuestreo Bootstrap-t y Jackknife delete I y delete II, utilizando los estimadores no paramétricos de Kaplan-Meier y Nelson-Aalen, que se utilizan con frecuencia en la práctica, teniendo en cuenta diferentes porcentajes de censura, tamaños de muestra y tiempos de interés. La comparación se realiza vía simulación, mediante el error cuadrático medio.

Palabras clave: *Bootstrap, Jackknife, Función de confiabilidad.*

Abstract

In this paper the resampling methods bootstrap-t, Jackknife delete I and delete II, are compared using the non-parametric estimators Kaplan-Meier and Nelson-Aalen, frequently used in the practice, taking into account different percentages of censorship, sample sizes and times of interest. The comparison is carried out by simulation, using the mean square error.

Keywords: Bootstrap, Jackknife, Reliability Function.

* M.Sc. Universidad de Sucre (Sincelejo-Sucre, Colombia). javier.ramirez@unisucra.edu.co.
** Universidad de Córdoba (Montería-Córdoba, Colombia). iosuna@correo.unicordoba.edu.co.
*** Universidad de Córdoba (Montería-Córdoba, Colombia). jmrojas@correo.unicordoba.edu.co.
**** M.Sc. (c) Universidad Santo Tomás (Bogotá-Distrito Capital, Colombia). stalynguerrero@usantotomas.edu.co.

Resumo

Comparam-se os métodos de reamostragem Bootstrap-t e Jackknife delete I e delete II, utilizando os estimadores não paramétricos de Kaplan-Meier e Nelson-Aalen, que se utilizam com frequência na prática, tendo em conta diferentes porcentagens de censura, tamanhos de amostra e tempos de interesse. A comparação realiza-se via simulação, mediante o erro quadrático médio.

Palavras chave: Bootstrap, Jackknife, Função de confiabilidade.

Cómo citar este artículo:

[1] J. Ramírez-Montoya, I. Osuna-Vergara, J. Rojas-Mora & S. Guerrero-Gómez, “Remuestreo Bootstrap y Jackknife en confiabilidad: Caso Exponencial y Weibull”, Fac. Ing., vol. 25 (41), pp. 55-62, Ene.-Abr. 2015.

I. INTRODUCCIÓN

Cuando en la industria, y en particular en ingeniería, se modela el tiempo de ocurrencia de un evento de interés (tiempo de falla) de un circuito, estructura, componente, etc., uno de los objetivos principales es encontrar la mejor estrategia para estimar la función de confiabilidad o, también llamada, de supervivencia, para lo cual las técnicas de remuestreo son una buena alternativa, debido a sus propiedades asintóticas; sin embargo, teniendo en cuenta las situaciones extremas de porcentajes de censura altos, las estimaciones son afectadas de manera significativa.

Este trabajo presenta la situación en la que los tiempos observados y censurados pueden ajustarse a un modelo de probabilidad conocido de una distribución de Weibull y Exponencial, que en el área de la industria suceden a menudo, debido a las bondades del comportamiento de la función hazard de dichas distribuciones (creciente, decreciente, constante); por lo tanto, el interés se centra en la determinación del método de remuestreo, *bootstrap* o *jackknife delete I y delete II*, que presente los mejores resultados en dichos escenarios. En la actualidad no se encuentran trabajos que comparen simultáneamente en cuanto a Confiabilidad estas estrategias de remuestreo; un trabajo relacionado es el de Arrabal *et al.* [1], pero en otro contexto.

II. FUNCIÓN DE CONFIABILIDAD

Cuando se tienen tiempos de falla, de los cuales $k < n$ son observados, estimar la función de confiabilidad, dada por:

$$S(t) = P(T > t) \quad (1)$$

definida como la probabilidad de que un sistema o componente desarrolle sus funciones bajo condiciones de operación, por un periodo específico de tiempo [5].

Todos los tiempos de falla en confiabilidad no siempre se recogen durante un corto periodo de tiempo, ya que ocurre un fenómeno llamado censura, que hace que solo se tenga información parcial del tiempo de falla, afectando considerablemente la estimación. Existen diferentes tipologías de censura; este trabajo trata el caso de la censura a derecha, representando los experimentos en los que al finalizarlos, a algunas unidades estudiadas no les ocurre el evento de interés.

En caso de desconocimiento distribucional del tiempo de interés, la estimación no paramétrica resulta de mucha ayuda; en este trabajo se utilizan los estimadores:

A. Kaplan-Meier:

$$\hat{S}(t) = \prod_{j:t_j < t}^k \frac{n_j - d_j}{n_j} \quad (2)$$

Donde n_j es el número de individuos en riesgo en t_j , es decir, el número de individuos vivos y no censurados justo antes de t_j . Cualquier individuo con tiempo de censura registrado igual a t_j será incluido en el conjunto de n_j individuos en riesgo en t_j , como individuos que murieron en t_j . Esta convención es razonable, puesto que un individuo censurado en el tiempo t_c falla por evento de interés después de t_c [4].

B. Nelson-Aalen:

Proponen estimar la función de confiabilidad como:

$$\hat{S}(t) = \exp(-\hat{H}(t)) \quad (3)$$

Con

$$\hat{H}(t) = \sum_{j:t_j < t}^k \frac{d_j}{n_j} \quad (4)$$

Denominada función hazard acumulada. Ramírez [8] sugiere utilizar el estimador de Nelson-Aalen en muestras pequeñas.

III. REMUESTREO *BOOTSTRAP* EN CONFIABILIDAD

Usando remuestreo *bootstrap*, propuesto por Efron [2], en los estimadores definidos en (2) y (3) se siguen los siguientes pasos:

1. Dada la muestra de tamaño n , estime $\hat{S}(t_i)$.
2. Genere B remuestras *bootstrap* de tamaño n mediante muestreo con reemplazamiento de la muestra original, asignando a cada tiempo una probabilidad $1/n$ y calcular los correspondientes valores $\hat{S}(t_i)^{*1}, \hat{S}(t_i)^{*2}, \dots, \hat{S}(t_i)^{*B}$ para cada una de las B muestras *bootstrap*.

3. Estimar el error estándar del parámetro estimado $\hat{S}(t_i)$, calculando la desviación estándar de las B réplicas *bootstrap*. Así, obtenemos que el error estándar está dado por:

$$\sigma^*_{S(t_i)} = \sqrt{\frac{\sum_{b=1}^B (S(t_i)^{*b} - \bar{S}(t_i)^*)^2}{B-1}} \quad (5)$$

Donde $\hat{S}(t_i)^*$ corresponde al promedio de la estimación de la función de confiabilidad evaluada en cada tiempo t_i de las muestras *bootstrap*; el procedimiento se realiza con base en el tiempo de interés primer cuartil.

IV. REMUESTREO JACKKNIFE EN CONFIABILIDAD

A. Jackknife Delete - I

Una de las primeras técnicas para obtener los estimadores estadísticos fiables es *Jackknife*. Supongamos que tenemos una muestra $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y un estimador $\hat{\theta} = s(t)$. La técnica *jackknife* se centra en las muestras que dejan de lado una observación a la vez:

$$X_i = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad (6)$$

Para $i=1,2,\dots,n$, estas son llamadas muestras *Jackknife*. La i -ésima muestra *Jackknife* consiste en el conjunto de datos eliminando la i -ésima observación. Sea $\hat{\theta}_{(i)} = s(x_{(i)})$ la i -ésima replicación *Jackknife* de $\hat{\theta}$.

La estimación del error estándar *Jackknife* se define:

$$\widehat{E}_{Jack} = \left[\frac{(n-1)}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{S}(t)_{(i)} - \hat{S}(t)_{(.)})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Donde $\hat{S}(t)_{(.)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{S}(t)_{(i)}$

B. Método Jackknife delete-d

En lugar de dejar una observación a la vez, dejamos de lado las observaciones d ; por lo tanto, el tamaño de *delete-d* muestras *Jackknife* es $(n - d)$.

La expresión de la estimación del error estándar del *jackknife delete-d* es:

$$\left[\frac{(n-d)}{d \binom{n}{d}} \sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_{(z)} - \hat{\theta}_{(.)})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

Donde

$$\hat{\theta}_{(.)} = \frac{1}{\binom{n}{d}} \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_{(z)} \quad (9)$$

es el promedio de las estimaciones de todos los subconjuntos s de tamaño $(n - d)$ sin reemplazo para x_1, x_2, \dots, x_n .

V. ESTUDIO DE SIMULACIÓN

Se generaron muestras artificiales mediante un algoritmo en R, considerando tiempos observados y censurados Exponencial, Weibull y combinaciones, con tiempo de interés el primer; luego, se generaron muestras de tamaño con porcentajes de censura correspondientes al , y finalmente se calculó el de la función de supervivencia con los métodos de remuestreo en el estudio.

Se generaron 200 muestras mediante simulación de Monte Carlo, con 500 remuestras bootstrap. Teniendo en cuenta que los métodos de remuestreo Bootstrap y Jackknife a los estimadores no paramétricos tienen funcionalidades diferentes en el cálculo de estimación de error estándar, la comparación de dichas estrategias mediante simulación se considera la más adecuada en este estudio.

VI. RESULTADOS

Para mostrar la eficiencia que tienen los métodos de remuestreo se presentan inicialmente los resultados de los intervalos de confianza mediante la amplitud y las coberturas reales de simulación. En la situación más extrema, con menor tamaño muestral, utilizando un nivel nominal del 95%.

TABLA I
AMPLITUD DE LOS I.C PRIMER CUARTIL, N=25

| % de censura | Boot.KM | Jack.KM | Jack2.KM | Boot.NA | Jack.NA | Jack2.NA |
|--------------|-----------|-----------|-----------|------------------|-----------|-----------|
| 0 | 0,1753192 | 0,2096854 | 0,1931827 | 0,1687640 | 0,2048649 | 0,188630 |
| 5 | 0,2645543 | 0,294564 | 0,2822439 | 0,2552640 | 0,2882814 | 0,2760016 |
| 10 | 0,3211105 | 0,3449007 | 0,3349442 | 0,3105559 | 0,3382819 | 0,3281966 |
| 20 | 0,3422287 | 0,3637719 | 0,3555481 | 0,3319456 | 0,3573434 | 0,3488726 |
| 35 | 0,3496017 | 0,3703001 | 0,3644397 | 0,3394571 | 0,364055 | 0,3578778 |
| 60 | 0,3554676 | 0,3752485 | 0,3702493 | 0,3458087 | 0,3692161 | 0,3638336 |
| 80 | 0,3571909 | 0,3728129 | 0,3728129 | 0,3475298 | 0,371300 | 0,3664939 |

En la Tabla I se observa que los I.C. mediante remuestreo bootstrap al estimador de Nelson-Aalen resultan ser un poco más precisos que los de las demás estrategias, seguidos de bootstrap al estimador

de Kaplan-Meier; esto indica que los I.C. mediante bootstrap en muestras pequeñas presentan los mejores resultados.

TABLA II
COBERTURA DE LOS I.C PRIMER CUARTIL, N=25

| % de censura | Boot.KM | Jack.KM | Jack2.KM | Boot.NA | Jack.NA | Jack2.NA |
|--------------|----------|---------|-----------|----------|---------|----------|
| 0 | 0,994556 | 0,99976 | 0,9994267 | 0,997116 | 0,99976 | 0,9995 |
| 5 | 0,995658 | 1 | 0,99957 | 0,997816 | 1 | 0,99991 |
| 10 | 0,996834 | 0,99972 | 0,9999967 | 0,998212 | 1 | 1 |
| 20 | 0,998146 | 1 | 1 | 0,999208 | 1 | 1 |
| 35 | 0,999342 | 1 | 0,9999967 | 0,99979 | 1 | 1 |
| 60 | 0,999904 | 1 | 1 | 0,999982 | 1 | 1 |
| 80 | 0,999976 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Por otra parte, es de destacar que, con las estrategias de remuestreo a través de cualquier estimador, las coberturas reales de simulación son mayores a las nominales, debido a la amplitud de los intervalos, sin embargo, teniendo en cuenta los dos criterios simultáneamente se pueden sugerir como intervalos las mejores estrategias de la Tabla I. Finalmente, para tener más objetividad en la escogencia de las mejores estrategias de remuestreo, ya que los intervalos pueden ser sesgados, como este caso en la que la opción utilizada en el argumento de R, type=norm, se recomienda calcular los errores cuadráticos medios como medida general de eficiencia.

Estos comportamientos se presentan de forma similar en tamaños de muestra n = 50 y 100.

Luego, ilustrando los resultados para los errores cuadráticos medios se obtiene lo siguiente:

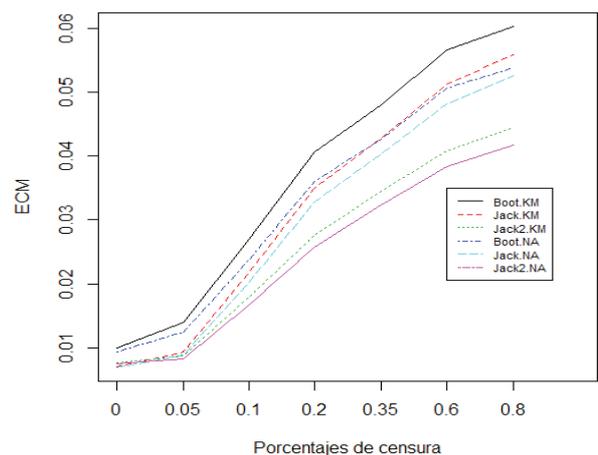


FIG. 1. Error cuadrático Medio, n=25

En la Gráfica 1, cuando se aumentan los porcentajes de censura las estimaciones son considerablemente

afectadas; además, la estrategia de remuestreo Jackknife delete II a través del estimador de Nelson-Aalen presenta mejores resultados, seguida de Jackknife delete II a través del estimador de Kaplan-Meier; esto indica una mejoría en las estimaciones sobre las estrategias comunes usadas en confiabilidad, independientemente del porcentaje de censura.

Por otra parte, se notan unas posibles agrupaciones sobre los resultados de los errores cuadráticos medios, es decir, un grupo de estrategias de remuestreo Bootstrap y otro de estrategias de remuestreo Jackknife.

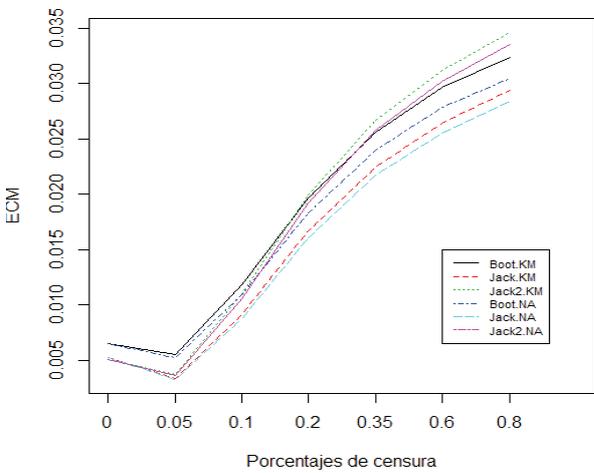


FIG. 2. Error cuadrático medio, n=50

En la Gráfica 2 se observa que cuando se aumenta el tamaño muestral a n=50, se enmarcan de forma más clara las agrupaciones de los resultados de los errores cuadráticos medios, para los casos Bootstrap y Jackknife, siendo los últimos más eficientes.

Para resumir la ilustración de los resultados en cada estrategia de remuestreo, se presentan las Gráficas 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Notando que en las Gráficas 3, 4, 6 y 7 la velocidad de disminución de los errores cuadráticos medios es mayor frente a las Gráficas 5 y 8, lo que confirma que la ganancia en la disminución del error cuadrático medio del método de remuestreo Jackknife frente al método Bootstrap se obtiene en muestras pequeñas.

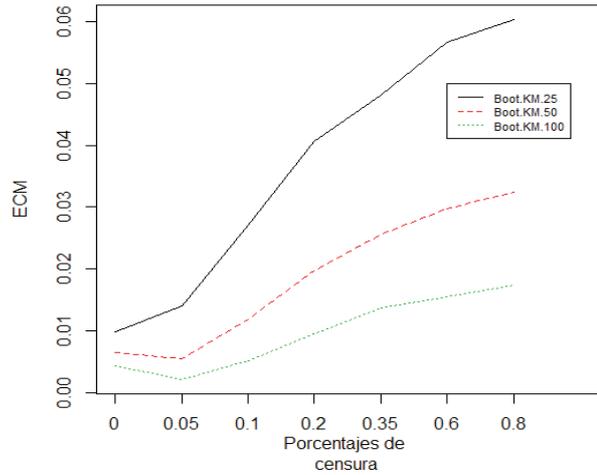


FIG. 3. Error cuadrático medio, n=25, 50,100

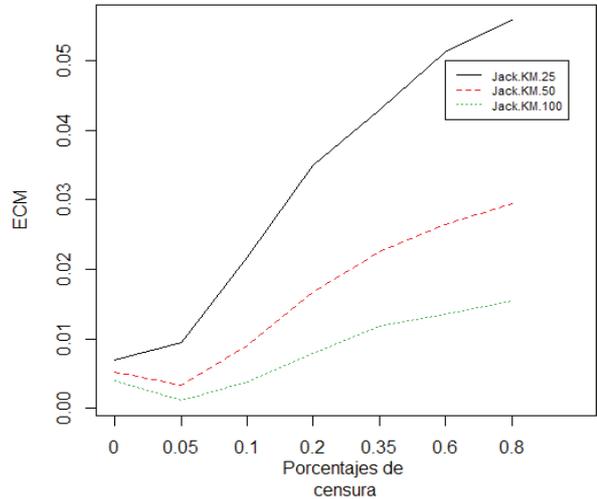


FIG. 4. Error cuadrático medio, n=25, 50,100

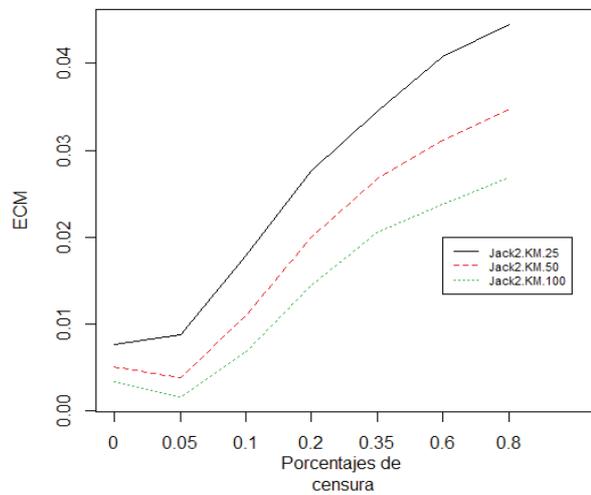


FIG. 5. Error cuadrático medio, n=25, 50,100

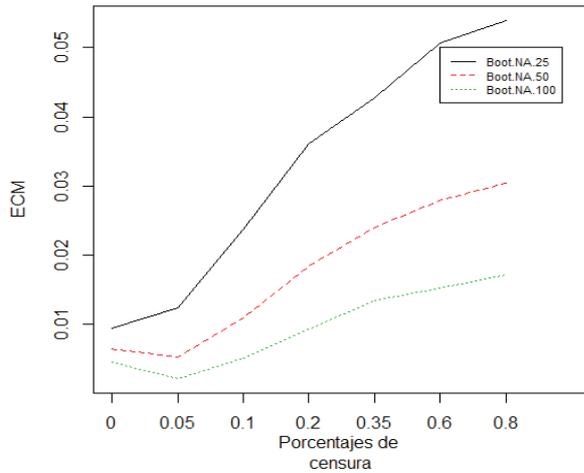


FIG. 6. Error cuadrático medio, $n=25, 50, 100$

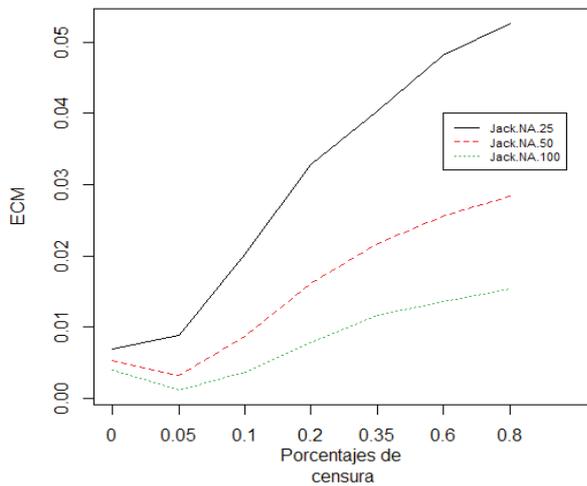


FIG. 7. Error cuadrático medio, $n=25, 50, 100$

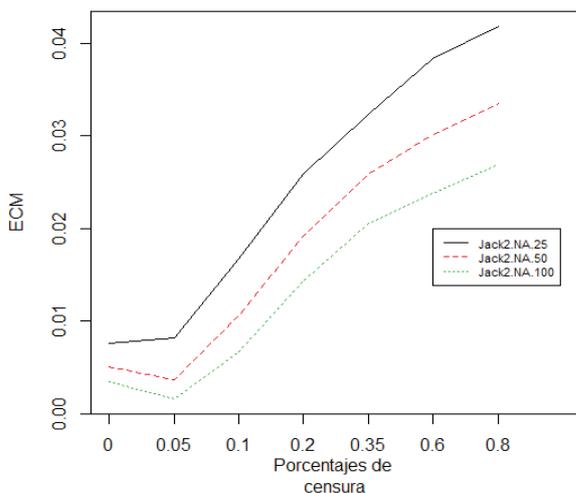


FIG. 8. Error cuadrático medio, $n=25, 50, 100$

VII. CONCLUSIONES

Cuando se tienen muestras pequeñas y observaciones completas, la técnica de remuestreo Jackknife delete I presenta mejores resultados a través del estimador de Nelson-Aalen.

Cuando se tienen observaciones censuradas, los mejores resultados se obtienen con la técnica de remuestreo Jackknife delete II a través del estimador Nelson-Aalen.

Las amplitudes de los intervalos de confianza mediante remuestreo bootstrap resultan ser mejores.

La velocidad con que disminuyen los errores cuadráticos medios mediante la técnica de remuestreo Bootstrap es mayor a Jackknife.

Los métodos de remuestreo en las condiciones de este estudio resultan ser muy eficientes sobre la cobertura de los Intervalos de confianza.

AGRADECIMIENTOS

Los autores del presente trabajos agradecen de manera muy especial a la Universidad de Sucre, Universidad de Córdoba y Universidad Santo Tomás por todo el apoyo, además de los árbitros por sus valiosas sugerencias.

REFERENCIAS

- [1] C. Arrabal, R. Da Rocha, R. Nonaka, S. Meira. "Comparison of resampling method applied to censored data", *International Journal of Advanced Statistics and Probability*, Vol. 2, No. 2, pp. 48-55. 2014. DOI: <http://dx.doi.org/10.14419/ijasp.v2i2.2291>.
- [2] B. Efron. "Bootstrap methods: Another look at jackknife", *The Annals of Statistics*, Vol. 7, pp. 1-26. 1979. DOI: <http://dx.doi.org/10.1214/aos/1176344552>.
- [3] E. Kaplan and P. Meier. "Estimation from Incomplete Observations", *American Statistical Association*, Vol. 53, pp. 457-481. 1958. DOI: <http://dx.doi.org/10.1080/01621459.1958.10501452>.

- [4] J. Lawless. *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. New York: Wiley and Sons, 2003.
- [5] W. Meeker, L. Escobar. *Statistical Models and Methods for Reliability Data*. N.Y. John Wiley & Sons. 1998.
- [6] W. Nelson. "Hazard plotting for incomplete failure data". *Journal of Quality Technology*, Vol. 61, pp. 27-52. 1969.
- [7] R Development Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*". 2007. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. Available: <http://www.R-project.org>.
- [8] J. Ramírez. "Comparación de intervalos de confianza para la función de supervivencia con censura a derecha". *Revista Colombiana de Estadística*, Vol. 34, pp. 197-209. 2011.