

Dinámica de una rueda sobre terreno deformable

Alexandre Campos*, Carlos F. Rodríguez**

Resumen

Debido a la complejidad de los terrenos deformables, especialmente cuando se trata de tierra, la cual tiene propiedades que la hacen complicada de modelar, se hace necesario conocer la interacción rueda terreno deformable, que aún no tiene un modelo dinámico establecido. Por medio de la dinámica newtoniana convencional, de la semejanza con el proceso de laminado con el de compactación de suelos y por el análisis de un fluido por debajo de una rueda análogo a una rueda en deslizamiento sobre un terreno que se deforma, se ha implementado un modelo en el cual la rueda es rígida y el terreno se deforma por debajo de ésta y se han corroborado las simulaciones del modelo con la experimentación de un vehículo sobre una pista de arena en lo que refiere a porcentajes de deslizamiento con

respecto a velocidades angulares y pesos de la rueda.

Descriptores: Dinámica de vehículos, laminado plano, deslizamiento.

1. Introducción

Las propiedades del terreno pueden causar variaciones más grandes en las fuerzas de tracción o frenado desarrolladas por la llanta. Algunos ejemplos de terrenos rígidos, más usuales, que alteran las fuerzas longitudinales son: la nieve, el barro, el hielo, la arena, pavimento mojado (capa de agua) etc.

Las variables que caracterizan un terreno no rígido influyen en gran manera en las

* Ingeniero Mecánico, Maestría en Ingeniería Mecánica, Docente Programa de Ingeniería Mecatrónica, Universidad Militar Nueva Granada.

** Ingeniero Mecánico, Doctorado en Ingeniería Industrial, Director de Ingeniería Mecánica, Universidad de los Andes.

propiedades mecánicas describen las respuestas de la llanta a la aplicación de una carga y un torque. La respuesta de la llanta esta dada por la generación de fuerzas externas y deformaciones, las cuales afectan a la llanta pero también actúan sobre el terreno.

Con base en lo anterior se hace necesario predecir una respuesta dinámica aproximada para una llanta en un terreno no rígido.

En los diversos estudios acerca de las propiedades de funcionamiento de las llantas de vehículos, no se ha modelado matemáticamente el comportamiento de las superficies, o terrenos, que no son rígidas.

Los datos que se han utilizado para determinar un terreno, en la mayoría de modelos, han sido los coeficientes de rozamiento estático y dinámico entre el material de la llanta y el del terreno y otros coeficientes, provenientes de ajustes experimentales.

Los estudios más afines al tema realizados antes, son:

- Modelos de llantas en piso rígido, como los expuestos por Fiala, Dugoff [1] y Gym-Nikraves [2], en los que fundamentalmente se estudian los esfuerzos soportados por la llanta longitudinal, radial y lateralmente. En estos modelos se asumen coeficientes de rigidez de la llanta a cada uno de estos esfuerzos, o sea, la llanta se deforma pero el piso no.
- El movimiento de tierras en Ingeniería Civil estudia los mecanismos de transporte de tierra o el despeje de la misma para construcción de carreteras, puentes, etc. En este estudio se han obtenido algunas fórmulas prácticas para calcular la pérdida de potencia de la maquinaria pesada, normalmente, debido a la penetración de la llanta en el terreno. Por ejemplo se dice que la pérdida de potencia transmitida entre rodar sobre tierra firme y tierra blanda es del 13% [3], o que por cada pulgada de penetración existen pérdidas en función de la velocidad y del peso sobre las ruedas de tracción [4]. Pero no se especifican radios de las llantas, ni material del terreno, ni torque en el eje, ni lo que sucede al arrancar del reposo. Las propiedades de los suelos son factores claves en el comportamiento de estos en el momento del paso de la llanta. Teniendo en cuenta que el suelo es un material que tiene propiedades como: absorción, capilaridad, compresibilidad, elasticidad, permeabilidad y plasticidad entre otras [5], no se puede modelar como un metal o un fluido, sino que se debe tratar como elasto-viscoplastico. Además es importante tener en cuenta la cohesión de los suelos que es la que nos permite conocer cual es el esfuerzo cortante por deslizamiento si se tiene la fricción interna del terreno [6].
- El hidropneumático es el efecto de pérdida de contacto entre la llanta y el piso, debido a una cuña de agua que vence la presión interna de la llanta a la

entrada de la misma y rápidamente se propaga hasta la salida; durante la pérdida de contacto la llanta gira sobre un fluido, el agua [7].

2. Modelos matemáticos

2.1. Dinámica Newtoniana

Una aproximación que se realiza al problema es por medio de dos ecuaciones: la segunda ley de Newton y la conservación del momento cinético, que rigen la dinámica Newtoniana, aplicadas a una rueda subiendo un escalón, como en la figura 1.

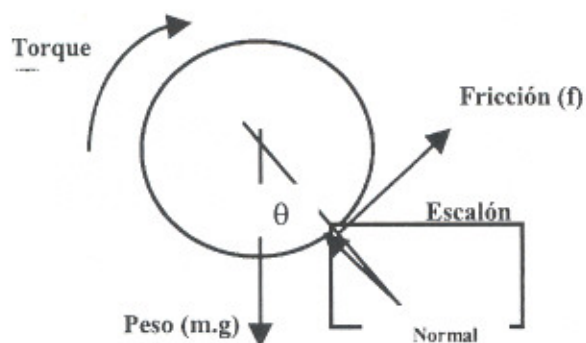


Figura 1. Modelo dinámico de escalón

Con estas ecuaciones y considerando coeficientes de fricción estáticos y cinéticos se analiza el modelo escalón, tanto en rodadura como en deslizamiento. De manera que si las condiciones exceden la rodadura los cálculos se encuentran por las fórmulas que rigen el deslizamiento.

Por medio de los cálculos se tiene la fuerza de fricción f :

$$f = (m \cdot g \cdot I \cdot \sin(\theta) + T \cdot m \cdot r) / (m \cdot r^2 + I) \quad (1)$$

Siendo, m la masa, g la aceleración de la gravedad, I el momento de inercia de la rueda, θ el ángulo del escalón, T el torque aplicado y el r el radio de la rueda.

Se llega al estado de deslizamiento si:

$$f > (\mu_s \cdot m \cdot g \cdot \cos(\theta)) \quad (2)$$

y se tiene, para cada instante:

$$a_x = ((\mu_k \cdot \cos(\theta)) - \sin(\theta)) \cdot g \cdot \cos(\theta) \quad (3)$$

$$\alpha = (T - (\mu_k \cdot m \cdot g \cdot \cos(\theta) \cdot r)) / I \quad (4)$$

$$w = w + \alpha \cdot \Delta_t \quad (5)$$

Con la aceleración angular (a_x) en la dirección X, el coeficiente de fricción cinético (μ_k), la aceleración angular (α) y la velocidad angular de la rueda (w).

En caso en que f sea menor o igual que lo estipulado se permanece en rodadura y se tiene, para cada instante:

$$a_x = ((T \cdot r) / (I + r^2 \cdot m) - ((r^2 \cdot m \cdot g \cdot \sin(\theta)) / (I + r^2 \cdot m))) \cdot \cos(\theta) \quad (6)$$

$$\alpha = (a_x / \cos(\theta)) / r \quad (7)$$

$$w = w + \alpha \cdot \Delta_t \quad (8)$$

Para simular las propiedades físicas del terreno se asumen que éste sólo se

deforma verticalmente como un sistema de resorte amortiguador (elástico - viscoso) para cada punto de contacto individual con la rueda; así cuando la rueda comienza su movimiento sólo tiene contacto con un punto en el terreno y sólo se despegaba de éste cuando logra estar completamente encima del punto; en este lapso de tiempo este punto se hunde según las características elásticas y viscosas. Al igual que en los demás modelos sólo existe contacto en la parte delantera de la rueda.

Por medio de este modelo se puede calcular el mínimo torque para que arranque la rueda, así como al máximo torque antes de que se produzca deslizamiento de acuerdo con las demás variables.

$$T_{min} = r * m * g * \sin(\theta) \quad (9)$$

$$T_{max} = ((\mu_s * g * \cos(\theta)) * (m * r^2 + I) - g * I * \sin(\theta)) / r \quad (10)$$

2.2. Laminado

En la mecánica del laminado plano, una tira de material entra al conjunto de rollos con un espesor inicial h_0 y es reducida por la rotación de los rollos hasta un espesor final h_f . La velocidad superficial del rollo es V_r . Para guardar la rata de flujo material constante, la velocidad de la tira debe aumentar a medida que pasa a través de los rollos (tal como un fluido en una tobera). A la salida del conjunto de rollos la velocidad de la tira es V_f . Debido a que V_r es constante alrededor de toda la superfi-

cie del rollo, ocurre deslizamiento entre el rollo y la tira [8].

Al estudiar el comportamiento de una tira de metal al pasar por los rollos se observa una gran semejanza con el problema analizado en cuanto a:

- El caso del laminado se puede aplicar el terreno viscoso teniendo en cuenta solamente un rollo y la mitad de la lámina a ser procesada, que es lo que sucede en el caso de la compactación de terrenos por medio de aplanadoras, ver figura 2.

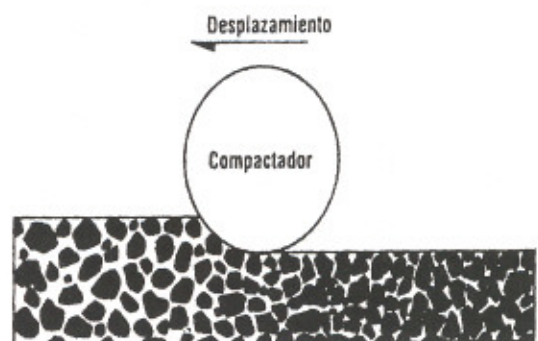


Figura 2. Proceso de compactación de suelos

- En el centro de la rueda el proceso de compactación del terreno es igual al del rollo sobre la lámina.
- Tanto en el proceso de laminado como en la llanta ocurre el deslizamiento longitudinal, que es clave en el modelado de la llanta, debido a la diferencia de velocidades, ver figura 3.

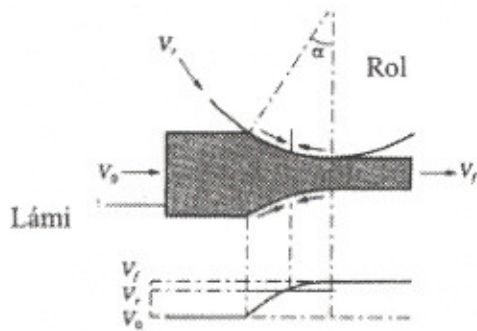


Figura 3. Velocidades en el proceso de laminado

El objetivo principal en los cálculos de este proceso es encontrar el torque y la potencia necesarios, que se han de aplicar a los rollos, para lograr la reducción del área seccional de la lámina; lo cual se aplicará igualmente al caso de la rueda en un terreno deformable.

Un elemento infinitesimal a la entrada y a la salida es mostrado en la figura, se puede notar que la única diferencia entre un elemento de la zona de entrada y uno de la zona de salida es la dirección de la fuerza de fricción, utilizando la ecuación de Newton, suma de las fuerzas es igual al cambio de Momentum con respecto al tiempo, para el equilibrio y sin variación en la masa con respecto al tiempo, tenemos:

$$(\sigma_x + d\sigma_x)(h + dh) - 2pr d\Phi \sin \Phi - \sigma_x h \Phi = 0 \quad (11)$$

Siendo σ_x el esfuerzo en la dirección X, h el espesor de la lámina, p la presión del rollo, μ coeficiente de fricción y Φ el ángulo de ataque de la lámina.

Como se ve en la figura 4:

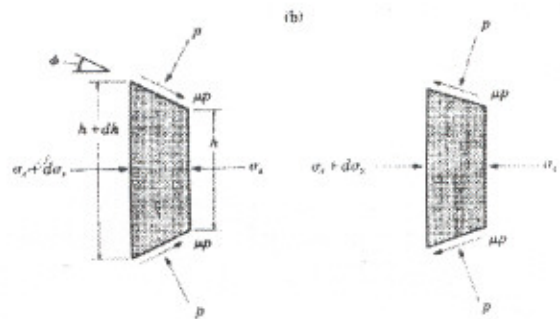


Figura 4. Diagramas de cuerpo libre del laminado, antes y después del punto neutro.

Si se asume el criterio de distorsión de energía para deformaciones planas, con σ_1 y σ_3 como esfuerzos principales sobre el material y Yf su esfuerzo de fluencia, se tiene:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2/(3)^{0.5} * Yf = Yf' \quad (12)$$

$$p - \sigma_3 = Yf' \quad (13)$$

debido a las diferencias de velocidades entre el rollo y la lámina aparecen dos fuerzas de rozamiento opuestas entre ambos, las cuales se encuentran en el punto neutro, por lo tanto existen una presión de entrada, antes del punto neutro, y otra de salida después del punto neutro así:

$$P_{\text{entrada}} = Yj' \left[\frac{h}{h0} \right] e^{\mu(h-h_0)}$$

$$P_{\text{salida}} = Yj' \left[\frac{h}{hf} \right] e^{\mu h} \quad (14)$$

Haciendo hf y $h0$ los espesores, final e inicial, respectivamente, de la lámina. Con:

$$H = 2 \cdot \sqrt{\frac{r}{hf}} \cdot \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{r}{hf}} \cdot \phi \right] \quad (14)$$

Así pues si se varia el ángulo ϕ desde 0 hasta α , ángulo que comprende el arco de contacto total, se tiene la curva de presión sobre la lámina o terreno.

Igualando las presiones de entrada y salida se encuentra el ángulo ϕ correspondiente al punto neutro.

Al graficar P/Yf a lo largo del arco de contacto, teniendo en cuenta la posición del punto neutro, se obtienen las diferentes gráficas para diferentes coeficientes de fricción, ver figura 5.

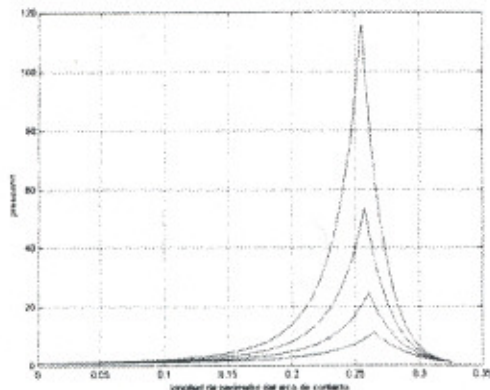


Figura 5. Presión/Esfuerzo de fluencia v.s Longitud en el área de contacto

Se observa que las presiones con fricción son más altas que las sin ésta, lo cual es esperado debido a que el trabajo requerido para sobrellevar la fricción debe ser suministrado por la fuerza del rollo o rueda sobre el material o terreno. El área bajo esta curva es

la fuerza por unidad de ancho de la rueda que soporta el terreno y se puede obtener por integración o por la presión promedio.

c. Mecánica de Fluidos

Teniendo en cuenta la propiedad viscosa del suelo se hace una aproximación al problema por medio de algunos fundamentos de la mecánica de fluidos. Con el fin de conocer el comportamiento de la llanta al encontrarse en un medio no rígido, o sea, que en este caso consideraremos que la llanta gira pero no avanza ni verticalmente ni horizontalmente, en cambio de ello el terreno, fluido, pasa por debajo de la llanta.

Para realizar lo anterior es necesario considerar el terreno que se encuentra debajo de la llanta y en contacto con ella como un volumen de control y analizarlo.

En la figura 6 se puede observar el modelo del problema, en el cual la parte de fluido central es tomada, como volumen de control, para el análisis:

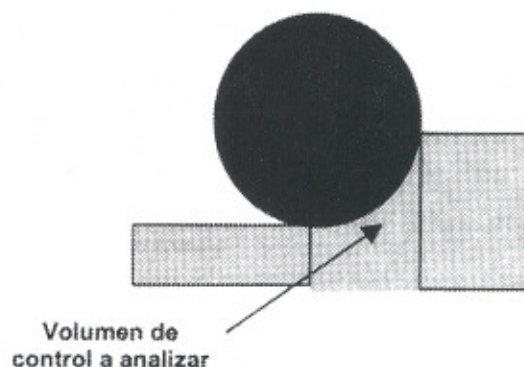


Figura 6. Volumen de control para mecánica de fluidos

Por medio del Teorema del Transporte de Reynolds[9] se llega a las ecuaciones que resuelven el modelo, al aplicarlo a la ecuación de la cantidad de movimiento y a la de la energía unidimensionalmente, en el sentido del movimiento, teniendo en cuenta las condiciones de frontera del volumen de control, ver figura 7:

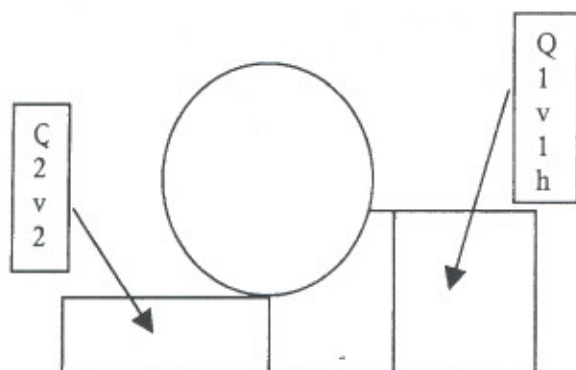


Figura 7. Propiedades en la frontera del volumen de control.

Siendo Q el caudal, v la velocidad, h la altura, P_a la presión atmosférica, g la aceleración de la gravedad y ρ la densidad.

Considerando la conservación de la masa. Por último se logran dos ecuaciones para el volumen de control:

$$Q = \left\{ \left[(F_{vr} + (h_1 - h_2) \cdot (2 \cdot P_a + \rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2))) \cdot 0.5 \cdot t \right] \cdot t \cdot (1/h_1 - 1/h_2)^{-1} \right\} \quad (16)$$

$$\frac{\rho \cdot Q}{2} \cdot \left(\frac{Q}{t \cdot h_2} \right)^2 - \frac{\rho \cdot Q}{2} \cdot \left(\frac{Q}{t \cdot h_1} \right)^2 = \quad (17)$$

$$F_{p1} \cdot \frac{Q}{t \cdot h_1} - F_{p2} \cdot \frac{Q}{t \cdot h_2} + \omega \cdot R \cdot \int_{\text{arco_sumegido}} \tau \cdot t \cdot R \cdot d\theta + F_{vr} \cdot V$$

Con F_p la fuerza debido a la presión, T el esfuerzo debido a la viscosidad y t el espesor en el que actúa la viscosidad.

Se tienen entonces dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas: F , fuerza de la rueda sobre el fluido y el caudal de fluido que pasa por el volumen de control que es proporcional a la velocidad del fluido.

Al resolver numéricamente estas dos ecuaciones se encuentra la relación entre caudal y velocidad angular, ver figura 8:

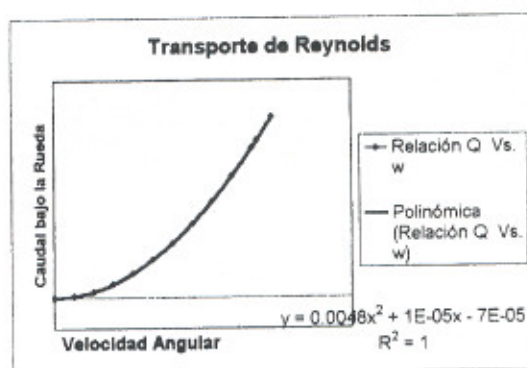


Figura 8. Caudal Vs. Velocidad angular por mecánica de fluidos

La curva anterior se ajusta una curva polinómica.

3. Experimentación

Con el fin de observar el comportamiento real de una rueda en un terreno deformable se diseñó un experimento sobre arena.

Para construir una pista de terreno deformable se encerró arena en un área de 3m X 1m y con una profundidad de 0.1 m; como vehículo se empleó una silla de ruedas que tiene acoplado un motor de corriente continua a cada una de sus ruedas traseras, ver figura 9; dichos motores son controlados por una tarjeta programable.

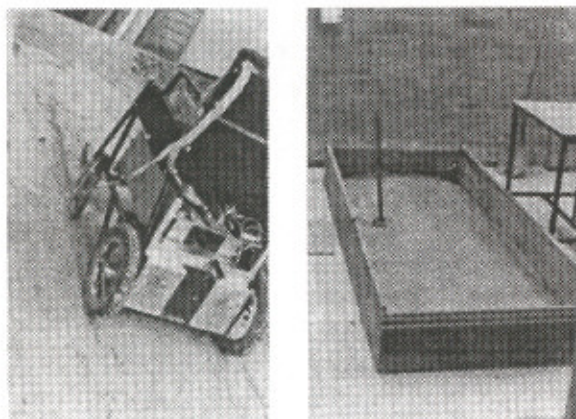


Figura 9. Silla de ruedas y pista de pruebas.

Se realizó una rutina sobre el programa de la tarjeta para los motores dieran un determinado número de vueltas y se detuvieran, siendo posible cambiar la velocidad a la cual debía llegar pasando un tiempo fijo, de tal modo que la aceleración era modificada para las diferentes pruebas.

Como segunda variable se utilizó el peso sobre la silla, de manera que para cada aceleración se utilizaron diferentes pesos.

El objetivo en cada prueba era medir la distancia real recorrida por la silla, y con ésta encontrar el porcentaje de deslizamiento de cada prueba y poder hacer

comparaciones de porcentajes a diferentes aceleraciones y pesos.

Cada prueba se repetía tres veces, y luego se actualizaban las velocidades finales y al completar todo el ciclo se modificaban los pesos sobre la silla.

Por medio de las pruebas se obtuvieron resultados del porcentaje de deslizamiento con respecto al aumento de la velocidad angular, para diferentes pesos, hacia atrás o adelante, como se ve en la figura 10.

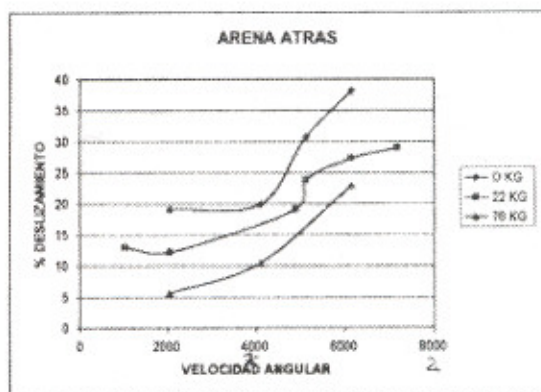


Figura 10. Porcentaje de deslizamiento vs. Velocidad angular en la experimentación.

3.1. Conclusiones Generales de la Prueba:

Después de observar las gráficas de los datos tomados en las pruebas se pueden observar características que rigen la dinámica de una ruda en un terreno deformable:

- A mayor peso a bajas velocidades menor porcentaje de deslizamiento.
- A mayor peso soporta el aumento de velocidad con bajos porcentajes de

deslizamiento hasta un límite cuando se dispara el porcentaje de deslizamiento.

3.2. Conclusiones Particulares de la prueba:

Algunos comportamiento de la prueba se deben a esta en particular y no se pueden generalizar, como:

- Si sobre la silla el peso es bajo y la silla se desliza hacia atrás, se observa un aumento en el porcentaje de deslizamiento, mientras que hacia adelante el porcentaje de deslizamiento baja; esto debido a que las ruedas delanteras de la silla son más finas e indeformables que las traseras, y aplanan el camino por el cual las ruedas traseras de tracción han de pasar.
- Si sobre la silla el peso es alto y la silla se desliza hacia atrás, se observa una disminución en el porcentaje de deslizamiento, mientras que hacia adelante el porcentaje de deslizamiento aumenta; esto debido a que las ruedas traseras de la silla están más deformadas y tienen más área de contacto, lo cual provoca menos penetración en la arena y mayor recorrido.
- Para altos pesos sobre la silla existe menor diferencia entre los porcentajes de deslizamiento hacia atrás o hacia adelante, por la misma razón del punto anterior.
- En altas velocidades existen problemas en la marcación, del punto final

del recorrido debido a deslizamiento de frenado.

- La mayoría de los porcentajes de deslizamiento se encuentran entre 10 y 30%.

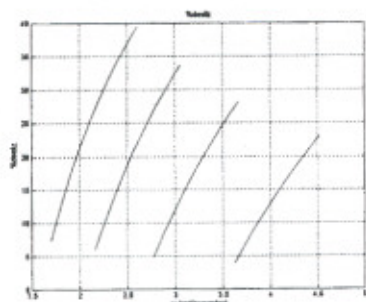
4. Modelo Final

Teniendo en cuenta lo anterior se propone el modelo de dinámica newtoniana con algunas modificaciones. Al observar la gráfica del laminado en el cual existe el deslizamiento entre rueda y terreno en toda la zona de contacto menos en un punto, y que este punto se desliza hacia atrás a medida que el coeficiente de adherencia disminuye, se concluye que este es un estado muy rápido de paso de la rodadura al deslizamiento, o sea de la fase puramente elástica a la puramente viscosa. Por las gráficas de mecánica de fluidos se tiene que es el estado en que existe deslizamiento entre rueda y terreno, y que a medida que se aumenta la velocidad angular de la rueda en esta fase la fuerza de tracción disminuye, a medida que pasa más volumen de material por debajo de la misma (proporcional al cuadrado de la velocidad angular), o sea que la rueda está excavando en el terreno.

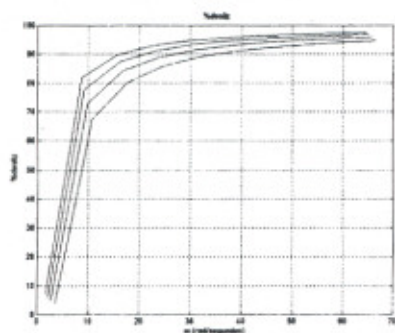
Para corregir el modelo de dinámica newtoniana se debe restar una distancia al tamaño de la aguja proporcional al cuadrado de la velocidad angular de la rueda cuando ésta se encuentra en deslizamiento.

Por medio del modelo filial se llegó a relaciones entre porcentaje de deslizamiento y velocidades angulares (altas o bajas), y entre porcentaje de deslizamiento, ver figura 11.

PORCENTAJE DE DESLIZAMIENTO VS VELOCIDADES ANGULARES BAJAS



PORCENTAJE DE DESLIZAMIENTO VS VELOCIDADES ANGULARES ALTAS (para diferentes masas)



DINÁMICA PORCENTAJE DE DESLIZAMIENTO VS COEFICIENTE DE ADHERENCIA

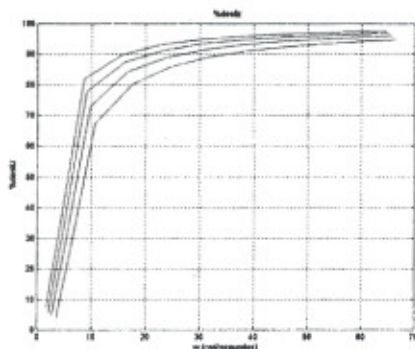


Figura 11. Relaciones por medio del modelo filial

5. Resultados

- Se propone un modelo que contempla la elasto-visco-plasticidad del suelo.
- Se determina el laminado como un estado trasciende de paso entre rodadura y deslizamiento.
- Se corrobora el modelo con las pruebas a bajas velocidades.
- Se determina el comportamiento esperado a altas velocidades.
- Se encuentran rangos de coeficientes de adherencia para deslizamiento y rodadura por la saturación de las curvas contra porcentaje de deslizamiento.
- El modelo sólo contempla rueda rígida y terreno deformable.
- Se puede calcular el torque óptimo de un vehículo para lograr la mayor velocidad lineal sin atascarse en el terreno a cada paso de incremento de tiempo, con el fin de implementarlo en el control de vehículos.

Referencias

- [1] Dugoff, H. Faucher, P. Segel, L. An Analysis of the Tire Traction Properties and Their Influences on Dynamic Performance.
- [2] Gim, G., Nikraves, P.E. (1991), An Analytical Model of Pneumatic Tires for Vehicles Dynamic Simulation.

- [3] Caterpillar Tractor Co., "Principios Básicos de Movimientos de Tierras", U.S.A., Octubre de 1975.
- [4] F. Aparicio, C. Vera, V. Díaz, "Teoría de los Vehículos Automóviles", Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Madrid, 1995.
- [5] Caterpillar Tractor Co., "Manual de Compactación". 1996
- [6] Test of Materials, Universidad New York, 2a edición.
- [7] Escuela de Ingenieros Militares, "Producción y empleo del equipo de Construcción", 1985
- [8] S. Kalpakjian, "Manufacturing Processes for Engineering Materials", 2a edición.
- [9] White, "Mecánica de Fluidos", 1979, Mc Graw Hill.