ORGANIZAÇÃO CURRICULAR DA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: A RECURSÃO COMO CRITÉRIO

Organization of the high school mathematics curriculum: recursion as a criterion

Marcio Antonio da Silva[1] • Célia Maria Carolino Pires[2]

Resumo: Este ensaio teórico tem como objetivo fomentar discussões sobre a organização curricular da Matemática no Ensino Médio brasileiro, por intermédio da apresentação de resultados de pesquisas que convergem para a necessidade da quebra do paradigma organizacional linear, ilustrado por metáforas como: do balde, do edifício e da cadeia de elos. Para superação deste modelo, apresentamos três outras metáforas – do currículo em espiral, do currículo em rede e do currículo fractal – que expressam uma forma relativamente nova de se conceber o conhecimento, em uma perspectiva pós-moderna e influenciada pela Teoria da Complexidade. Analisamos a recursão como um critério organizacional dos currículos de Matemática, contemplando o que nomeamos de aspectos inter e intramatemáticos. Concluímos que os conteúdos matemáticos podem ganhar mais significado quando amplamente contextualizados em outras disciplinas e em outros blocos de conteúdo, bem como referenciando assuntos já estudados em séries anteriores, porém, em novos contextos e em situações mais sofisticadas.

Palavras-chave: Educação matemática. Currículo. Ensino Médio. Ensino de matemática. Recursão.

Abstract: This theoretical essay aims at stimulating discussions on the mathematics curriculum in Brazilian high schools, through the presentation of research results that converge on the necessity of breaking the linear organizational paradigm, as illustrated by the metaphor of the bucket, building and chain links. To overcome this model, we present three other metaphors – the spiral curriculum, network curriculum and fractal curriculum. They express relatively new ways of conceiving knowledge in a postmodern perspective and influenced by complexity theory. We analyze recursion as a criterion of the organizational mathematics curriculum, contemplating what we name inter- and intra-mathematical aspects. We conclude that the mathematical content can gain more meaning when contextualized widely in other disciplines and other blocks of content and referencing issues already studied in previous series, but in new contexts and situations are more complex.

Keywords: Mathematics education. Curriculum. High School. Mathematics teaching. Recursion.

[1] Instituto de Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Cidade Universitária, Caixa Postal 549, Campo Grande, MS, CEP 79070-900, Brasil. <marcio.silva@ufms.br>
[2] Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, SP, Brasil.

Considerações iniciais

Este artigo apresenta parte dos resultados da tese de doutorado de Silva (2009), na qual foram propostos oito critérios para escolha e organização de conteúdos matemáticos no Ensino Médio.

Embora tenha sido utilizado um vasto repertório de autores e teorias para construir estes critérios, dois deles destacaram-se no processo de escrita e reflexão sobre o tema: o conceito de currículo pós-moderno de William E. Doll Jr. (1997) e a definição de currículo crítico de Ole Skovsmose (2001).

Os oito critérios (os 8 R)[3] foram ampliados dos 4 R[4] construídos por Doll Jr. (1997) que, por sua vez, estendeu os 3 R[5] do moderno currículo estadunidense do início do século XIX, caracterizado pela supremacia do binômio máquina e produtividade (PIRES, 2004), ou seja, o predomínio e a influência do pensamento fabril nas orientações curriculares e na educação em geral.

Neste texto apresentaremos um deles: a recursão. Embora não seja um critério original, já que é um dos 4 R de Doll Jr. (1997), a singularidade de nosso trabalho está no fato de nos apropriarmos das considerações deste autor, reconstruindo-as a partir do ponto de vista de educadores matemáticos.

Classificamos este critério como predominantemente organizacional, pois compreendemos que, embora organização e seleção de conteúdos sejam ações imbricadas, as considerações que faremos neste artigo estão eminentemente ligadas à organização de currículos de matemática no Ensino Médio.

Além das próprias considerações de Doll Jr. (1997) sobre a recursão, utilizaremos três metáforas para ilustrar nossa concepção de organização curricular construída a partir de reflexões sobre este critério: (i) o currículo em espiral; (ii) o currículo em rede; (iii) o currículo fractal.

Estas metáforas se contrapõem às de organização linear de um currículo, na qual a ideia de 'pré-requisito' aparece fortemente, reforçando mitos que foram criados a respeito do conhecimento, ligando-os à ideia de acumulação e linearidade dos conteúdos predeterminados em sequências rígidas, não admitindo nenhuma modificação na sua forma de sucessão de etapas moldadas e rigorosamente estruturadas. Também apresentaremos três metáforas para explicar esse tipo de organização: (i) a metáfora do balde; (ii) a metáfora do edifício; (iii) a metáfora da cadeia de elos.

Na metáfora do balde, o conhecimento é concebido como algo acumulado ao longo do tempo de vida, e a avaliação é como uma vareta que mede quanto alguém conhece sobre algo, caracterizando a ideia, impregnada em muitos ambientes escolares, de que o conhecimento pode ser transferido ou estocado.

[3] Riqueza, reflexão, realidade, responsabilidade, recursão, relações, rigor e ressignificação.
[4] Riqueza, recursão, relações e rigor.
[5] Reading (leitura), writing (escrita) e arithmetic (aritmética).

O papel do professor, nessa concepção, é o de transmissor de um conhecimento que existe para poucos (saber científico), e, após sua apresentação aos alunos, cabe aos mesmos valorizarem-no e assimilá-lo. A não-compreensão é vista como problema do estudante, que desvaloriza a oportunidade que teve de 'receber' os conhecimentos 'despejados' em sua mente. Ao professor, sempre cabe a primazia de ser o detentor de um saber; e ao aluno, o privilégio de tomar ciência desses saberes. Não existe transformação, não existe valorização de conhecimentos espontâneos e experienciais, pois, como o líquido sendo despejado dentro de um balde, parte-se do zero. A avaliação é criteriosa, sendo comuns notas atribuídas com precisão de centésimos de ponto.

A metáfora do edifício apregoa a necessidade de uma boa base ou de um alicerce sólido para poder se construir o 'edifício do conhecimento'. É muito comum, no discurso de educadores, a ênfase dada a essa característica linear do currículo. Em geral, dizem que a Matemática é semelhante a um grande edifício, e a construção de cada andar depende da solidez do alicerce e da edificação dos andares precedentes.

Essa convicção, além de reforçar a ideia de linearidade na abordagem dos conteúdos matemáticos, ainda os desvincula de suas possíveis relações e da impregnação mútua com a língua materna[6].

A terceira metáfora, representativa do conhecimento linear, é a da cadeia de elos, na qual um conhecimento depende de outro e não é possível deixar um elo de fora, pois, caso isso ocorra, será impossível continuar a construção de novos conhecimentos sem que esse elo seja refeito.

É evidente a ideia de pré-requisito nesse modelo, embora devamos esclarecer que acreditamos que é indiscutível o fato de alguns conteúdos respeitarem uma ordem predefinida. Vejamos, por exemplo, como seria possível abordar gráficos de funções de qualquer tipo, sem que o aluno tenha obtido informações suficientes a respeito do que é um plano cartesiano e como um ponto pode ser representado no mesmo.

Embora seja indispensável abordar esses tópicos preliminares, é possível fazê-lo, desde que se coloque de lado o apego extremo ao cumprimento do planejamento do tempo para as aulas da semana, do mês, do bimestre ou, até mesmo, de todo o ano letivo, e favoreça o *conhecer profundamente o pouco* em detrimento do *em nada conhecer o todo.*

Pires (2000, p. 68) exemplifica esse condicionamento de alguns conteúdos constituintes de programas, inclusive oficiais, expressões claras da ideia de linearidade que pode ser rompida em uma visão que compreende o conhecimento como um enredar de significados e nós interligados por interesses e vivências pessoais.

- Geometria: ponto, reta, plano, espaço.
- Medidas: comprimento, área, volume.
- Conjuntos, relações, funções.
- Triângulos, quadriláteros, polígonos.
- Limites, derivadas, integrais.

[6] Ver Machado (2001).

Esses cinco temas poderiam ser trabalhados de maneira muito mais enriquecedora para os aprendizes, caso fossem exploradas as relações existentes entre eles e ficassem claras as situações similares que seriam passíveis de generalizações e outras que evidenciariam exceções.

Descreveremos o que seria um currículo recursivo de matemática no Ensino Médio, quebrando estas concepções lineares manifestas por estas três metáforas e refletindo sobre as três metáforas enunciadas no início deste artigo, bem como a própria proposta de recursão, segundo Doll Jr. (1997), como um dos critérios para construir um currículo pós-moderno.

A recursão

Para apresentar o critério recursão, Doll Jr. (1997, p. 194)) utiliza uma analogia com a computação e associada à iteração:

> Recursão – Derivada de recorrer, ocorrer novamente, a recursão é normalmente associada à operação matemática da iteração. Na iteração uma fórmula é "aplicada" repetidamente, com o resultado de uma equação sendo o *input* para a próxima. Em $y = 3x + 1$, um y de 4 (se o $x = 1$) torna-se o próximo x, e o novo y de 13 torna-se o próximo x, e assim por diante. Nessas iterações, existe tanto estabilidade quanto mudança; a fórmula permanece a mesma, as variáveis mudam (de maneira ordenada, mas muitas vezes impredizível).

O pesquisador também enfatiza aspectos do currículo em espiral, de Jerome Bruner (1973), para ilustrar este critério. No entanto, cabe analisarmos esta proposta curricular levando em conta o panorama histórico da época. Faremos isto ao tratarmos sobre a metáfora de currículo como espiral.

No aspecto metodológico, esse critério também traz repercussões, ao constatarmos a distinção patente que Doll Jr. (1997, p. 195)) destaca entre as palavras recursão e repetição:

> A diferença funcional entre a repetição e a recursão está no papel que a reflexão desempenha em cada uma. Na repetição, a reflexão desempenha um papel negativo; ela interrompe o processo. Existe uma certa automaticidade na repetição que mantém o mesmo processo em andamento – de novo e de novo e de novo, como nos exercícios de Aritmética com a apresentação de cartões ou nos exercícios de tênis com uma máquina que arremessa bolas. Na recursão, a reflexão desempenha um papel positivo; para que os pensamentos se conectem com eles mesmos, como na experiência secundária de Dewey refletindo sobre a experiência primária, ou na inteligência reflexiva de Piaget refletindo sobre a inteligência prática, é necessário, como disse Bruner, que recuemos naquilo que estamos fazendo, que "nos distanciemos de alguma maneira" dos nossos próprios pensamentos.

Podemos aproveitar a analogia feita pelo autor relacionando exercícios com repetição e estendendo-a para estabelecer uma convergência entre recursão e a necessária reflexão subjacente a esse processo, bem como a resolução de problemas. No entanto, cabe apontar que discordamos da posição de Doll Jr. (1997) quando se refere à repetição como desempenhando um papel negativo e interrompendo o processo.

No ensino de Matemática, assim como no aprendizado de uma nova língua, a repetição tem um papel importante e os exercícios, ainda que repetitivos na estratégia de resolução, desempenham função primordial para aprimorar o rol de conhecimentos e, por que não dizer, técnicas. É claro que a dose de repetição deve ser muito bem planejada e nunca exagerada, pois não acreditamos em mera fixação de conhecimentos.

Já a resolução de problemas, por não possuir estratégia ou técnica de resolução conhecida, *a priori*, proporciona a possibilidade de uma reflexão ampla, distanciada da mera aplicação de um conteúdo específico, exigindo estratégias mais complexas e a mobilização de diversos conceitos aprendidos anteriormente – no que concordamos com Doll Jr. (1997) que, na perspectiva de construção de um currículo de Matemática para o Ensino Médio, enfatizando o critério recursão como crivo de escolha, essa metodologia seria a mais indicada.

O currículo em espiral

Bruner apresenta seu conceito de currículo em espiral no livro 'Process of education', publicado em 1960 e resultado do encontro realizado, em 1959, pela National Academy of Sciences, em Woods Hole, localizada no estado de Massachusetts. Sabemos que, no mesmo período, o Movimento Matemática Moderna (MMM) ganhou força nos Estados Unidos e, neste país, as reformas curriculares são estimuladas por acontecimentos históricos. Dentre eles, o lançamento do satélite artificial Sputnik, em outubro de 1957, ocorrido na antiga União Soviética, o que desencadeou a criação de um ambiente propício para que fossem levantadas conjecturas sobre a possível existência de um atraso educacional estadunidense, sobretudo no que concerne à formação científica. É fato que Bruner não estava alheio a este movimento, o que pode ser evidenciado pelas inúmeras citações às pesquisas do School Mathematics Study Group (SMSG), quando ilustrava suas ideias por intermédio de exemplos sobre o ensino da Matemática. Como se sabe, este grupo de estudo estadunidense, fundado em 1958, foi um dos grandes responsáveis pela divulgação e pesquisa sobre o MMM em vários países, inclusive no Brasil.

Para Bruner (1973, p. 12), "um currículo, à medida que se desenvolve, deve voltar repetidas vezes a essas ideias básicas, elaborando e reelaborando-as, até que o aluno tenha captado inteiramente a sua completa formulação sistemática". O autor estabelece uma conjectura audaciosa, justificando que não há evidências que se opõem à mesma: "Partimos da hipótese de que qualquer assunto pode ser ensinado com eficiência, de alguma forma intelectualmente honesta, a qualquer criança, em qualquer estágio de desenvolvimento. É uma hipótese arrojada, mas essencial, quando se pensa sobre a natureza de um currículo" (BRUNER, 1973, p. 31).

Parece-nos extremamente forte a tendência estruturalista de Bruner. Sobre a Matemática, o pesquisador exemplifica:

> [...] tomando um exemplo (de estrutura) da matemática, a álgebra é um modo de dispor, em equações, elementos conhecidos e desconhecidos, de modo que os desconhecidos se tornem conhecíveis. As três propriedades implicadas no trabalho com essas equações são comutação, distribuição e associação. Uma vez que um aluno capte as ideias contidas nessas três propriedades, está em condições de reconhecer em que casos "novas" equações a resolver não são de modo algum novas, mas apenas variações sobre um tema familiar. (BRUNER, 1973, p. 7)

Sobre seu conceito de "currículo em espiral", Bruner (1973) novamente traz um exemplo da Matemática:

> Se se considera crucial a compreensão de número, medida ou probabilidade na busca da ciência, então a instrução nesses assuntos deverá ser iniciada tão cedo e da maneira intelectualmente mais honesta possível e consistentemente com as formas de pensar da criança, deixando que os tópicos sejam desenvolvidos várias vezes em graus posteriores. (BRUNER, 1973, p. 49)

As ideias deste autor trazem grandes e importantes implicações para os currículos de Matemática do Ensino Médio. Talvez a maior delas esteja na necessidade de se aliarem temas à cognição dos estudantes. A preocupação não está em selecionar conteúdos a partir da idade dos aprendizes, mas na forma como estes são apresentados, ou seja, levando em conta: a linguagem utilizada pelo professor, a metodologia adotada, se o conteúdo será abordado de maneira profunda ou superficial, entre outros fatores.

Bruner (1973) enfatiza a necessidade de se compatibilizarem os pensamentos intuitivo e analítico. Interessante notar que ele não preconiza o uso de uma hierarquia – sobretudo, o apregoado mito que enfatiza a necessidade de se partir do intuitivo para chegar ao analítico – mas a harmonia entre ambos:

> Cremos que deveria ser reconhecida a natureza mutuamente complementar dos pensamentos intuitivo e analítico. Através do pensamento intuitivo, o indivíduo poderá, muitas vezes, chegar a soluções para problemas que não conseguiria alcançar de modo algum ou, quando muito, só mais lentamente, através do pensamento analítico. Uma vez conseguidas por métodos intuitivos, essas soluções deverão, se possível, ser verificadas por métodos analíticos, sendo ao mesmo tempo respeitadas como hipóteses válidas para tal verificação. Realmente, o pensador intuitivo pode até mesmo inventar ou descobrir problemas que o analista não descobriria. Poderá ser, contudo, o analista, quem irá dar aos problemas o formalismo conveniente. (BRUNER, 1973, p. 54)

A metáfora da espiral não é uma ideia original de Bruner. John Dewey (1910) já havia feito referência ao "constante movimento do conhecimento em espiral"[7]:

> Nosso progresso em conhecimento genuíno sempre consiste na descoberta de algo não compreendido no qual havia sido previamente dado como certo, óbvio, algo que se espera, e em parte no uso de significados que são compreendidos sem dúvida, como instrumentos para se aproximar do obscuro, duvidoso e de significados desconcertantes. (DEWEY, 1910, p. 120, tradução nossa)

Dewey (1910) também enfatiza que este processo não possui fim, sendo retomado continuamente. Cada final produz um novo início, produzindo um progresso intelectual: "não há fim para este processo em espiral: temas externos transformados pelo pensamento para dentro de uma propriedade familiar tornam-se um recurso para julgar e assimilar temas externos adicionais" (DEWEY, 1910, p. 223, tradução nossa).

Mais adiante, ilustraremos esta e as outras metáforas por intermédio de exemplos sobre os conteúdos matemáticos do Ensino Médio, mas podemos sintetizar a metáfora do currículo em espiral: os conteúdos ou bloco de conteúdos são tão mais importantes quão maiores forem as possibilidades de serem retomados em outras etapas da Educação Básica, ou seja, a ênfase está na articulação e integração curricular vertical. Cada tema é abordado, inicialmente, em sua essência, com suas características peculiares mais importantes para, depois, ser explorado em outros contextos, na maioria deles como ferramenta para resolver parte de uma situação-problema mais complexa, servindo como uma das partes que irão compor um novo conceito.

A cada retomada de determinado assunto, um currículo deve exigir, dos estudantes, uma combinação sensata entre o pensamento analítico e intuitivo. É desejável que as atividades proporcionem situações que estimulem o aluno a refletir, conjecturar, inferir, estimar, demonstrar, provar, relacionar, analisar, e não apenas calcular, encontrar, seguir, observar, efetuar.

Talvez a metáfora não seja a melhor para descrever o que Bruner e Dewey preconizavam, pois o próprio desenho de uma espiral nos remete a sensações como: estrutura bem definida, padrão matematicamente calculável, etapas temporais previsíveis, além da ideia de repetição. As próximas metáforas, embora nos causem algumas destas mesmas sensações, nos conduzem por outras mais ligadas à complexidade do pensamento humano e a consequente impossibilidade de se predefinirem todas as etapas a serem trabalhadas, como se a especificidade de cada estudante, cada sala de aula e cada escola fosse desconsiderada.

[7] No original: "constant spiral movement of knowledge" (DEWEY, 1910, p. 120).

O currículo em rede

No campo tecnológico, Lévy (1993) define e explora a ideia de hipertexto. Consideramos que esse conceito reflete a maneira natural com a qual o conhecimento pode ser construído e as informações acessadas. Senão vejamos: quando realizamos alguma pesquisa em livros, não seguimos um caminho linear, ou seja, não lemos o livro todo buscando extrair apenas alguns assuntos específicos. É óbvio que não estamos nos referindo à leitura de um romance, embora vários autores, inclusive lançando mão de novas linguagens utilizadas por cineastas, quebrem a linearidade da leitura, conduzindo o leitor a caminhos que evitam a sequencialidade, realizando uma complexa montagem das cenas ou, até mesmo, interpretando a condução do enredo de diferentes formas.

A ideia de hipertexto fica ainda mais explícita quando nos referimos à rede mundial de computadores: a internet. Ao buscarmos determinadas informações, podemos seguir vias diversas. Em um primeiro momento, podemos procurar por sítios de busca e, após uma breve pesquisa, surpreendermo-nos com novos assuntos interessantes, mudando o rumo predeterminado, e, após isso, possivelmente voltamos ao que estávamos procurando inicialmente, até encontrarmos o que queríamos. Mas, afinal, qual o melhor caminho? Ou qual o caminho correto? Sabendo-se o endereço da página em que estamos interessados, o tempo seria menor, mas a quantidade de informações também seria bem menor. Seguir um caminho mais longo poderia trazer uma quantidade de informações maior. Portanto, não existe caminho correto, existem diversos caminhos, cada um com sua riqueza de informações e possibilidades.

Machado (2005) cita seis princípios aos quais Lévy recorre para caracterizar o hipertexto: o princípio da metamorfose evidencia a constante transformação existente nas informações constituintes da rede; o princípio da heterogeneidade ressalta as diferentes formas de relacionar dois ou mais 'nós' dessa rede, caracterizado pela multiplicidade de sensações provadas por vários meios (sons, leituras textuais, figuras, entre outros); o princípio de multiplicidade e de encaixe das escalas traz relações interessantes sobre a fractalidade de uma rede, caracterizando o caos na perspectiva pós-moderna, como Doll Jr. (1997) acredita e que detalharemos melhor na descrição da próxima metáfora; o princípio da exterioridade salienta a impossibilidade de existência de uma rede presa à sua unicidade sem a adição de elementos externos que sirvam como propulsores de transformações e interconexões entre várias redes; o princípio da topologia ignora o princípio euclidiano de distância e caracteriza-se pela variedade de possibilidades de ligações entre os 'nós' constituintes de uma ou mais redes; finalmente, o princípio da mobilidade dos centros evidencia a ausência de 'nós' principais caracterizados *a priori*. Poderíamos pensar sobre 'nós' mais importantes dentro de caminhos percorridos, mas estes poderiam variar em diferentes contextos e para diferentes pessoas.

Com base no estudo dessas diferentes concepções e teorias, propomos que um desenho curricular deve ser composto por uma pluralidade de pontos, ligados entre si por uma variedade de ramificações e caminhos, de tal forma que nenhum ponto (ou caminho) seja privilegiado em relação a outro, nem unicamente subordinado a qualquer um deles.

Escolhidos alguns temas (nós), não importa quais, os primeiros fios começam a ser puxados, dando início a percursos ditados pelas significações numa ampliação de eixos temáticos. Com isso, há condições de se fazer com que o estudo de qualquer conteúdo seja significativo para o aluno, e não justificado apenas pela sua qualidade de pré-requisito para o estudo de outro conteúdo.

Esse procedimento abre perspectivas para a abordagem interdisciplinar, pois, na medida em que cada professor busca relações de cada tema com outros assuntos, estejam eles no interior de sua disciplina ou fora dele, construir-se-ão novas ramificações desta rede.

Tal perspectiva implica um processo de constante construção e renegociação do currículo, que leve em conta o princípio de metamorfose das redes. Ou seja, decisões e ações podem permanecer estáveis durante um certo tempo, mas esta estabilidade deve ser fruto de um trabalho pedagógico, constantemente avaliado.

As disciplinas fornecem o mapa de navegação na rede curricular e os especialistas de cada disciplina funcionam como consultores. A construção do projeto educacional da escola, que envolve a colaboração das diferentes disciplinas, deve procurar abarcar, adequadamente, o amplo campo da cognição humana, incluindo um conjunto mais amplo e universal de competências do que comumente se tem considerado.

O currículo fractal

Da mesma forma que a inspiração metafórica de hipertexto dá origem à ideia de organização em rede, a metáfora fractal para o currículo remonta à Teoria da Complexidade, própria de um período nomeado por vários pesquisadores como pós-moderno.

Para Demo (2008, p. 13) a complexidade:

> [...] remete ao conceito já comum de caos estruturado. Duas ideias conjugam-se aí: fenômeno ao mesmo tempo caótico e estruturado. É caótico no sentido de que seu ser apresenta-se dotado de propriedades não lineares ou de dinâmica também ambígua/ambivalente. É estruturado porque, na maior desordem, sempre é possível divisar alguma ordem.

A recursão tem um papel preponderante neste conceito. Morin (2003) a elege como um dos três princípios[8] que podem nos ajudar a pensar a complexidade. O pesquisador enfatiza características comuns ao conceito de organização do conhecimento em rede, como a não-linearidade e a auto-organização: "a ideia recursiva é portanto uma ideia de ruptura com a ideia linear de causa/efeito, de produto/produtor, de estrutura/superestrutura, uma vez que tudo o que é produzido volta sobre o que produziu num ciclo ele mesmo auto-constitutivo, auto-organizador e autoprodutor" (MORIN, 2003, p. 108).

Segundo Doll Jr. (1997), o conceito de caos é uma ótima analogia para se compreender o paradigma pós-moderno representado pela Teoria da Complexidade. Este pesquisador considera que, atualmente, ainda estamos imbuídos do pensamento modernista e, portanto, a visão de caos, como contrário de ordem, caracteriza este tipo de conceito, assim como todas as

[8] Os outros dois princípios são o dialógico e o hologramático.

antíteses possíveis – bem/mal, certo/errado, possível/impossível – ignorando todo um espectro possível de possibilidades entre estes extremos.

Em uma perspectiva pós-moderna, o currículo é negociado em diferentes instâncias, e não imposto; os objetivos são permanentemente reformulados por intermédio de avaliações contínuas que não são mais fins do processo educativo, mas meios para um repensar da prática do professor em sala de aula; o conhecimento não é mais visto como algo a ser transmitido, mas, sim, transformado, de acordo com os significados produzidos por cada aluno, mediado pelo professor.

Doll Jr. (1997) refere-se à teoria do caos como uma boa metáfora para descrever um currículo pós-moderno, e a recursão como um critério fundamental para a construção do mesmo:

> No nível instrucional, as implicações da teoria do caos lidam principalmente com o conceito de recursão (iteração), em que o indivíduo volta seu olhar para si mesmo; através desta experiência auto-referencial emerge um senso de self e de valor. Aqui, o currículo passa a ser fortemente imbuído de currere, mais um processo e transformação experencial e menos um processo de dominar um produto determinado, ou "uma pista a ser corrida". As reflexões pessoais e a discussão comunal (portanto pública) dessas reflexões são ingredientes essenciais neste currículo. (DOLL JR., 1997, p. 114)

O conceito físico de caos está intimamente ligado à ideia de fractais. O uso da metáfora fractal para descrever um currículo pós-moderno aparece por intermédio da necessidade de se construir um currículo que possua a auto-organização como característica fundamental.

Fractais são figuras geradas por sucessivas iterações de equações matemáticas ou 'passos' previamente definidos que se repetem sucessivamente. As primeiras repetições feitas no processo de construção da figura geralmente não proporcionam sequer uma vaga ideia da beleza e incrível similaridade com formas da natureza que, após inúmeras iterações, conseguimos vislumbrar.

Em outras palavras, quanto mais nos aproximamos da figura, menos a relacionamos com formas da natureza ou qualquer outra forma familiar. No entanto, apenas por intermédio desta aproximação compreendemos como se dá a lógica de construção da mesma. O processo recursivo de construção faz com que, em determinado ponto da iteração, consigamos nos desprender das características peculiares para contemplar o todo.

Parece-nos que, nos currículos, a implicação é a mesma: características pontuais de determinado tema só fazem sentido quando olhamos para o todo. Cada processo de iteração é fundamental, mas só pode ser apreciado se o observador mantiver uma distância considerável.

Algumas possibilidades

A partir da explanação das metáforas delineadas até aqui, as quais sugerem aspectos ilustrativos de dois tipos antagônicos de organização curricular – linear e não linear – podemos inferir sobre algumas propostas de organização temática da Matemática no Ensino Médio.

Inicialmente, podemos analisar possibilidades curriculares que chamaremos de intra-matemáticas, ou seja, pensar no caráter recursivo dos próprios temas e processos matemáticos que podem ser desenvolvidos.

Vários algoritmos, por exemplo, são intensamente utilizados pelos alunos, e a possibilidade de transformá-los em uma linguagem computacional poderia representar uma alternativa para as práticas escolares. Entre esses algoritmos, poderíamos citar alguns: verificar se um determinado número inteiro é primo, relacionar quais e quantos são os divisores de um número, apresentar um número natural como produto de fatores primos (realizar a fatoração), entre outros.

É evidente que os exemplos citados fazem parte do rol de conteúdos que os estudantes aprendem no Ensino Fundamental, porém, com a utilização de linguagens computacionais, o estudante é levado a refletir sobre os algoritmos de uma forma mais complexa que o simples saber-fazer utilizando lápis e papel. A intenção é provocar, nos aprendizes, um repensar sobre um processo que já lhes é familiar. A sensação provocada talvez seja semelhante à que temos ao realizarmos operações básicas em uma base que não seja a dez: somos obrigados a refletir sobre um processo que já está internalizado em nós.

A nosso ver, esse é um exemplo que ilustra muito bem o que seria uma possibilidade de explorar um tema no contexto do currículo em espiral, retomando um assunto de maneira mais complexa e com profundidade suficiente para provocar ponderações importantes por parte dos alunos.

A utilização de softwares, como planilhas eletrônicas, oferece uma infinidade de recursos para explorar a iteração. Outros, como o SuperLogo, trabalham a característica de instruções recursivas na construção de polígonos por meio da utilização de propriedades geométricas e comandos específicos do programa, por exemplo.

Poderíamos chamar de possibilidades intermatemáticas a uma série de situações-problema, potencialmente geradoras de redes de temas que podem ser contemplados a partir da proposição de uma atividade que leve à investigação por parte dos alunos.

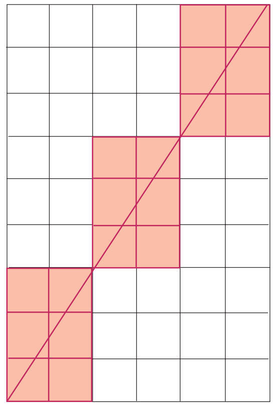
Como exemplo de uma situação-problema geradora, citamos a atividade retirada dos 'Principles and standards for school mathematics', documento estadunidense que apresenta orientações curriculares mais recentes para a Educação Básica daquele país: "uma corda está esticada de um canto a outro em um piso pavimentado com ladrilhos quadrados. Se o piso é de 28 ladrilhos de largura e 35 ladrilhos de comprimento, sobre quantos ladrilhos a corda irá passar?" (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 2000, p. 349, tradução nossa).

Os autores dos standards sugerem que o professor deve propor, a seus alunos, a resolução de casos mais simples que poderiam ser facilmente resolvidos por intermédio da contagem, desde que feito o desenho. A Figura 1 ilustra o caso de um piso com seis ladrilhos de largura por nove ladrilhos de comprimento.

Por intermédio de uma situação-problema como esta, os estudantes são convidados a elaborarem conjecturas, validando-as ou não, investigarem padrões e usarem temas já vistos no Ensino Fundamental como ferramentas para resolução. Nesta proposta, o número de ladrilhos sobre os quais a corda irá passar (L) é obtido em função do número de ladrilhos no comprimento (m) e pelo número de ladrilhos na largura (n). A fórmula é dada pela expressão:

$L = m + n - mdc\ (m,n)$.

Figura 1. Problema dos ladrilhos na configuração 9 por 6.



Fonte: National Council of Teachers of Mathematics (2000, p. 350).

A partir da execução de uma proposta didática como esta, é possível construir uma rede de significados, cujos 'nós' poderiam ser temas como: diagonais de quadriláteros e suas propriedades, padrões geométricos, divisores, máximo divisor comum, entre outros. Cabe ao professor proporcionar um ambiente que propicie o livre transitar do pensamento matemático dos estudantes por estes 'nós', ligando-os por caminhos variados.

Sem dúvida, aspectos cognitivos ligados tanto à intuição quanto ao processo analítico são requeridos durante o desenvolvimento da resolução dessa situação. Além disso, a busca por estratégias estimula, nos alunos, a construção de procedimentos e a valorização de atitudes que vão além da tradicional forma de se expressar matematicamente somente por intermédio da escrita.

Além do que chamamos de aspectos curriculares inter e intramatemáticos, outra possibilidade de contemplar a recursão seria por intermédio de temas que sirvam como pano de fundo, proporcionando uma ótima oportunidade para contextualizar diversos conteúdos já trabalhados e que, aparentemente, não possuem ligações.

Olgin (2011) apresenta a criptografia como um tema que oportuniza conexões inusitadas. Aproveitando as ações de codificar e decodificar, a autora explora contextos matemáticos que envolvem características invertíveis, como funções e matrizes. A lei de formação de uma função ou uma matriz predefinida serve como chave para decifrar mensagens. Novamente temos outro exemplo de conceitos que são retomados em novos contextos, justificando, em parte, sua presença no currículo. A contextualização nos parece servir como catalisadora do processo de significação de um tema, seja pelo uso cotidiano, seja pela aplicação em outras áreas do conhecimento, seja pelas práticas sociais, seja pela História da Matemática ou, até mesmo, pela própria Matemática.

Faz-se necessário repensar a estrutura organizacional do atual currículo de Matemática, pois muitos conteúdos são distribuídos de maneira injustificável, trazendo resquícios de uma organização linear. Um exemplo disto é a tradicional forma de ensinar função afim e função quadrática. A sequência de apresentação de cada um destes temas normalmente é a mesma: (i) a construção gráfica; (ii) a obtenção dos zeros; (iii) o estudo dos sinais. Curiosamente, para abordarem estes aspectos, os livros didáticos normalmente apresentam a resolução de equações e inequações do primeiro e do segundo grau. Porém, a forma como estes temas são retomados contribui mais para provocar uma desordem cognitiva nos alunos que para a produção de uma significativa retomada de conteúdos.

Uma maneira de superar esse caráter estanque seria abordar as funções polinomiais de uma só vez, tanto graficamente quanto pela obtenção de seus zeros, bem como pelo estudo dos seus sinais. O estudo do número de raízes da função polinomial propicia a análise das raízes de polinômios quaisquer, antecipando o estudo de polinômios e equações algébricas que ficam normalmente isolados no último ano do Ensino Médio. A ênfase na obtenção dos zeros justifica a necessidade de se estudarem as equações algébricas.

Ainda sobre funções, parece haver um paradigma organizacional linear envolvendo este assunto, que faz com que as propostas de ensino de Matemática na Educação Básica se restrinjam a alguns casos simplificadores. Por isso, os estudantes de Matemática do Ensino Médio só aprendem funções de uma variável real. A extensão para funções de mais de uma variável e a abordagem de variáveis complexas são assuntos que parecem proibidos para esta etapa da escolaridade.

Dentro da perspectiva de um currículo organizado de maneira não linear, o tratamento de temas como estes seria extremamente valioso para explorar o caráter recursivo dos conteúdos, reexaminando-os em uma estrutura mais complexa. Esta é justamente a essência da organização fractal: buscar, no complexo, similaridades que provoquem auto-organizações, tornando-as mais bem compreensíveis.

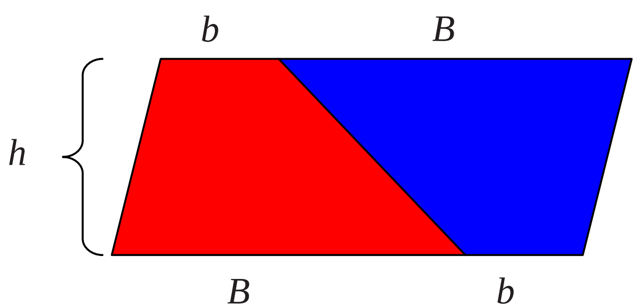
Importante distinguir complexidade de dificuldade. Um currículo construído por esta concepção complexa não significa que abordará assuntos mais difíceis, muito menos que está fundamentado na ideia de percorrer sequências didáticas que vão de tarefas mais simples para as mais complicadas. Como já dissemos, a própria metodologia de resolução de problemas rompe com essa perspectiva, iniciando a abordagem de temas por situações que provocam um desequilíbrio, um incômodo nos estudantes, pois não partem de tarefas que possuam estratégias de resolução predefinidas.

A contextualização histórica seria pertinente, apresentando os vários entraves ocorridos na busca pela construção de métodos eficientes para obtenção das soluções de equações, muitas vezes ligadas à própria história da ampliação e aceitação de novos conjuntos numéricos.

A Geometria também apresenta diversas possibilidades de abordagem em um currículo que leva em consideração o seu caráter recursivo. A composição e decomposição de figuras planas é usualmente explorada no Ensino Fundamental, com o objetivo de deduzir fórmulas para cálculo de áreas de polígonos e, até mesmo, para se chegar a expressões que relacionam, por exemplo, o número de lados de um polígono com o número de diagonais que o mesmo possui. No Ensino Médio, as ações de compor e decompor podem ser exploradas não só na Geometria Euclidiana plana, como também em Geometria espacial, enfatizando a relação entre volume de sólidos, como, aliás, Arquimedes fez originalmente, se desvencilhando da necessidade de expressar a fórmula em função de um número irracional, o que não era possível na época.

Assim, da mesma forma que trabalhamos a ideia, na Geometria plana, de área de triângulo como sendo metade da área de um paralelogramo ou a visualização da dedução da área do trapézio por intermédio da composição de dois trapézios que formam um paralelogramo (Figura 2), podemos compor e decompor sólidos geométricos explorando a relação entre eles, como Arquimedes enunciou: o volume de qualquer esfera é quatro vezes o do cone com base igual a um grande círculo da esfera e altura igual ao raio da mesma esfera, e o volume do cilindro com base igual a um grande círculo da esfera e altura igual ao diâmetro é uma vez e meia o volume da esfera (NETZ; NOEL, 2007).

Figura 2. Visualização da obtenção da fórmula da área de um trapézio.



A Área de um trapézio (A) é igual a metade da área do paralelogramo.
Portanto:

$$A = \frac{(b+B)\,h}{2}$$

Fonte: Elaborado pelos autores.

O uso de diferentes sistemas axiomáticos, além do euclidiano, serve como uma forma importante de retomar assuntos já trabalhados em outros contextos. Por exemplo, o célebre teorema: 'a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°' vale na Geometria Euclidiana. Na Geometria Hiperbólica, esse resultado não é válido, pois a soma é menor que 180°.

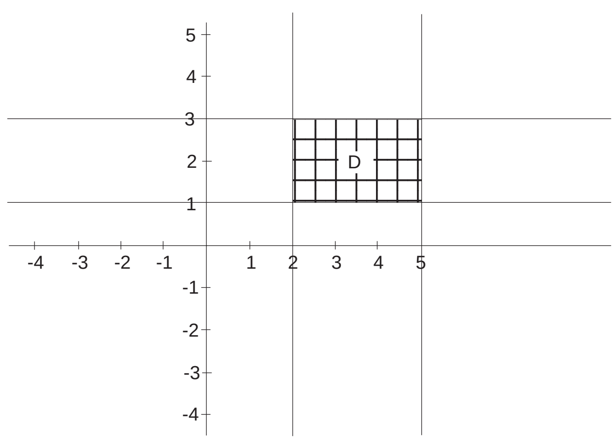
A simples comparação de fatos demonstrados e já internalizados pelos alunos como verdades absolutas e que são novamente contestadas, possibilita um repensar sobre o assunto, em níveis mais elevados de abstração quando comparados à análise feita dentro de apenas um sistema axiomático.

A Geometria Analítica, a nosso ver, representa um dos temas mais propícios para o uso recursivo de diversos conteúdos. É possível abordar diferentes registros de representação semiótica. Para Duval (2003, p. 30): "lembremos que uma das características importantes da atividade matemática é a diversidade de registros de representação semiótica que ela mobiliza obrigatoriamente. No entanto, essa diversidade raramente é levada em conta no ensino".

Atividades que propiciem a necessidade de mudanças de registros, como entre o simbólico e o gráfico, e vice-versa, podem ser realizadas por intermédio da construção de regiões no plano cartesiano, dado um sistema de inequações ou outra representação simbólica que identifique a região (a representação de um conjunto infinito de pontos, por exemplo). Pesquisas desenvolvidas por Karrer e Barros (2011), bem como Paula e Bittar (2011), abordam atividades realizadas com estudantes universitários explorando estes tipos de conversão.

Por exemplo, a representação simbólica do conjunto poderia ser convertida na representação gráfica apresentada na Figura 3 e vice-versa. Também poderíamos tratar a região no plano como a representação gráfica da solução de um sistema de inequações, retomando um assunto que é tradicionalmente abordado até nos anos finais do Ensino Fundamental, porém usualmente restrito à representação algébrica.

Figura 3. Região do plano representada no registro gráfico.



Fonte: Karrer; Barros (2011, p. 3).

No entanto, para que esse tipo de atividade seja mais significativa ainda, é importante que a Geometria Analítica não seja abordada em apenas um ano do Ensino Médio ou, muitas vezes, tratada somente em um semestre. Ao invés de isolá-la, poderíamos construir um currículo no qual este conteúdo pudesse perpassar todos os anos do Ensino Médio, propiciando uma variedade de representações matemáticas a serem trabalhadas.

Considerações finais

A quebra do modelo linear de organização curricular não é algo tão simples, nem ocorrerá por intermédio de determinações governamentais. O pensamento linear ainda está impregnado na realidade escolar. Expressões como 'este aluno não tem uma base sólida de conhecimentos' são mais que meros chavões, pois representam concepções que reforçam o ideário modernista de ciência estruturada e ensino padronizado, cuja metodologia eficaz conduz à aprendizagem. O aluno que não aprende é um 'ponto fora da curva' e deve refazer a sequência desde o início.

O pós-modernismo rompe com estas tradições, apresentando inúmeras possibilidades de significar determinado tema. Assim como as sinapses transmitem impulsos nervosos entre neurônios, as ligações entre nós de uma rede de conhecimentos podem e devem ocorrer de maneira variada, respeitando a especificidade de cada indivíduo, de cada comunidade. A ciência já não se apresenta como a verdade absoluta que responde a todas as perguntas. Ela é limitada, incompleta, falível.

A partir destas reflexões, concluímos que a organização curricular da Matemática no Ensino Médio não deve ser única, mas deve revelar uma variedade de conexões entre blocos de conteúdo e entre temas que já foram abordados no contexto recursivo que apresentamos, ou seja, longe da ideia de repetição.

Apresentamos algumas propostas, esboçamos o que seriam exemplos do uso da recursão no currículo de Matemática do Ensino Médio. Sabemos que não existem receitas infalíveis, pois, se isto fosse possível, estaríamos adotando o raciocínio modernista em detrimento do pensamento pós-moderno.

Caos não é – pelo menos, na metáfora curricular utilizada neste artigo – sinônimo de desarmonia ou confusão. Existe uma ordem nesta organização caótica. Muitas vezes, esta ordem aparece após o percurso escolhido, seja em uma espiral, seja em uma rede de significados, seja nos padrões de um fractal. Os conteúdos já não são mais hipercompartimentados, como se fosse possível compreendê-los apenas por intermédio de uma série reduzida de passos a serem seguidos. Os temas, na concepção da Teoria da Complexidade, só podem produzir significados quando amplamente contextualizados, seja do ponto de vista horizontal (em outras disciplinas, em outros blocos de conteúdo), seja do ponto de vista vertical (retomando conteúdos já estudados em séries anteriores em novos contextos e em situações mais sofisticadas).

É certo que precisamos rediscutir as propostas curriculares a partir destas novas perspectivas. Mas, sobretudo, devemos estimular discussões que partam dos professores e das demandas da realidade escolar contemporânea. Para isso, precisamos fornecer discussões de temas, como o abordado neste artigo, já na formação inicial de professores que ensinarão Matemática.

A quebra do paradigma linear e a efetiva construção curricular fundamentada no ideário recursivo da Teoria da Complexidade não se darão por decreto, mas, sim, pela ampla discussão, pesquisa e estudo entre diferentes setores da sociedade interessados na boa formação escolar dos nossos jovens.

Referências

BRUNER, J. S. **O processo da educação**. 3. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1973.

DEMO, P. **Complexidade e aprendizagem**: a dinâmica não linear do conhecimento. São Paulo: Atlas, 2008.

DEWEY, J. **How we think**. Boston: D. C. Heath, 1910.

DOLL JR., W. E. **Currículo**: uma perspectiva pós-moderna. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

KARRER, M.; BARROS, L. G. X. Análise de uma atividade sobre regiões do plano segundo os registros das representações semióticas. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais...** Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2011. 1 CD-ROM.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência**. São Paulo: Editora 34, 1993.

MACHADO, N. J**. Matemática e língua materna**: análise de uma impregnação mútua. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2001.

______. **Epistemologia e didática**: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

MORIN, E. **Introdução ao pensamento complexo**. 4. ed. Lisboa: Instituto Piaget, 2003.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **Principles and standards for school mathematics**. Reston: NCTM, 2000.

NETZ, R.; NOEL, W. **O codex Arquimedes**. Lisboa: Edições 70, 2007.

OLGIN, C. A. **Currículo no ensino médio**: uma experiência com o tema criptografia. 2011. 136 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2011.

PAULA, A. F.; BITTAR, M. Um estudo sobre a mobilização e articulação de conceitos de álgebra e de geometria plana em estudos da geometria analítica: usando o Graphequation como instrumento didático. In: SEMINÁRIO SUL-MATO-GROSSENSE DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2011, Campo Grande. **Anais...** Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2011. 1 CD-ROM.

PIRES, C. M. C. **Currículos de matemática**: da organização linear à ideia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

______. Formulações basilares e reflexões sobre a inserção da matemática no currículo visando a superação do binômio máquina e produtividade. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 6, n. 2, p. 29-61, 2004.

SILVA, M. A. **Currículos de matemática no ensino médio**: em busca de critérios para escolha e organização de conteúdos. 2009. 248 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2009.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica**: a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001.

Artigo recebido em 21/06/12. Aceito em 28/11/12.