Reseña Histórica de los Números Reales

*Lucio Rojas Cortes**

Introducción

En nuestro aprendizaje de las matemáticas, hemos tenido la necesidad de adoptar algún concepto de número. La forma compleja del concepto de número real plantea problemas didácticos difíciles de resolver. Su definición rigurosa es complicada y se necesitaron muchos siglos para su desarrollo.

Las primeras ideas de número aparecen en los albores de la civilización. Los antiguos babilonios y griegos conciben alrededor del año 2000 a. De C., una aritmética en la que ya daban origen a las fracciones. Con Pitágoras, en el año 525 a. de C., los griegos descubren la necesidad de adoptar números irracionales como $\sqrt{2}$. En el año 375 a. de C. Eudoxio presenta la teorìa de los inconmensurables para representar irracionales como límite de magnitudes racionales.

Los números negativos que aparecen en la solución de diversos problemas, se consideran como absurdos y solo se manejan libremente a partir del siglo XVII, no es sino hasta la segunda mitad del siglo XIX que *Cantor, Dedekind* y *Weierstrass* desarrollan teorías rigurosas del número real incluyendo racionales e irracionales.

Así reemplazando las magnitudes de Eudoxio por construcciones a partir de números 1, 2, 3,..., Cantor construye irracionales como *"sucesiones de racionales"* y, finalmente Dedekind como *"cortaduras en clases infinitas de racionales"*. El Avance de las matemáticas ha permitido la construcción de los números reales bajo otros conceptos como el de intervalos encajados y sucesiones de Cauchy.

Estas teorías son equivalentes y permiten construir el continuo de los números reales a partir de los números racionales. Los

* Lic. Matemáticas Universidad Distrital. Docente Facultad de Ingeniería - Universidad Militar Nueva Granada.

números racionales se construyen a partir de los enteros y estos últimos a partir de los números naturales o sea que el cimiento de este edificio llamado *"números reales"* es el conjunto de los números naturales.

1. Números Naturales

El concepto de axioma y el método axiomático empezó a afinarse a finales del siglo XIX; especialmente en la década comprendida entre 1.880 y 1.890, se reafirmó la independencia entre las teorías matemáticas y cualquier tipo de interpretación de los objetos y de las afirmaciones de la misma en alguna *"realidad concreta"*, haciéndose énfasis en el carácter abstracto de las cosas que maneja la matemática. El trabajo más célebre realizado en este campo es quizás el de *G. Peano* (1858-1932) y sus colaboradores quienes se empeñaron en desarrollar simultáneamente con la matemática un cálculo lógico, teniendo como meta la formulación de las teorías matemáticas en un lenguaje simbólico y semejante al de la lógica formal.

El fin primordial de Peano no era la fundamentación matemática; su interés era primordialmente metodológico: la axiomática se presentaba como la herramienta óptima para estudiar las teorías matemáticas. En este sentido la corriente por él impulsada puede distinguirse sensiblemente del llamado *"formalismo"*.

Entre la gran obra de Peano, es especialmente conocido su desarrollo axiomático de la aritmética (1891). No se trataba en este caso de explicar la naturaleza de los números o en otros términos, no se intentaba responder a preguntas como, ¿qué es un número natural?, sino que tomando este concepto como idea primitiva (sin definición) se trata de formular un sistema, lo más simple posible, de axiomas que caractericen la clase de los números naturales y que permita deducir por medio de las reglas lógicas de la inferencia todas las propiedades de dichos números, es decir, demostrar todos los teoremas de la aritmética.

La clase de objetos se representaba, a nuestra intuición como una *"sucesión"* de objetos obtenidos a partir de un objeto inicial, o *"cero"*, por medio de un proceso reiterado que consiste en pasar de cada objeto al *"siguiente"*.

El conjunto de axiomas introducido por Peano ha tenido aceptación universal; Los únicos términos técnicos que intervienen son los de número natural, primer número natural (cero para nosotros y uno para otros) y el *"siguiente de"* o *"sucesor de"* sus axiomas se han llegado a considerar como base de todos los conocimientos matemáticos son cinco:

N_1: 0 es un número natural.

N_2: El siguiente de todo número natural es también un número natural.

N_3: Si S es una colección de números naturales que cumple:
(i) 0 está en S,
(ii) Si cada vez que un natural está en S, también el siguiente de él esté en S,

entonces, S es el conjunto de los números naturales.

N_4: 0 nunca es el sucesor de un número natural.

N_5: Si los siguientes de dos números son iguales entonces los números son iguales.

El axioma N_3 recibe el nombre de *"inducción completa"*. Es fascinante ver cómo a partir de estos sencillos axiomas se desarrollan ramas de la matemática como la aritmética y el análisis.

2. Construcción de los Números Naturales

La construcción de los números naturales se apoya en la Teoría de Conjuntos. Actualmente se conocen varias formas igualmente válidas de la teoría de conjuntos. Este hecho ha sido la principal objeción a la concepción realista o *"platónica"*, que considera a los números como objetos reales, ciertamente no localizados en el tiempo o el espacio, pero existentes independientemente en nuestras mentes, aunque aprehendibles y describibles por nosotros.

Si se quieren construir los números naturales a partir de la teoría de los conjuntos, se debe escoger un sistema de axiomas de esta teoría, el más difundido es el de Zermelo-Frankel (Z-F):

(i) Axioma del conjunto vacío: existe un conjunto (conjunto vacío) que no contiene elementos.

(ii) Axioma de las parejas no ordenadas: dados dos elementos cualesquiera a y b, existe un conjunto *{a,b}* cuyos elementos son exactamente a y b, si a = b, entonces, el conjunto *{a,a}* = *{a}* tiene exactamente un elemento.

(iii) Axioma del infinito: Existe por lo menos un conjunto X tal que $x \in X$, entonces, $(X \cup \{x\}) \in X$.

(iv) El controvertido axioma de elección: cuya consistencia en los demás axiomas es demostrada Gödel en 1.938 y cuya independencia de ellos fue establecida por P. Cohen en 1.963.

(v) Axioma de fundamentación de regularidad: agregado posteriormente para excluir situaciones anómalas, como la existencia de una sucesión infinita de conjuntos A_1, A_2, A_3, ... tales que $A_2 \in A_1$, $A_3 \in A_1$, etc., y cuya idea se debe a *S. Von Neumann*.

Para llegar a la idea de número natural se debe estudiar el concepto de cardinal (número introducido por George Cantor) de un conjunto. Se dice que dos conjuntos A y B son equipotentes ($A \approx B$), si existe una biyección de A sobre B. Se trata de definir el cardinal de un conjunto A (#A) por abstracción de la propiedad de equipotencia, es decir, la propiedad fundamental del cardinal debe ser la siguiente: dados dos conjuntos cualesquiera A y B, #A = #B, si y solo si $A \approx B$.

El uso formal de los cardinales presenta grandes problemas, o sea, se adopta como "*definición*" de trabajo que a todo conjunto A se le hace corresponder el "*símbolo*" #A, con la propiedad esencial, anotada arriba se pueden definir las operaciones entre cardinales, estudiar sus propiedades, etc. Por ejemplo, 0 se define como $\#\phi$, 1 como el cardinal común de los conjuntos con un solo elemento, etc. El problema radica en que #A debe ser un término definido dentro de la teoría de conjuntos.

Hace un siglo se definió #A como el conjunto de todos los conjuntos equipotentes con A, pero esto condujo a conjuntos "*paradójicos*". Dentro del sistema de Z-F se puede desarrollar la teoría de los cardinales usando solo el axioma de fundamentación, pero no excluyéndolos a ambos.

Para la construcción de los números naturales, no necesitamos el concepto de cardinalidad de un conjunto cualquiera, sino únicamente el de cardinal de un conjunto finito y para esto el sistema Z-F, no necesita apelar al axioma de elección ni al axioma de fundamentación. Veamos algunos conceptos:

(i) Decimos que un conjunto X es recurrente, si $\phi \in X$ y para todo elemento $x \in X$, se tiene que $(X \cup \{x\}) \in X$, el axioma del infinito nos dice precisamente que existen conjuntos recurrentes.

(ii) Existe un conjunto recurrente mínimo W, en el sentido de que si X es un conjunto recurrente arbitrario, la intersección de todas las partes de X que sean conjuntos recurrentes es el conjunto recurrente W, que no depende de la elección de X, los elementos de W son:

(iii) $\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$, etc.

(iv) Decimos que un conjunto A es finito, si A es equipotente a algún elemento de W, que será por definición #A.

(v) Se definen los números naturales como los cardinales de los conjuntos finitos, es decir, como los elementos del conjunto recurrente mínimo W.

No es difícil verificar que si llamamos $0 = \#\phi$ y definimos para $n \in W$ el siguiente de n como $n' = n \cup \{n\}$, entonces W verifica los axiomas de Peano.

N_1 y N_2: se cumplen por ser W recurrente.

N_2: si fuera $\phi = n \cup \{n\}$, tendríamos $n \in \phi$, contrario a la definición de ϕ.

N_3: si $S \subset W$, tiene la propiedad de que $\phi \in S$ y que para todo $n \in S$, $(n \cup \{n\}) \in S$, entonces, S es recurrente y por lo tanto contiene al conjunto mínimo de donde $S = W$.

N4 : Ante todo se muestra (usando N5) que todo n tiene la propiedad de que si $p \in n$, entonces $p \in n$. Una vez establecido esto, supongamos que para $m, n \in W$, se tenga $m \cup \{m\} = n \cup \{n\}$; si fuera $m \neq n$, tendríamos necesariamente $m \in n$, y $n \in m$, luego, por la observación anterior, $m \subset n$ y $n \subset m$, de donde $m = n$ (contradicción).

Lo que se ha hecho es identificar los naturales con ciertos conjuntos de tal manera que se obtengan las propiedades matemáticas que se desea tener para los números naturales. Más precisamente para estudiar la abstracción de la propiedad de equipotencia de los conjuntos finitos, hemos dado una manera canónica de hacer corresponder a cada conjunto finito, un conjunto muy bien determinado que le es equipotente.

3. Los Números Enteros

El origen de la noción de número se pierde entre las brumas de la prehistoria; para llegar a este concepto de por sí ya muy abstracto, a partir de situaciones concretas repetidas una y otra vez debieron transcurrir, decenas de miles de años.

Los números negativos no fueron conocidos por los matemáticos de la antigüedad salvo en el caso de *Diofanto* (siglo III D. de C.) que en su aritmética al explicar el producto de dos diferencias, introduce un número con signo +. En el siglo VI los hindúes *Brahmagupta Bhaskara* usan los números negativos de un modo práctico, sin llegar a una definición de ellos. Durante la edad media y el renacimiento los matemáticos rehuyeron el uso de números negativos, y fue *Newton* el primero en comprender la naturaleza de éstos. Posteriormente *Hamont* (1560-1621) introdujo los signos + y -.

Históricamente los números negativos surgen para hacer posible la resta en todos los casos posteriormente se usaron para representar números relativos, o, con signo (por ejemplo, escalas de temperatura).

Los números enteros se pueden obtener como diferencia de dos naturales. Si definimos $m\text{-}n = (m,n)$ en donde m, $n \in N$. Entonces podemos definir un *número entero* como una pareja ordenada de dos naturales, y como infinitas parejas determinan el mismo entero, se consideran equivalentes las que produzcan la misma diferencia (el mismo entero), esto es:

$$(m, n) \sim (p, q) \subset m + q = n + p$$

A partir de lo anterior, se definen las operaciones entre clases de equivalencia (enteros) y se determinan sus propiedades. También se establece la equivalencia de la relación antes definida y su compatibilidad con las operaciones definidas. Por último se establece el orden en Z, y sus respectivas propiedades.

4. Los Números Racionales

Mucho antes de que los griegos (Eudoxio, Euclides, Apolonio, etc.) realizaran la sistematización de los conocimientos matemáticos, los babilonios (según muestran las tablillas cuneiformes que datan de 2000-1800 a. de C.) y los egipcios (como se ve en el papiro de Rhin), conocían las fracciones.

Se definen los racionales en forma parecida a la usada para definir a los enteros: se parte del conjunto Z de los números enteros y su estructura, se define el conjunto B = ZxZ y en ese conjunto se define una relación de equivalencia ≈ (que tenga en cuenta $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$) se define también en B las operaciones ⊕ y ⊗. La necesidad de medir magnitudes continuas como la longitud, el peso, etc. Llevó al hombre a introducir los números fraccionarios.

5. Los Números Irracionales

Es indudable que fueron los griegos quienes concibieron primero los números irracionales. Los historiadores atribuyen a *Pitágoras* (540 a. C.), el descubrimiento de estos, al establecer la relación entre el lado de un cuadrado y la diagonal del mismo. Más tarde, *Teodoro de Cirene* (400 a.C.) matemático de la escuela pitagórica, demostró geométricamente que $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7}$, etc., son irracionales. *Euclides* (300 a. C.) analizó en el libro X de sus "elementos", ciertas cantidades que al ser medidas no se encontraba ningún entero o fraccionario que los expresará.

¿Qué es un número real?

Es una pregunta difícil de contestar, a la que no se dio una respuesta satisfactoria sino hasta mediados del siglo XIX. En la vida práctica, al hombre le bastan los racionales, sin embargo, dentro de ellos no se hallan soluciones de ecuaciones sencillas como $x^2-2 = 0$.

Los griegos basaron sus construcciones matemáticas en la teoría de la conmensurabilidad (si se toma la medida de un segmento como unidad y se mide otro el resultado, siempre es un número racional).

Al encontrarse con los números irracionales, los griegos tuvieron que revisar casi la realidad de la teoría de las proporciones que habían desarrollado, buscando métodos que permitieran efectuar las demostraciones, aún en casos no conmensurables.

Eudoxio propuso la siguiente definición de proporcionalidad: si AB, CD, EF y GH son longitudes de segmentos, AB: CD = EF:GH significa que para todo por de números positivos p, q,

$$p \cdot CD < q \cdot AB \leftrightarrow p \cdot GH < q \cdot EF.$$

Es muy ingeniosa, eliminando la definición de número real (no definiendo una razón) y dando sólo el concepto de igualdad entre razones mediante el uso de naturales no nulos.

La definición de Eudoxio se puede modificar ligeramente:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

si y solo si,

$$\left(\forall p, q \in \mathrm{N} - \{0\}\right)\left(\frac{p}{q} < \frac{AB}{CD} \Leftrightarrow \frac{p}{q} < \frac{EF}{GH}\right),$$

es decir, los números reales $^{AB}/_{CD}$ y $^{EF}/_{GH}$ son iguales si y solo si, todo racional menor que uno de ellos, también es menor que el otro. Esta definición de igualdad es muy útil y rigurosa.

Cuando *Richard Dedekind* (1.831-1.916) estaba buscando un método para construir en forma rigurosa los números reales, se encontró con sorpresas, que estaba retomando las ideas de Eudoxio. Decidió que lo único que necesitaba era darles un soporte diferente.

El trabajo de Dedekind (basado en Eudoxio) no necesitaba conocimientos sobre convergencia de sucesiones. Dedekind introdujo el número real por un método llamado *"de las cortaduras"*. Cada cortadura es una clasificación especial de los números racionales en dos clases y determina un número real. Contrariamente a lo que ocurre con los métodos de los *"encajes de intervalos"* y de *"sucesiones"*; un número real queda determinado por una única cortadura, si es irracional y por solo dos de ellas si es racional.

Se llama una ***cortadura de Dedekind*** al conjunto Q de los números racionales (o cortadura en el campo racional), a racionales en dos clases A y B de tal modo que:

(i) Ambas clases contienen números, (son no vacías).

(ii) Todo número de la clase A es menor que cualquier número de la clase B: $a \in A$ y $b \in B \Rightarrow a < b$.

(iii) Todo número racional pertenece a una de las dos clases.

La cortadura así definida se denota (A,B): la clase A se llama *clase inferior* y la clase B se llama *clase superior*.

De aquí en adelante el trabajo de Dedekind consiste en establecer la relación de equivalencia entre las cortaduras u operaciones entre cortaduras y orden con sus respectivas propiedades.

5.1 Intervalos encajados

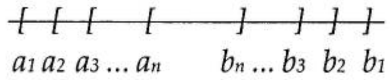
Todo número real está representado por un punto de un eje de abcisas, y al considerar aproximaciones racionales por defecto y por exceso, cada vez mejores, este punto aparece como punto común de los infinitos intervalos cerrados de una sucesión.

$$[a_1,b_1],\ [a_2,b_2],\ldots,\ [a_{n-1},\ b_{n-1}],\ [a_n,b_n],\ldots$$

con estas propiedades, cada intervalo está contenido en el anterior

$$[a_n,b_n] \subset [a_{n-1},\ b_{n-1}],$$

y sus longitudes llegan a ser tan pequeñas como se quiera



La sucesión se llama *encaje de intervalos* y cada número real se expresa como un elemento común a todos los intervalos de un encaje de intervalos.

Idea del método de Cantor

George Cantor nació en Rusia y fue creador de la teoría de los conjuntos, base de la matemática moderna, introdujo un nuevo tratamiento del infinito; los números transfinitos y generalizó conceptos tan fundamentales como los de número cardinal y ordinal.

El trabajo de Cantor se puede resumir en lo siguiente: si consideramos el número real A determinado por el encaje de intervalos anteriormente definido, vemos que los extremos inferiores $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, forman una sucesión de números racionales que se aproximan tanto como se quiera al número A. Lo mismo ocurre con las sucesiones de extremos superiores $b_1, b_2, ..., b_n, ...$. Y con cualquier otra que se forme considerando todos o algunos de sus extremos.

Por lo tanto, de aquí en adelante, el problema consiste en analizar convergencia de sucesiones (más exactamente, sucesiones de Cauchy). El único problema que puede existir aquí, es que un número real se puede determinar por diferentes encajes de intervalos racionales.

Dos encajes de intervalos

$$[c_1, d_1], [c_2, d_2], \dots, [c_n, d_n] \dots,$$

y

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n] \dots,$$

determinan el mismo número real si cada extremo inferior de un intervalo de uno de ellos es menor o igual que todo extremo superior de un intervalo del otro.

$$a_i \leq d_j,\ c_i \leq b_j, \qquad (1\text{-}1)$$

para cualquier par de índices i, j.

Ahora bien, si definimos una relación E, entre los encajes de intervalos estableciendo que el encaje $[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n]...$, está relacionado con $[c_1, d_1], [c_2, d_2], ..., [c_n, d_n], ...$, si se cumple la condición (1-1), es fácil ver que E es una relación de equivalencia. Por lo tanto determinan una partición del conjunto de los encajes de intervalos en clases de equivalencia.

Como dos encajes de intervalos racionales de la misma clase de equivalencia determinan un mismo número real, será oportuno definir el número real, no por una clase de intervalos racionales sino por una clase de equivalencia de tales encajes. Posteriormente el trabajo consiste en establecer operaciones entre clases, sus propiedades, su orden, etc.

6. Sucesiones de Cauchy

Cauchy, Agustín-Louis (1.789-1.857) fue uno de los fundadores del análisis moderno, desarrollo la teoría de las funciones de variable compleja y contribuyó decisivamente a rigorizar el cálculo infinitesimal mediante los conceptos básicos de limite y de continuidad.

Sucesión de Cauchy

Una sucesión de números reales $C_1, C_2, ..., C_n$, se llama de Cauchy si para cada número real positivo ε existe un número N tal que,

$$(\forall_n > N)\ (\forall m > N)(|c_n - c_m| < \varepsilon).$$

El método de George Cantor se basaba en la determinación de un número real mediante una sucesión fundamental de números racionales. Pero un mismo número real puede se puede aproximar tanto como se quiera por diferentes sucesiones de números racionales. Por lo tanto es conveniente dar la siguiente definición.

Definición 1.1.
Dos sucesiones fundamentales

$$c_1, c_2, \dots, c_n, \dots,$$

y,

$$d_1, d_2, \dots, d_n, \dots,$$

se llaman ***equivalentes***, si para cada entero positivo ε, existe un número $N\varepsilon$ tal que

$$n > N\varepsilon \Rightarrow |c_n - d_n| < \varepsilon.$$

Dos sucesiones fundamentales equivalentes determinan el mismo número real. Se puede comprobar fácilmente que la relación así definida es de equivalencia y por lo tanto define una partición del conjunto de las sucesiones fundamentales en clases de equivalencia. Es decir, que todas las sucesiones fundamentales de una misma clase de equivalencia determinan el mismo número real.

Entonces, en el método de Cantor, si bien cada número real se puede determinar por una sucesión fundamental de números racionales, se lo define como una clase de equivalencia de tales sucesiones.

El trabajo de Cantor continúa con la definición de operaciones y sus propiedades entre estas clases de equivalencia y también de su orden y propiedades.

Conclusiones

1. Existieron dos (2) corrientes matemáticas para la construcción de los números reales que fueron los Algebristas y los Analistas. Los Algebristas se interesaron siempre por asegurar la propiedad de la cota superior mínima; mientras que los Analistas utilizaron la convergencia de las sucesiones de Cauchy de números Racionales.

2. El punto de partida de estas construcciones se basó en el supuesto de la existencia del conjunto de los números racionales.

3. Los números reales son un cuerpo ordenado completo, es decir posee las nueve (9) propiedades con respecto a la suma y el producto y además se puede establecer cuando un número es menor o igual que otro con sus respectivas propiedades de orden.

Bibliografía

DIEUDONE, J. *Fundamentos de An·lisis Moderno*. Editorial Reverté S.A.: Barcelona, 1.979.

MUÑOZ Q., José María. *Introducción a la teoría de conjuntos*. Universidad Nacional de Colombia: Departamento de Matemáticas y Estadística, Bogotá D.E. 1.983.

SUPPES, Patrick. *Teoría axiomática de conjuntos*. Editorial Norma: Cali, 1.968.

SPIVAK, Michael. *Calculus*. Editorial Reverte: Barcelona, 1.978. Tomo I, II.

TAKEUCHI, Yu. *Sistemas numéricos*. Boletín de Matemáticas No. 3. Sociedad Colombiana de Matemáticas y Universidad Nacional de Colombia: Departamento de Matemáticas y Estadísticas: Bogotá, D.E., 1.973.

TREJO, César A. *El concepto del número*. O.E.A., monografía No. 7, Serie de matemática: Washington D.C., 1.968.