REVISTA DE MATEMÁTICA: TEORÍA Y APLICACIONES 2016 **23**(1) : 63–84
CIMPA – UCR ISSN: 1409-2433 (PRINT), 2215-3373 (ONLINE)

SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA AUTÓNOMA DE ORDEN K

ANALYTICAL SOLUTION OF THE K-TH ORDER AUTONOMOUS ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

RONALD OROZCO LÓPEZ*

Received: 9 Sep 2013; Revised: 22 Aug 2015;
Accepted: 22 Sep 2015

---

*Departamento de Matemática, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. E-Mail: rjol1805@hotmail.com

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es hallar la solución analítica de la ecuación autónoma $y^{(k)} = f(y)$ y demostrar su convergencia usando polinomios autónomos de orden k, definidos aquí, además de la fórmula de Faá di Bruno para composición de funciones y polinomios de Bell. Los polinomios autónomos de orden k están definidos en término de los valores de frontera de la ecuación. Además valores especiales de los polinomios autónomos de orden 1 son dados.

Palabras clave: ecuación autónoma; polinomios de Bell; polinomios autónomos.

Abstract

The main objective of this paper is to find the analytical solution of the autonomous equation $y^{(k)} = f(y)$ and prove its convergence using autonomous polynomials of order k, define here in addition of the formula of Faá di Bruno for composition of functions and Bell polynomials. Autonomous polynomials of order k are defined in terms of the boundary values of the equation. Also special values of autonomous polynomials of order 1 are given.

Keywords: Autonomous equation, Bell polynomials, Autonomous polynomials

Mathematics Subject Classification: 34A34, 11B73, 11B83.

1 Introducción

Hay una gran variedad de trabajos sobre las ecuaciones autónomas $y^{(k)} = f(y)$, donde y es una función dependiente de la variable real t. Véase por ejemplo [5, 8, 9, 13]. En [10] se presentan las siguientes soluciones según el caso es $k = 1, 2, 3, 4$, respectivamente, que se pueden resolver por integración directa. Cuando $k = 1$,

$$t = \int \frac{dy}{f(y)} + C,$$

donde C es una constante arbitraria. Cuando $k = 2$ tenemos la solución

$$\int \left[C_1 + 2\int f(y)\, dy\right]^{-1/2} dy = C_2 \pm t,$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Cuando $k = 3$, y haciendo la sustitución $w(y) = \left(y^{(1)}\right)^2$ obtenemos la ecuación de segundo orden

$$w_{yy}^{(2)} = \pm 2 f(y)\, w^{-1/2}.$$

Finalmente, cuando $k = 4$ obtenemos por integración

$$2y^{(1)}y^{(3)} - \left(y^{(2)}\right)^2 = 2\int f\left(y\right)dy + 2C.$$

De la sustitución $w\left(y\right) = \left|y^{(1)}\right|^{3/2}$ obtenemos

$$w^{(2)}_{yy} = \frac{3}{2}\left[\int f\left(y\right)dy + C\right]w^{-5/3}.$$

Como podemos observar no siempre podemos obtener una solución y definida explícitamente. En lo que nos ocupa este artículo daremos una solución analítica de la ecuación $y^{(k)} = f\left(y\right)$, ya que este punto de vista es escasamente estudiado, o nulo, en la literatura existente. Cayley [2] estudió la ecuación diferencial autónoma $\frac{dx}{dt}(t) = V\left(x(t)\right)$, donde V es un campo vectorial de $\mathbb{R}^d$ en sí mismo, hallando una solución formal para el caso $d = 1$. El punto central de nuestro trabajo es usar la fórmula de Faá di Bruno [3, 4] para la composición de funciones analíticas. Además encontraremos una bella relación entre los coeficientes del desarrollo en serie de potencia de la solución de $y^{(k)} = f(y)$ y los polinomios exponenciales de Bell [1].

El resto del trabajo está estructurado como sigue. Primero introducimos la fórmula de Faá di Bruno y estudiaremos los números exponenciales de Bell. Segundo, hallaremos la solución a la ecuación diferencial ordinaria(EDO) autónoma de primer orden en términos de los polinomios autónomos de primer orden. En esta sección halleramos algunos valores particulares de éstos. Finalmente, en la última sección generalizamos los resultados de la sección dos obteniendo un importante resultado sobre la convergencia de la solución de $y^{(k)} = f(y)$.

2 Composición de funciones analíticas

Una partición del entero n es una descomposición en sumandos de n. El número de particiones del entero n será representado por $\mathcal{P}(n)$. Por ejemplo, $\mathcal{P}(5) = 7$ y las particiones de 5 son $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2 = 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Si $p(n) = 1k_1 + 2k_2 + \cdots + rk_r$ es una partición cualquiera de n entonces será representada por simplicidad con $\left[1^{k_1}, 2^{k_2}, ..., r^{k_r}\right]$ (véase [12] para más detalle). Por ejemplo, $\left[1^3, 2\right]$ y $\left[1, 2^2\right]$ son particiones de 5.

Notación 1 *Sea $p(n) = 1k_1 + 2k_2 + \cdots + rk_r$, con $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_r$. Acordaremos que los k_j indican el número de veces que aparece el entero j en la partición de n. Entonces*

$$\begin{aligned} p(n)! &= k_1! \times k_2! \times \cdots \times k_r!, \\ b_{p(n)} &= \left(\frac{b_1}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{b_2}{2!}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{b_r}{r!}\right)^{k_r}, \\ longp(n) &= k_1 + k_2 + \cdots + k_r, \end{aligned}$$

donde $longp(n)$ indica la longitud de la partición $p(n)$. Si $longp(n) = i$, entonces i toma valores entre 1 y n.

Por ejemplo, si $p(5) = \left[1^3, 2\right]$, entonces $p(5)! = 3! \times 1!$, $b_{[1^3,2]} = b_1^3 \frac{b_2}{2!}$ y $longp\,(5) = 4$.

A continuación introduciremos la fórmula de Faá di Bruno.

Teorema 1 *Sean f y $g \in$ funciones analíticas con desarrollo en series de potencias $\sum a_n \frac{z^n}{n!}$ y $\sum b_n \frac{z^n}{n!}$, respectivamente, con $\mathbb{C}$. Si g es convergente en el disco $D(0,R)$ con radio $R > 0$ y centro 0 y si f es convergente en $g(D(0,R))$, entonces $f \circ g(z) = f(b_0) + \sum_{n \geq 1} c_n \frac{z^n}{n!}$, donde*

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} B(n,i) f^{(i)}(b_0)$$

con

$$B(n,i) = \sum_{longp(n)=i} \frac{n! b_{p(n)}}{p(n)!}.$$

Para una demostración de esta ecuación véase [3, 4, 6, 11]. La fórmula de Faá di Bruno para composición de funciones tiene una historia interesante tal como aparece en [6].

Sea $\mathfrak{P}_i(n)$ el conjunto de todas las particiones de n de longitud i. Si

$$\mathfrak{P}_i(n) \longrightarrow B(n,i) f^{(i)}(b_0) \tag{1}$$

entonces

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i(n) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} B(n,i) f^{(i)}(b_0)$$

y por lo tanto

$$\mathfrak{P}(n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i(n) \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} B(n,i) f^{(i)}(b_0) \frac{z^n}{n!},$$

en donde $\mathfrak{P}(n)$ es el conjunto de todas las particiones de los enteros positivos n. Pero como

$$f\left[g(z)\right] - f(b_0) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} B(n,i) f^{(i)}(b_0)\frac{z^n}{n!},$$

entonces

$$\mathfrak{P}(n) \longrightarrow f\left[g(z)\right] - f(b_0).$$

De este modo existe una correspondencia uno a uno entre los elementos del conjunto $\mathfrak{P}(n)$ y los coeficientes de $f\left[g(z)\right]$ dada por (1).

Por otro lado, si hacemos $b_{2n} = 0$, $n \geq 0$, en el Teorema 1 entonces el producto $b_{p(n)}$ solamente contiene los números b_{2n+1}. Por eso, la partición de n debe tomarse de los impares. Sea $\mathfrak{P}_i^o(n)$ el conjunto de todas las particiones de n de longitud i con sumandos impares y sea

$$B_o(n,i) = \sum_{long p_o(n)=i} \frac{n! b_{p_o(n)}}{p_o(n)!}$$

donde $p_o(n) = 1k_1 + 3k_2 + \cdots + (2r-1)k_r$.

Por lo tanto,

$$\mathfrak{P}_i^o(n) \longrightarrow B_o(n,i) f^{(i)}(0)$$

es una correspondencia uno a uno y

$$\mathfrak{P}_o(n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{n}\mathfrak{P}_i^o(n) \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} B_o(n,i) f^{(i)}(0)\frac{z^n}{n!}.$$

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} B_o(n,i) f^{(i)}(0)\frac{z^n}{n!} = f\left[\frac{g(x)-g(-x)}{2}\right] - f(0),$$

entonces

$$\mathfrak{P}_o(n) \longrightarrow f\left[\frac{g(x)-g(-x)}{2}\right] - f(0).$$

Igualmente se puede demostrar que

$$\mathfrak{P}_i^e(n) \longrightarrow B_e(n,i) f^{(i)}(b_0)$$

también es una correspondencia uno a uno, donde $\mathfrak{P}_i^e(2n)$ es el conjunto de todas las particiones de $2n$ de longitud i con sumandos pares, $b_{2n+1} = 0$ y

$$B_e(2n,i) = \sum_{long p_e(2n)=i} \frac{(2n)! b_{p_e(2n)}}{p_e(2n)!},$$

donde $p_e(2n) = 2k_1 + 4k_2 + \cdots + 2rk_r$.

Luego, obtenemos que

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_e(2n) &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{n}\mathfrak{P}_i^e(2n) \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} B_e(2n,i) f^{(i)}(b_0)\frac{z^{2n}}{(2n)!}\\ &= f\left[\frac{g(x)+g(-x)}{2}\right] - f(b_0).\end{aligned}$$

A continuación daremos algunos ejemplos de composición de funciones analíticas.

Ejemplo 1 *Sea $f(z) = e^z$. Entonces*

$$\begin{aligned}\exp(e^z) &= e + e\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} B(n,i)\frac{z^n}{n!}\\ &= e + e\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{longp(n)=i}\frac{n!b_{p(n)}}{p(n)!}\frac{z^n}{n!}\\ &= e + e\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{1t_1+2t_2+\cdots+kt_k=n}\frac{n!}{(1!)^{t_1}t_1!\times\times\cdots\times(k!)^{t_k}t_k!}\frac{z^n}{n!}.\end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos que

$$\exp(e^z - 1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{z^n}{n!}$$

donde

$$\begin{aligned}B_n &= \sum_{i=1}^{n} B\left(n,i\right)\\ &= \sum_{1t_1+2t_2+\cdots+kt_k=n}\frac{n!}{(1!)^{t_1}t_1!\times(2!)^{t_2}t_2!\times\cdots\times(k!)^{t_k}t_k!}\end{aligned}$$

son los números de Bell.

Ejemplo 2 *Si $g(z) = \cosh z$, entonces*

$$\begin{aligned}\exp(\cosh z) &= e + e\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2n} B_e(2n,i)\frac{z^{2n}}{(2n)!}\\ &= e + e\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{B}_n^e\frac{z^{2n}}{(2n)!}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\exp(\cosh z - 1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n^e \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

donde

$$\mathcal{B}_n^e = \sum_{2t_1+4t_2+\cdots+2kt_k=n} \frac{(2n)!}{(2!)^{t_1} t_1! \times (4!)^{t_2} t_2! \times \cdots \times ((2k)!)^{t_k} t_k!}$$

es el número de maneras en que un conjunto de $2n$ elementos distintos puede ser particionado en subconjuntos no vacíos con la condición de que cada subconjunto tenga un número par de elementos. Igualmente se puede mostrar que

$$\begin{aligned} \exp(\sinh z) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} B_o(n,i) \frac{z^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n^o \frac{z^n}{n!}, \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{B}_n^o = \sum_{1t_1+3t_2+\cdots+(2k-1)t_k=n} \frac{n!}{(1!)^{t_1} t_1! \times (3!)^{t_2} t_2! \times \cdots \times ((2k-1)!)^{t_k} t_k!}$$

es el número de maneras en que un conjunto de n elementos distintos puede ser particionado en subconjuntos no vacíos con la condición de que cada subconjunto tenga un número impar de elementos. Finalmente

$$\exp(e^z - 1) - \exp(\cosh z - 1) - \exp(\sinh z) = \sum_{n=3}^{\infty} \mathcal{B}_n^d \frac{z^n}{n!},$$

donde $\mathcal{B}_n^d$ es el número de maneras de particionar un conjunto de n elementos distintos en subconjuntos no vacíos de distintos elementos.

3 Solución analítica de la ecuación autónoma de primer orden $y' = f(y)$

Cayley [2] estudió la ecuación diferencial autónoma $\frac{dx}{dt}(t) = V(x(t))$, donde V es un campo vectorial de $\mathbb{R}^d$ en sí mismo, hallando una solución formal para el caso $d = 1$. Pero una solución analítica no ha sido estudiada aún. En esta sección hallaremos una solución en serie de potencias de la ecuación autónoma de primer orden. Supongamos que la función f y la solución y de la ecuación autónoma $y' = f(y)$ son analíticas, es decir, que $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \frac{z^n}{n!}$ y $y = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \frac{z^n}{n!}$, con $a_n, b_n \in \mathbb{C}$.Por el **Teorema 1** si f está definida en b_0, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} \frac{z^n}{n!} = f(b_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} B(n,i) f^{(i)}(b_0) \frac{z^n}{n!}.$$

Por lo tanto, los coeficientes de la solución y deben satisfacer la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} b_1 &= f(b_0) \\ b_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n} B(n,i) f^{(i)}(b_0),\ n \geq 1, \end{aligned}$$

de donde

$$y(x) = b_0 + f(b_0)z + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} B(n-1,i) f^{(i)}(b_0) \frac{z^n}{n!}$$

satisface la ecuación no lineal $y' = f(y)$ con valores iniciales $y(0) = b_0$.

La función $y(x)$ se puede expresar en términos del número b_0. A partir de (21) y (22) obtenemos

$$\begin{aligned} b_2 &= B(1,1)f'(b_0) = b_1 f'(b_0) = f(b_0)f'(b_0), \\ b_3 &= B(2,1)f'(b_0) + B(2,2)f''(b_0) \\ &= b_2 f'(b_0) + b_1^2 f''(b_0) \\ &= f(b_0)f'(b_0)^2 + f^2(b_0)f''(b_0), \\ b_4 &= B(3,1)f'(b_0) + B(3,2)f''(b_0) + B(3,3)f^{(3)}(b_0) \\ &= b_3 f'(b_0) + 3b_1 b_2 f''(b_0) + b_1^3 f^{(3)}(b_0) \\ &= f(b_0)f'(b_0)^2 + f^2(b_0)f''(b_0)f'(b_0) + \\ &\quad 3f(b_0)f(b_0)f'(b_0)f''(b_0) + f^3(b_0)f^{(3)}(b_0) \\ &= f(b_0)f'(b_0)^3 + 4f^2(b_0)f'(b_0)f''(b_0) + f^3(b_0)f^{(3)}(b_0). \end{aligned}$$

Igualmente tenemos que

$$\begin{aligned} b_5 &= f(b_0)f'(b_0)^4 + 11f^2(b_0)f'(b_0)^2 f''(b_0) + 7f^3(b_0)f'(b_0)f^{(3)}(b_0) \\ &\quad +4f^3(b_0)f''(b_0)^2 + f^4(b_0)f^{(4)}(b_0) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} b_6 &= f(b_0)f'(b_0)^5 + 26f^2(b_0)f'(b_0)^3f''(b_0) + 32f^3(b_0)f'(b_0)^2f^{(3)}(b_0) \\ &\quad +34f^3(b_0)f'(b_0)f''(b_0)^2 + 11f^4(b_0)f'(b_0)f^{(4)}(b_0) \\ &\quad +15f^4(b_0)f''(b_0)f^{(3)}(b_0) + f^5(b_0)f^{(5)}(b_0). \end{aligned}$$

Sea $P_{p(n)}\left(f'(b_0),...,f^{(n)}(b_0)\right) = f'(b_0)^{k_1} \times \cdots \times f^{(r)}(b_0)^{k_r}$ un monomio en las variables $f^{(i)}(b_0), i = 1, 2, ..., n$. Por ejemplo, $P_{[1,2^2]}\left(f'(b_0),...,f^{(5)}(b_0)\right) = f'(b_0)f^{(2)}(b_0)^2$ y $P_{[1,2,3]}\left(f'(b_0),...,f^{(5)}(b_0)\right) = f'(b_0)f^{(2)}(b_0)f^{(3)}(b_0)$.

Definamos el polinomio $Q_i\left(f'(b_0),...,f^{(n)}(b_0)\right)$ de grado i, de la siguiente manera

$$Q(n,i) = \sum_{longp(n)=i} q^{(1)}_{p(n)} P_{p(n)}\left(f'(b_0),...,f^{(n)}(b_0)\right),$$

donde los números $q^{(1)}_{p(n)}$ son números enteros positivos.

Por último, definamos el polinomio *autónomo* $A_{n,1}$ de grado $n,\ n \geq 2$ y orden 1 por

$$A_{n,1}\left(f(b_0), f'(b_0), ..., f^{(n-1)}(b_0)\right) = \sum_{i=1}^{n-1} f^{n-i}(b_0)Q(n,i).$$

Como

$$\begin{aligned} b_2 &= A_{2,1}\left(f(b_0), f'(b_0)\right), \\ b_3 &= A_{3,1}\left(f(b_0), f'(b_0)f^{(2)}(b_0)\right), \\ b_4 &= A_{4,1}\left(f(b_0), f'(b_0)f^{(2)}(b_0), f^{(3)}(b_0)\right), \\ b_5 &= A_{5,1}\left(f(b_0), f'(b_0)f^{(2)}(b_0), f^{(3)}(b_0), f^{(4)}(b_0)\right), \\ b_6 &= A_{6,1}\left(f(b_0), f'(b_0)f^{(2)}(b_0), f^{(3)}(b_0), f^{(4)}(b_0), f^{(5)}(b_0)\right), \end{aligned}$$

podemos entonces suponer que

$$b_n = A_{n,1}\left(f(b_0), f'(b_0), ..., f^{(n-1)}(b_0)\right), \tag{2}$$

y por lo tanto

$$b_n = \sum_{i=1}^{n-1} B(n-1,i)f^{(i)}(b_0) = A_{n,1}\left(f(b_0), f'(b_0), ..., f^{(n-1)}(b_0)\right),$$

donde los números $q_{p(n)}^{(1)}$ se obtienen al reemplazar los coeficientes $b_1, ..., b_{n-1}$ en $B(n-1, i)$.

Utilizando (2), obtenemos una solución general a la ecuación autónoma de primer orden de la siguiente forma

$$y(x) = b_0 + f(b_0)z + \sum_{n=2}^{\infty} A_{n,1}\left(f(b_0), f'(b_0), ..., f^{(n-1)}(b_0)\right)\frac{z^n}{n!}. \tag{3}$$

Teorema 2 *La solución (3) de la ecuación diferencial no lineal* $y' = f(y)$ *es absolutamente convergente en el disco* $|z| < |\alpha|^{-1}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha > 0$.

Demostración. Supongamos primero que $\left|f^{(i)}(b_0)\right| \leq N_i$, para todo $i \geq 0$ y que

$$N = \max\left\{N_0, N_1, ..., N_i, ...\right\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |y(z) - b_0| &= \left|f(b_0)z + \sum_{n=2}^{\infty} A_{n,1}\left(f(b_0), f'(b_0), ..., f^{(n-1)}(b_0)\right)\frac{z^n}{n!}\right| \\ &\leq |f(b_0)|\,|z| + \sum_{n=2}^{\infty}\left|A_{n,1}\left(f(b_0), f'(b_0), ..., f^{(n-1)}(b_0)\right)\right|\frac{|z|^n}{n!}. \end{aligned}$$

Como $\left|P_{p(n)}\left(f'(b_0), ..., f^{(n)}(b_0)\right)\right| \leq N^i$, sólo si $longp\,(n) = i$, entonces se sigue que

$$\begin{aligned} \left|A_{n,1}\left(f(b_0), f'(b_0), ..., f^{(n-1)}(b_0)\right)\right| &\leq \sum_{i=1}^{n-1}\left|f^{n-i}(b_0)\right|\left|Q\,(n,i)\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} N^{n-i}\sum_{longp(n)=i} q_{p(n)}^{(1)} N^i \\ &= N^n\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{longp(n)=i} q_{p(n)}^{(1)}. \end{aligned}$$

Ahora calculemos el valor de la suma anterior. Tenemos que

$$A_{n,1}\,(1,1,1,...,1) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{longp(n)=i} q_{p(n).}^{(1)}$$

Puesto que la única función para la que se cumple que $g^{(n)}(b_0) = 1$ es $g(x) = e^{x-b_0}$, entonces $A_{n,1}\,(1,1,1,...,1)$ es el polinomio autónomo de la ecuación diferencial $u' = e^{u-b_0}$ con valor en la frontera $u(0) = b_0$. Como la solución es $u(z) = b_0 + \ln \frac{1}{1-z}$, entonces por (2) $A_{n,1}(1,1,1,...,1) = (n-1)!$.

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{longp(n)=i} q_{p(n)}^{(1)} = (n-1)!$$

y

$$\left| A_{n,1}\left(f(b_0), f'(b_0), ..., f^{(n-1)}(b_0) \right) \right| \leq (n-1)!N^n.$$

De donde

$$\begin{aligned} |y(z) - b_0| &\leq N|z| + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)!N^n \frac{|z|^n}{n!} \\ &= N|z| + \sum_{n=2}^{\infty} N^n \frac{|z|^n}{n} \\ &= \ln \frac{1}{1 - N|z|}. \end{aligned}$$

Puesto que la representación en serie de $\ln \frac{1}{1-Nz}$ es absolutamente convergente en el disco $|z| < N^{-1}$, entonces la serie (3) también lo es. ■

A continuación daremos algunos ejemplos de soluciones de ecuaciones autónomas de primer orden con función f analítica.

Ejemplo 3 *Sea la ecuación* $y' = \sin y$. *La función* $\sin y$ *satisface la condición del teorema, es decir,* $\left|f^{(i)}(b_0)\right| \leq 1$. *Si* $y(0) = 0, \pm k\pi$, k *entero, entonces* $y(z) \equiv 0$. *Si* $y(0) = \frac{\pi}{4}$, *entonces tenemos* $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *y* $f^{(2i)}(\frac{\pi}{4}) = (-1)^i \frac{\sqrt{2}}{2}$ *y* $f^{(2i+1)}(\frac{\pi}{4}) = (-1)^i \frac{\sqrt{2}}{2}$. *La solución toma entonces la forma*

$$y(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} z + \frac{1}{4} z^2 - \frac{1}{4!} z^4 - \frac{3\sqrt{2}}{2 \times 5!} z^5 + \frac{1}{2 \times 6!} z^6 + \cdots \tag{4}$$

Si $y(0) = \frac{\pi}{2}$, *entonces*

$$y(z) = \frac{\pi}{2} + z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{4!} + \cdots$$

donde la serie (4) es absolutamente convergente para todo $|z| < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ejemplo 4 *Sea* $y' = \cos y$. *Si* $y(0) = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ *para todo entero* k, *entonces* $y(z) \equiv 0$. *Si* $y(0) = \pi$, *tenemos* $f(\pi) = -1$, $f^{(2i)}(\pi) = (-1)^{i+1}$ *y* $f^{(2i-1)}(\pi) = 0$. *Entonces*

$$y(z) = \pi - z + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{4!} + \cdots$$

Esta solución es absolutamente convergente cuando $|z| < 1$.

Si $y(0) = \frac{\pi}{4}$, *entonces*

$$y(z) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}z - \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \frac{3\sqrt{2}}{2\times 5!}z^5 - \frac{1}{2\times 6!}z^6 + \cdots$$

absolutamente convergente para todo $|z| < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ejemplo 5 *Sea la ecuación* $y' = (1-y)^{-1}$. *Entonces la solución es*

$$y(z) = z + \frac{z^2}{2!} + 1\cdot 3\frac{z^3}{3!} + 1\cdot 3\cdot 5\frac{z^4}{4!} + 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\frac{z^5}{5!} + 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\frac{z^6}{6!} + \cdots \quad (5)$$

Podemos suponer que el término general de $y(x)$ *es* $b_n = \frac{(2n-3)!!}{n!}$, $n \geq 2$. *Por lo tanto*

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2,$$

y la serie (5) es absolutamente convergente para todo $|z| < \frac{1}{2}$.

Teorema 3 *Los siguientes son valores particulares de* $A_{n,1}$:

$$\begin{aligned}
A_{n,1}(1,1,1,...,1) &= (n-1)!, \\
A_{n,1}\left(1,a,a^2,...,a^{n-1}\right) &= a^{n-1}(n-1)!,\ a \neq 0 \\
A_{n,1}(0!,1!,2!,...,(n-1)!) &= (-1)^{n+1}2^n n!\binom{1/2}{n}, \\
A_{n,1}(0,a_1,a_2,...,a_{n-1}) &= 0, \\
A_{n,1}(1,(a)_1,(a)_2,...,(a)_{n-1}) &= \binom{\frac{1}{1-a}}{n}(1-a)^n n!,
\end{aligned}$$

donde $(a)_k = a(a-1)\cdots(a-k+1)$, *en donde* a *no es un entero positivo.*

Demostración. *Sea* $y' = f(y)$ *la ecuación diferencial autónoma con valor en la frontera* $y(0) = 0$ *y* f *analítica e invertible en un conjunto* Ω *de* $\mathbb{R}$. *Supongamos que* $y = f^{-1}(g)$, *donde* g *es una función diferenciable en* Ω. *Entonces*

$$(f^{-1})'(g)g' = g$$

y por tanto

$$\int \frac{(f^{-1})'(g)dg}{g} = x + c. \tag{6}$$

Las $k-$ésimas derivadas de las funciones $f(z) = e^z,\ f(z) = e^{az},\ f(z) = \frac{1}{1-z}$ y $f(z) = (1+z)^a$ evaluadas en 0 son $f^i(0) = 1,\ f^i(0) = a^i,\ f^i(0) = i!$ y $f^i(0) = (a)_i = a(a-1)\cdots(a-i+1),\ i > 0,\ f(0) = 1$, respectivamente. Si aplicamos (6) para hallar la solución a la ecuación $y' = f(y)$, con f las funciones dadas obtenemos, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\ln\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,1}(1,1,1,...,1)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\\
\frac{1}{a}\ln\frac{1}{1-ax} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,1}\left(1,a,a^2,...,a^{n-1}\right)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}\frac{x^n}{n},\\
1-\sqrt{1-2x} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,1}(0!,1!,2!,...,(n-1)!)\frac{x^n}{n!}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2^n\binom{1/2}{n}x^n,\\
[1+(1-a)x]^{1/(1-a)}-1 &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,1}(1,(a)_1,(a)_2,...,(a)_{n-1})\frac{x^n}{n!}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{1-a}}{n}(1-a)^n x^n.
\end{aligned}$$

Si $f(b_0) = 0$ para cualquier $b_0 \in \mathbb{C}$, entonces por definicion de $A_{n,1}$ se cumple (37). ■

Es posible representar muchas funciones analíticas en términos de los polinomios autónomos $A_{n,1}\left(f(b_0), f'(b_0), ..., f^{(n-1)}(b_0)\right)$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\arcsin\left(\frac{2(\sqrt{2}+1)e^{-z}}{(\sqrt{2}+1)^2e^{-2z}+1}\right) &= \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}z + \\
&\quad \sum_{n=2}^{\infty} A_{n,1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, ..., (-1)^n\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{z^n}{n!},\\
\arcsin(\sec hz) &= \frac{\pi}{2} + z + \sum_{n=2}^{\infty} A_{n,1}(1,0,-1,0,1,...)\frac{z^n}{n!}.
\end{aligned}$$

4 Solución analítica de la ecuación autónoma de orden k

Ahora encontraremos una solución analítica para la ecuación autónoma de orden k, $y^{(k)} = f(y),\ y(z) = \sum_{n\geq 0} t_n \frac{z^n}{n!}$ y $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^n}{n!},\ k \geq 2$. Tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_{n+k} \frac{z^n}{n!} = f(t_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} B(n,i) f^{(i)}(t_0) \frac{z^n}{n!}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} t_k &= f(t_0) \\ t_{n+k} &= \sum_{i=1}^{n} B(n,i) f^{(i)}(t_0,),\ n \geq 1. \end{aligned} \tag{7}$$

La solución analítica será

$$y(z, t_1, ..., t_{k-1}) = \sum_{n=0}^{k-1} t_n \frac{z^n}{n!} + f(t_0)\frac{z^k}{k!} + \sum_{n=k+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-k} B(n-k,i) f^{(i)}(t_0)\frac{z^n}{n!},$$

puesto que si usamos (7) podemos expresar los coeficientes t_{n+k}, de y en términos de t_0, $t_1, ..., t_{k-1},\ n \geq 1$. Los primeros de éstos son:

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= B(1,1)f'(t_0) = t_1 f'(t_0) \\ t_{k+2} &= B(2,1)f'(t_0) + B(2,2)f''(t_0) \\ &= t_2 f'(t_0) + t_1^2 f''(t_0) \\ t_{k+3} &= B(3,1)f'(t_0) + B(3,2)f''(t_0) + B(3,3)f^{(3)}(t_0) \\ &= t_3 f'(t_0) + 3t_1t_2 f''(t_0) + t_1^3 f^{(3)}(t_0) \\ t_{k+4} &= B(4,1)f'(t_0) + B(4,2)f''(t_0) + B(4,3)f^{(3)}(t_0) + B(4,4)f^{(4)}(t_0) \\ &= t_4 f'(t_0) + \left(4t_1t_3 + 3t_2^2\right) f''(t_0) + 6t_1^2 t_2 f^{(3)}(t_0) + t_1^4 f^{(4)}(t_0). \end{aligned}$$

Como podemos observar la EDO autónoma tiene realmente la forma

$$\frac{\partial^k y\left(z, t_1, ..., t_{k-1}\right)}{\partial z^k} = f\left(y\left(z, t_1, ..., t_{k-1}\right)\right)$$

en donde los $t_0, t_1, t_2, ..., t_{k-1}$ son los valores en la frontera dados por

$$y(0) = t_0, y'(0) = t_1, y''(0) = t_2, ..., y^{(k-1)}(0) = t_{k-1},$$

Definición 1 *Sea* $\partial^{n-k}(f(t_0)) = (f(t_0), f'(t_0), ..., f^{(n-k)}(t_0))$ *en* $\mathbb{C}^{n-k+1}$*y sea* $\mathbf{t} = (t_1, t_2, ..., t_{k-1})$ *en* $\mathbb{C}^{k-1}$ *, en donde* $f^{(n)}(z)$ *está definida en* $t_0 \in \mathbb{C}$*. Definimos el polinomio autónomo* $A_{n,k} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$*, de orden* k *y grado* $n-k+1$ *así*

$$A_{n,k}\left(\mathbf{t}, \partial^{n-k}(f(t_0))\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{longp(n)=i} \frac{n!}{p(n)!} A_{p(n)} f^{(i)}(t_0),\ n > k.$$

donde

$$\begin{aligned} A_{n,k} &= t_n,\ 1 \le n \le k-1, \\ A_{k,k} &= f(t_0), \\ A_{p(n)} &= \left(\frac{A_{1,k}}{1!}\right)^{c_1} \left(\frac{A_{2,k}}{2!}\right)^{c_2} \cdots \left(\frac{A_{r,k}}{r!}\right)^{c_r},\ n > k+1. \end{aligned} \tag{8}$$

Definición 2 *Sea* $f(z) = e^z$ *en el polinomio* $A_{n,k}$*, entonces pongamos*

$$\begin{aligned} P_n(\mathbf{t}) &= t_n,\ 1 \le n \le k-1, \\ P_k(\mathbf{t}) &= 1, \\ P_{n+k}(\mathbf{t}) &= A_{n,k}(\mathbf{t}, 1, 1, ..., 1),\ n > 1. \end{aligned}$$

Podemos expresar los polinomios $P_n(\mathbf{t})$ *usando los polinomios exponenciales de Bell*

$$P_n(\mathbf{t}) = B_{n-k}(P_1(\mathbf{t}), P_2(\mathbf{t}), ..., P_{n-k}(\mathbf{t})),\ n > k.$$

P_n *será llamado polinomio exponencial autónomo.*

Algunos polinomios $P_n(\mathbf{t})$ son:
Si $k = 2$,

$$\begin{aligned} P_1(t) &= t, P_2(t) = 1, \\ P_3(t) &= t, \\ P_4(t) &= 1 + t^2, \\ P_5(t) &= 4t + t^3, \\ P_6(t) &= 4 + 11t^2 + t^4. \end{aligned}$$

Si $k = 3$,

$$\begin{aligned} P_1(t_1, t_2) &= t_1, P_2(t_1, t_2) = t_2, P_3(t_1, t_2) = 1, \\ P_4(t_1, t_2) &= t_1, \\ P_5(t_1, t_2) &= t_2 + t_1^2, \\ P_6(t_1, t_2) &= 1 + 3t_1t_2 + t_1^3, \\ P_7(t_1, t_2) &= 5t_1 + 3t_2^2 + 6t_1^2t_2 + t_1^4. \end{aligned}$$

Si $k=4$,

$$\begin{aligned}
P_1(t_1,t_2,t_3) &= t_1, P_2(t_1,t_2,t_3)=t_2, P_3(t_1,t_2,t_3)=t_3,\\
P_4(t_1,t_2,t_3) &= 1,\\
P_5(t_1,t_2,t_3) &= t_1,\\
P_6(t_1,t_2,t_3) &= t_2+t_1^2,\\
P_7(t_1,t_2,t_3) &= t_3+3t_1t_2+t_1^3,\\
P_8(t_1,t_2,t_3) &= 1+4t_1t_3+3t_2^2+6t_1^2t_2+t_1^4,\\
P_9(t_1,t_2,t_3) &= 6t_1+10t_2t_3+15t_1t_2^2+10t_1^2t_3+10t_1^3t_2+t_1^5.
\end{aligned}$$

Sea $E(z,\mathbf{t})$ la función

$$E(z,\mathbf{t})=\sum_{n=1}^{\infty}P_n(\mathbf{t})\frac{z^n}{n!}.$$

Es fácil probar que $E(z,\mathbf{t})$ es solución de la ecuación diferencial $y^{(k)}=e^y$.

Proposición 1 *Los polinomios $P_n(\mathbf{t})$ satisfacen la siguiente ecuación de recurrencia*

$$\frac{\partial P_{n+k}(\mathbf{t})}{\partial t_i}=\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial P_j(\mathbf{t})}{\partial t_i}P_{n+k-j}(\mathbf{t}),\ 1\le i\le k-1. \tag{9}$$

Demostración. Usando la ecuación parcial

$$\frac{\partial^{k+1}E(x,\mathbf{t})}{\partial t_i\partial x}=e^{E(x,\mathbf{t})}\frac{\partial E(x,\mathbf{t})}{\partial t_i}$$

se obtiene (9). ■

Proposición 2 *Sea $\mathbf{1}^{k-1}=(1,...,1)\in\mathbb{R}^{k-1}$. Entonces*

$$P_n\left(\mathbf{1}^{k-1}\right)\le n! \tag{10}$$

Demostración. Primeramente tenemos que $P_n\left(\mathbf{1}^{k-1}\right)=1,\ 1\le n\le k$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
P_{n+k}\left(\mathbf{1}^{k-1}\right) &= B_n\left(P_1\left(\mathbf{1}^{k-1}\right),P_2\left(\mathbf{1}^{k-1}\right),...,P_n\left(\mathbf{1}^{k-1}\right)\right)\\
&= B_n(1,...,1)\\
&= n!,
\end{aligned}$$

solamente cuando $1 \leq n \leq k$. Y en este caso también se cumple (10) . Supongamos que (10) es cierta para $n-k$. Entonces

$$\begin{aligned} P_{n-k+j}\left(\mathbf{1}^{k-1}\right) &= B_{n-2k+j}\left(P_1\left(\mathbf{1}^{k-1}\right), P_2\left(\mathbf{1}^{k-1}\right), ..., P_{n-2k+j}\left(\mathbf{1}^{k-1}\right)\right) \\ &= B_{n-2k+j}\left(1, ..., 1, P_{k+1}\left(\mathbf{1}^{k-1}\right), ..., P_{n-2k+j}\left(\mathbf{1}^{k-1}\right)\right) \\ &\leq B_{n-2k+j}\left(1, ..., 1, (k+1)!, ..., (n-2k+j)!\right) \\ &< B_{n-2k+j}\left(1, 2!, ..., k!, (k+1)!, ..., (n-2k+j)!\right). \end{aligned}$$

Como $B_n(1!, ..., n!) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} \frac{n!}{i!}$, en donde los sumandos son los números de Lah [7], se sigue que

$$\begin{aligned} P_{n-k+j}\left(\mathbf{1}^{k-1}\right) &< \sum_{i=1}^{n-2k+j} \binom{n-2k+j-1}{i-1} \frac{(n-2k+j)!}{i!} \\ &< \sum_{i=1}^{n-2k+j} \binom{n-2k+j-1}{i-1} (n-2k+j)! \\ &= 2^{n-2k+j-1}(n-2k+j)! \\ &< (n-2k+j)!\,(n-2k+j+1)\cdots(n-k+j) \\ &= (n-k+j)!. \ \blacksquare \end{aligned}$$

A continuación demostraremos la convergencia de la solución de $y^{(k)} = f(y)$.

Teorema 4 *Sea*

$$y(z, \mathbf{t}) = t_0 + \sum_{n=1}^{k-1} t_n \frac{z^n}{n!} + f(t_0)\frac{z^k}{k!} + \sum_{n=k+1}^{\infty} A_{n,k} \frac{z^n}{n!} \tag{11}$$

la solución de $y^{(k)} = f(y), k \geq 2$*, donde* f *es analítica y convergente en todo disco* $D(0, R)$ *que contenga a* t_0*. Entonces (11) es absolutamente convergente en los conjuntos:*

$I)\ D_1 = \left\{(z, \mathbf{t}) : t\ |z| < \frac{1}{\sqrt[k]{N}},\ t > 1,\ N > 1\right\},$

$II)\ D_2 = \left\{(z, \mathbf{t}) : |z| < \frac{1}{\sqrt[k]{N}},\ 0 < t \leq 1,\ N > 1\right\},$

$III)\ D_3 = \{(z, \mathbf{t}) : t\,|z| < 1,\ t > 1,\ 0 < N \leq 1\},$

$IV)\ D_4 = \{(z, \mathbf{t}) : |z| < 1,\ 0 < t \leq 1,\ 0 < N \leq 1\}.$

Demostración. Supongamos que $t = \max\{1, |t_1|, ..., |t_{k-1}|\}$ y que $\left|f^{(i)}(t_0)\right| \leq N_i$, para todo $i \geq 0$, y sea

$$N = \max\{N_0, N_1, ..., N_i, ...\}.$$

Para simplificar hagamos $A_{n,k} = A_{n,k}\left(\mathbf{t}, \partial^{n-k}\left(f\left(t_0\right)\right)\right)$. De (8) se tiene que $|A_{n,k}| = |t_n| \leq tP_n\left(\mathbf{1}^{k-1}\right),\ 1 \leq n \leq k-1,\ |A_{k,k}| < NP_k\left(\mathbf{1}^{k-1}\right),$

$$\begin{aligned}
|A_{k+n,k}| &\leq N\sum_{i=1}^{n}\sum_{longp(n)=i}\frac{n!}{p\left(n\right)!}\left|A_{p(n)}\right| \\
&\leq N\sum_{i=1}^{n}\sum_{c_1+\cdots c_r=i}\frac{n!}{c_1!\cdots c_r!}\left|\frac{A_{1,k}}{1!}\right|^{c_1}\cdots\left|\frac{A_{r,k}}{r!}\right|^{c_r} \\
&\leq NB_n\left(|A_{1,k}|,...,|A_{n,k}|\right) \\
&\leq Nt^nB_n\left(1,1,...,1\right) \\
&\leq Nt^nP_{n+k}\left(\mathbf{1}^{k-1}\right)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
|A_{2k,k}| &\leq NB_k\left(|A_{1,k}|,...,|A_{k,k}|\right) \\
&\leq NB_k\left(tP_1,...,tP_{k-1},N\right) \\
&\leq N^2t^kP_{2k}\left(\mathbf{1}^{k-1}\right).
\end{aligned}$$

Sea $a \geq 2$. Demostraremos que

$$|A_{ak+n,k}| \leq N^a t^{(a-1)k+n}P_{n+ak}\left(\mathbf{1}^{k-1}\right).$$

Supondremos por inducción que

$$\left|A_{(a-1)k+n,k}\right| \leq N^{a-1}t^{(a-2)k+n}P_{n+(a-1)k}\left(\mathbf{1}^{k-1}\right),\ \ 0 \leq n \leq k-1.$$

Para simplificar aún más la notación hagamos $P_n\left(\mathbf{1}^{k-1}\right) \equiv P_n$

$$\begin{aligned}
|A_{ak+n,k}| \leq\ & NB_{(a-1)k+n}(tP_1,...,tP_{k-1},N,NtP_{k+1},...,Nt^{2k-1}P_{2k-1},..., \\
& N^{a-1}t^{(a-1)k}P_{(a-1)k},...,N^{a-1}t^{(a-2)k+n}P_{(a-1)k+n}) \\
\leq\ & N\sum_{i=1}^{(a-1)k+n}\sum_{c_1+\cdots+c_r=i}\frac{[(a-1)k+n]!N^Ct^D}{c_1!\cdots c_r!}\left(\frac{P_1}{1!}\right)^{c_1}\cdots\left(\frac{P_r}{r!}\right)^{c_r},
\end{aligned}$$

donde

$$C = c_k+\cdots c_{2k-1}+\cdots+(a-1)\left(c_{(a-1)k}+\cdots+c_{(a-1)k+n}\right)$$

y D es un número en término de los números c_i. Sea $[x]$ la función parte entera de $x,$ entonces $\left[\frac{(a-1)k+n}{k}\right] = a-1$. Como

$$(a-1)k+n = c_1+2c_2+\cdots(k-1)c_{k-1}+\cdots+[(a-1)k+n]\,c_{(a-1)k+n}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} a-1 &\geq \left[\frac{1}{k}\right] c_1 + \cdots + \left[\frac{k-1}{k}\right] c_{k-1} + \cdots + \left[\frac{(a-1)\,k+n}{k}\right] c_{(a-1)k+n} \\ &\geq c_k + \cdots c_{2k-1} + 2\,(c_{2k} + \cdots + c_{3k-1}) + \cdots + (a-1)(c_{(a-1)k} \\ &\quad + \cdots + c_{(a-1)k+n}) \\ &= C. \end{aligned}$$

De este resultado se deduce que el valor máximo que el número C puede alcanzar es $a-1$, el cual es alcanzado al menos para la partición de $(a-1)\,k+n$ de longitud igual a 1. Entonces la acotación de $A_{ak+n,k}$ queda de esta manera

$$\begin{aligned} |A_{ak+n,k}| &\leq N^a B_{(a-1)k+n}(tP_1, ..., tP_{k-1}, 1, tP_{k+1}, ..., t^{2k-1}P_{2k-1}, ..., \\ &\quad t^{(a-1)k}P_{(a-1)k}, ..., t^{(a-2)k+n}P_{(a-1)k+n}). \end{aligned}$$

Por definición de los polinomios de Bell el exponente más alto que puede alcanzar t es $(a-1)\,k+n$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |A_{ak+n,k}| &\leq N^a t^{(a-1)k+n} B_{(a-1)k+n}\left(P_1, P_2, ..., P_{(a-1)k+n}\right) \\ &= N^a t^{(a-1)k+n} P_{ak+n.} \end{aligned}$$

Ahora podemos utilizar el anterior resultado para demostrar la convergencia de la solución de la ecuación $y^{(k)} = f\,(y)$. Sea $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_{k-1})$. Tenemos que

$$\begin{aligned} |y(z,\mathbf{t}) - t_0| &= \left|\sum_{n=1}^{k-1} t_n \frac{z^n}{n!} + f(t_0)\frac{z^k}{k!} + \sum_{n=k+1}^{\infty} A_{n,k}\frac{z^n}{n!}\right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{k-1} |t_n| \frac{|z|^n}{n!} + |f(t_0)| \frac{|z|^k}{k!} + \sum_{n=k+1}^{\infty} |A_{n,k}| \frac{|z|^n}{n!} \\ &\leq \sum_{n=1}^{k-1} |t_n| \frac{|z|^n}{n!} + |f(t_0)| \frac{|z|^k}{k!} + \sum_{a=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k-1} |A_{ak+n,k}| \frac{|z|^{ak+n}}{(ak+n)!} \\ &\leq t\sum_{n=1}^{k-1} \frac{|z|^n}{n!} + N\frac{|z|^k}{k!} + \sum_{a=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k-1} N^a t^{(a-1)k+n} P_{ak+n}\frac{|z|^{ak+n}}{(ak+n)!} \\ &\leq t\sum_{n=1}^{k-1} \frac{|z|^n}{n!} + \sum_{a=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{k-1} N^a t^{(a-1)k+n} P_{ak+n}\frac{|z|^{ak+n}}{(ak+n)!}. \end{aligned}$$

Se pueden presentar 4 casos según los valores que tomen N y t.
Caso I. $N > 1$ y $t > 1$:

$$\begin{aligned}
|y(z,\mathbf{t}) - t_0| &\leq t\sum_{n=1}^{k-1}\frac{|z|^n}{n!} + \frac{1}{t^k}\sum_{n=k}^{\infty}P_n\frac{\left(N^{\frac{1}{k}}t\,|z|\right)^n}{n!}\\
&< t\sum_{n=1}^{k-1}\frac{|z|^n}{n!} + \frac{1}{t^k}\sum_{n=k}^{\infty}\left(N^{\frac{1}{k}}t\,|z|\right)^n\\
&= t\sum_{n=1}^{k-1}\frac{|z|^n}{n!} + \frac{1}{t^k}\left\{\ln\left(1 - N^{\frac{1}{k}}t\,|z|\right) - \sum_{n=1}^{k-1}\left(N^{\frac{1}{k}}t\,|z|\right)^n\right\}.
\end{aligned}$$

De donde se sigue que $y(z,\mathbf{t})$ es convergente en el conjunto

$$D_1 = \left\{(z,\mathbf{t}) : t\ \ |z| < \frac{1}{\sqrt[k]{N}},\ t = \max\{1, |t_1|, |t_2|, ..., |t_{k-1}|\} > 1\right\}.$$

Caso II. $N > 1$ y $0 < t \leq 1$:

$$\begin{aligned}
|y(z,\mathbf{t}) - t_0| &\leq t\sum_{n=1}^{k-1}\frac{|z|^n}{n!} + t\sum_{n=k}^{\infty}P_n\frac{\left(N^{\frac{1}{k}}\,|z|\right)^n}{n!}\\
&= t\sum_{n=1}^{k-1}\frac{|z|^n}{n!} + t\left\{\ln\left(1 - N^{\frac{1}{k}}\,|z|\right) - \sum_{n=1}^{k-1}\left(N^{\frac{1}{k}}\,|z|\right)^n\right\},
\end{aligned}$$

y $y(z,\mathbf{t})$ es convergente en el conjunto

$$D_2 = \left\{(z,\mathbf{t}) : |z| < \frac{1}{\sqrt[k]{N}},\ 0 < t \leq 1\right\}$$

Para los restantes casos es fácil hallar la convergencia de $y(x,\mathbf{t})$ en los siguientes conjuntos.
Caso III. $0 < N \leq 1$ y $t > 1$:

$$D_3 = \{(z,\mathbf{t}) : t\,|z| < 1,\ t > 1,\ 0 < N \leq 1\}.$$

Caso IV. $0 < N \leq 1$y $0 < t < 1$:

$$D_4 = \{(z,\mathbf{t}) : |z| < 1,\ 0 < t \leq 1,\ 0 < N \leq 1\}.\ \blacksquare$$

Corolario 1 *La función $E\,(z,\mathbf{t})$ es convergente en los conjuntos*

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(z,\mathbf{t}) : |z| < 1,\ 0 < t \leq 1\},\\
D_2 &= \{(z,\mathbf{t}) : t\,|z| < 1,\ t > 1\},
\end{aligned}$$

$t = \max\{1, |t_1|, |t_2|, ..., |t_{k-1}|\}.$

Ejemplo 6 *Sea* $f(z) = e^{iz},\ z \in \mathbb{C}$. *Entonces la solución de* $\frac{\partial^k y(z,\mathbf{t})}{\partial z^k} = \exp\{iy(z,\mathbf{t})\} = \cos\{y(z,\mathbf{t})\} + i\sin\{y(z,\mathbf{t})\}$ *con* $t_0 = 0$ *es*

$$y(z,\mathbf{t}) = \sum_{n=1}^{k-1} t_n \frac{z^n}{n!} + \frac{z^k}{k!} + \sum_{n=k+1}^{\infty} Q_n \frac{z^n}{n!}, \tag{12}$$

donde

$$\begin{aligned}
Q_n &= t_n\ 1 \le n \le k-1,\\
Q_k &= 1,\\
Q_{n+k} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{c_1+\cdots+c_r=i} \frac{n!}{c_1!\cdots c_r!}\left(\frac{Q_1}{1!}\right)^{c_1}\cdots\left(\frac{Q_r}{r!}\right)^{c_r} f^{(i)}(0)\\
&= \sum_{2i\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{c_1+\cdots+c_r=2i} \frac{(-1)^i n!}{c_1!\cdots c_r!}\left(\frac{Q_1}{1!}\right)^{c_1}\cdots\left(\frac{Q_r}{r!}\right)^{c_r} +\\
&\quad i\sum_{2i+1\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{c_1+\cdots+c_r=2i+1} \frac{(-1)^i n!}{c_1!\cdots c_r!}\left(\frac{Q_1}{1!}\right)^{c_1}\cdots\left(\frac{Q_r}{r!}\right)^{c_r}\\
&= B_n^e(Q_1,\ldots,Q_n) + iB_n^o(Q_1,\ldots,Q_n).
\end{aligned}$$

La ecuación (12) es absolutamente convergente en los conjuntos

$$\{(z,\mathbf{t}) : |z| < 1,\ 0 < t \le 1\}$$

y

$$\{(z,\mathbf{t}) : t|z| < 1,\ t > 1\},$$

con $t = \max\{1, |t_1|, |t_2|, \ldots, |t_{k-1}|\}$.

5 Conclusiones

En este trabajo presentamos la solución analítica convergente de la ecuación diferencial autónoma de orden k usando polinomios de Bell y definiendo una nueva clase de polinomios a los que llamamos polinomios autónomos de orden k.

Los resultados generales de este trabajo pueden ser usados para resolver una amplia gama de ecuaciones ordinarias diferenciales autónomas y podrían ser aplicados a sistemas autónomos y no autónomos.

Referencias

[1] Bell, E.T. (1934) “Exponential polynomials”, *Ann. of Math.* **35**(2): 258–277.

[2] Cayley, A. (1857) “On the analytical forms called trees”, *Phil. Mag.* **13**: 172–176.

[3] Faà di Bruno, C. (1855) “Sullo sviluppo delle funzioni”, *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* **6**: 479–480.

[4] Faà di Bruno, C. (1857) “Note sur une nouvelle formule de calcul différentiel”, *Quarterly J. Pure Appl. Math.* **1**: 359–360.

[5] Hale, J.; Kocak, H. (1991) *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag, New York.

[6] Johnson, W.P. (2002) “The Curious History of Faá di Bruno’s Formula”, *Am. Math. Monthly* **109**: 217–234.

[7] Lah, I. (1954) “A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics”, *Boletin do Instituto dos Actuarios Portugueses* **9**: 7–15.

[8] Lawrence, P. (1991) *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York.

[9] Podisuk, M. (2006) “Open formula of Runge-Kutta method for solving autonomous ordinary differential equation", *Applied Mathematics and Computation* **181**(1): 536–542.

[10] Polyanin, A.D.; Zaitsev, V.F. (2003) *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, 2nd Editon*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

[11] Riordan, J. (1946) “Derivatives of composite functions”, *Bull. Amer. Math. Soc.* **52**(8): 664–667.

[12] Riordan, J. (1958) *An Introduction to Combinatorial Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York.

[13] Werschulz, A.G. (1979) “Computational complexity of one-step methods for scalar autonomous differential equation”, *Computing* **23**(4): 345–355.