

# Análisis fractal de series de tiempo de anomalías de variables de frijol en México

Olivia Delgadillo Ruiz\*, Juan Antonio Leos Rodríguez\*, Pedro Pablo Ramírez Moreno\* y Ricardo David Valdez Cepeda\*

Recepción: 11 de abril de 2014

Aceptación: 16 de diciembre de 2014

\*Universidad Autónoma Chapingo, México.  
Correos electrónicos: odeldgadillo@ciestam.edu.mx;  
jleos45@gmail.com; pabloram42@gmail.com;  
vacrida@gmail.com  
Se agradecen los comentarios de los árbitros de la revista.

**Resumen.** Las series de anomalías de superficie cosechada, volumen de producción, rendimiento medio anual y volúmenes exportados e importados de frijol en México pueden ser caracterizadas por la dimensión fractal ( $D_V$ ) estimada mediante la técnica de variografía. Los resultados sugieren que las series de anomalías de variables de frijol pueden ser modeladas como series autoafines. Los valores de dimensión fractal  $D_V > 1.5$  hasta 2 expresan la presencia de variaciones de corto plazo. Los valores de  $D_V > 1.5$  para las series de anomalías de variables de frijol sugieren un comportamiento antipersistente; es decir, estas series son impredecibles, a menos que se involucre un parámetro de fractalidad en los modelos estadísticos estimados con fines de predicción.

**Palabras clave:** series autoafines, dimensión fractal, variograma, función potencial.

## Fractal Analysis for Anomaly Time Series of Bean Related Variables in Mexico

**Abstract.** Mexico's anomaly time series for harvested area, production volume, annual mean yield, and exported and imported volumes of dry bean can be characterized by means of fractal dimension ( $D_V$ ), estimated through variography. General results suggest those series can be properly modeled as self-affine series. Fractal dimension ( $D_V$ ) values  $> 1.5$  to 2 indicate presence of short time variation. Whereas  $D_V$  values  $> 1.5$  for the dry bean anomaly time series suggest predominance of antipersistent variation; that is to say, all these series are unpredictable unless we involve a fractality parameter in the estimated statistical models so as to predict them.

**Key words:** Self-affine series, Fractal dimension, Variogram, Power function.

## Introducción

Muchos fenómenos como terremotos, erupciones volcánicas, patrones de vegetación, radiación solar, temperatura, precipitación, propiedades del suelo, atributos de las plantas, precios de los productos agrícolas, comportamiento de índices financieros, entre otros, son mejor descritos por una dimensión cuyo valor no es precisamente entero, pero sí fracción o fractal (Grönlund *et al.*, 2012; Blanco-Macías *et al.*, 2011; Fattahi *et al.*, 2011; Dominique *et al.*, 2011).

La palabra *fractal* proviene del adjetivo *fractus*, en latín, y su significado es *irregular* o *rugoso* (Ghosh *et al.*, 2012; La Torre *et al.*, 2011). La geometría fractal es una herramienta matemática desarrollada para estudiar sistemas que se caracterizan por una dimensión fraccionaria o fractal. Ha surgido como un complemento de la geometría euclidiana para explicar y describir los objetos y formas de una mejor manera (Lento, 2013; Grönlund *et al.*, 2012). Las series de tiempo que se caracterizan por una dimensión no entera (dimensión fractal) son tratadas como series aleatorias o perfiles autoafines (Fattahi *et al.*, 2011;

Mandelbrot, 1982). El análisis cuantitativo de la autoafinidad, a través de los variogramas geoestadísticos, involucra la medición de relaciones de escala entre las varianzas promedio estimadas para diferentes intervalos de tiempo (Namyslowska y Wynalek, 2011a).

Una limitante para el cálculo de la dimensión fractal de una serie de tiempo a partir del variograma es que éste es dependiente del intervalo de muestreo. Valores grandes de la dimensión fractal pueden ser el resultado de usar un intervalo de muestreo relativamente grande (Namyslowska y Wynalek, 2011b; Bachmaier y Backes, 2011). Otra situación puede presentarse cuando la representación log-log del variograma es una curva decreciente que ocurre, a veces, en el caso de estructuras periódicas de intervalo grande, lo cual indica efectos de hoyo (*i.e.* que son curvas sinusoidales) (Sadoti *et al.*, 2014; Namyslowska y Wynalek, 2011b). Esta situación generalmente es eliminada con antelación porque la dimensión fractal se calcula al usar la pendiente del variograma log-log conformado por varianzas cercanas al origen. Además, las dimensiones fractales pueden ser comparadas entre variables de diferente naturaleza y magnitud de valores porque sus valores son independientes de la escala y no dependen de la magnitud de los valores de las variables, pero sí de la variabilidad (Kesavarao *et al.*, 2011).

En este artículo, las series de anomalías normalizadas de volúmenes de exportación e importación, superficie cosechada, producción y rendimiento medio anual de frijol en México se presentan como fractales autoafines con el objetivo de describir su complejidad y compararlas entre sí mediante sus valores de dimensión fractal.

La elección de las series de tiempo de las variables mencionadas se debió a que el frijol se cultiva en todo el país, en aproximadamente una superficie de 1.7 millones de hectáreas (la superficie destinada al cultivo de frijol es solo superada por la destinada al cultivo de maíz), con una producción de 1.1 millones de toneladas (Sagarpa-SIAP, 2013).

El papel de esta leguminosa es fundamental en lo económico porque representa para la economía campesina una garantía de seguridad y soberanía alimentaria vía autoconsumo (INEGI, 2011).

## 1. Materiales y métodos

### 1. 1. Datos

Las series de tiempo de superficie cosechada ( $ha$ ), producción ( $t$ ) y rendimiento ( $t\ ha^{-1}$ ) (de 1897 a 2012, 116 años), así como volúmenes exportados ( $t$ ) e importados

( $t$ ) (de 1925 a 2010, 86 años) de frijol fueron analizadas mediante la técnica de variografía con el enfoque de geometría fractal. Los datos se obtuvieron de los sitios web del Sistema de Información Agroalimentaria de Consulta (Siacon) y del Servicio de Información Agroalimentaria y Pesquera (SIAP) dependientes de la Secretaría de Agricultura, Ganadería, Desarrollo Rural, Pesca y Alimentación (Sagarpa), así como de informes del gobierno de la presidencia de la República, de la Subsecretaría de Agricultura y Operación dependiente de la Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos (Sarh) (1983) y del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI, 2009).

### 1. 2. Análisis fractal

La geometría euclidiana, la trigonometría y el cálculo son herramientas que se usan por lo general para modelar fenómenos naturales. Sin embargo, algunos de ellos son mejor descritos por una dimensión cuyo valor no es precisamente entero, en otras palabras, no corresponde a una dimensión euclidiana. Ese valor, entonces, corresponde a una dimensión *fractal* (Lento, 2013; Grönlund *et al.*, 2012). Mandelbrot (1982) usó el término fractal para estudiar los fenómenos temporales o espaciales continuos que exhiben correlación dentro de un rango de escalas (Lento, 2013; La Torre *et al.*, 2011; Fattahi *et al.*, 2011).

Los fractales son estructuras que presentan dos características principales: autosimilitud o autoafinidad (Fattahi *et al.*, 2011). Las estructuras autoafines son caracterizadas de manera frecuente por la irregularidad, la cual se define como la fluctuación sobre una cierta escala longitudinal (Namyslowska y Wynalek, 2011a). En los sistemas autoafines, la irregularidad cambia con la magnitud lineal de la superficie de acuerdo con el exponente de Hurst ( $H$ ). La dimensión fractal ( $D_v$ ) puede ser estimada a partir de su relación con  $H$ .  $D_v$  y  $H$  son llamados parámetros fractales y miden qué tanto se desvía una curva fractal de la función que se usa para aproximarse a ella (Velásquez *et al.*, 2013; Sánchez *et al.*, 2012).

En este contexto, el variograma fue considerado como una función fractal. Representa una manera para medir el grado de complejidad al evaluar qué tan rápido se incrementa la varianza cuando se mide respecto a un aumento en el intervalo de tiempo (cambio de escala) (Kesavarao *et al.*, 2011). La idea fundamental fue suponer que el variograma y la escala no varían arbitrariamente, más bien que están relacionadas por una ley de potencia (Dominique *et al.*, 2011).

1. 3. Técnica de variografía

El variograma (semivariograma, función de la estructura o varianza de incrementos) es el valor esperado de la diferencia, al cuadrado, entre dos observaciones separadas por un intervalo de tiempo (o lapso,  $w$ ), expresado en años:

$$V(w) = \left\langle [Y_{ni}(X_i) - Y_{ni}(X_{i+w})]^2 \right\rangle \quad (1)$$

donde  $V(w)$  es el valor promedio de la diferencia al cuadrado entre pares de datos separados por un intervalo  $w$ .

Al considerar una longitud del intervalo ( $w$ ), el valor de la diferencia entre  $Y_{ni}(w)$  y  $Y_{ni}(0)$  se distribuirá normalmente con varianza  $S(w)^2$  que es proporcional a  $w^{2H}$ . El valor esperado por obtener será igual a  $S(w)^2$ , así que:

$$V(w) \approx w^{2H} \quad (2)$$

donde  $H$  es el exponente de Hurst.

Cuando se grafica a los logaritmos de  $V(w)$  contra los logaritmos de  $w$  es posible ajustar una línea recta si la serie es autoafín. La pendiente de la ecuación de la línea recta es dos veces  $H$ , y la dimensión fractal puede ser estimada mediante la ecuación:

$$D_v = 2 - H \quad (3)$$

Dependiendo de los valores que tomen los parámetros de fractalidad ( $D_v$  y  $H$ ), se puede hablar de grados de irregularidad o complejidad de las series:

a) Si  $D_v > 1.5$  y  $H < 0.5$ , la serie es antipersistente, es decir, sugiere sensibilidad a fuerzas externas con variaciones de corto plazo. En este caso una tendencia de aumento en el pasado implica una tendencia a disminuir en el futuro, y una tendencia de disminución en el pasado implica una tendencia a aumentar en el futuro.

b) Si  $D_v = 1.5$  y  $H = 0.5$  se trata de una serie que se comporta según el movimiento browniano. No hay correlación de los incrementos del pasado y de futuro.

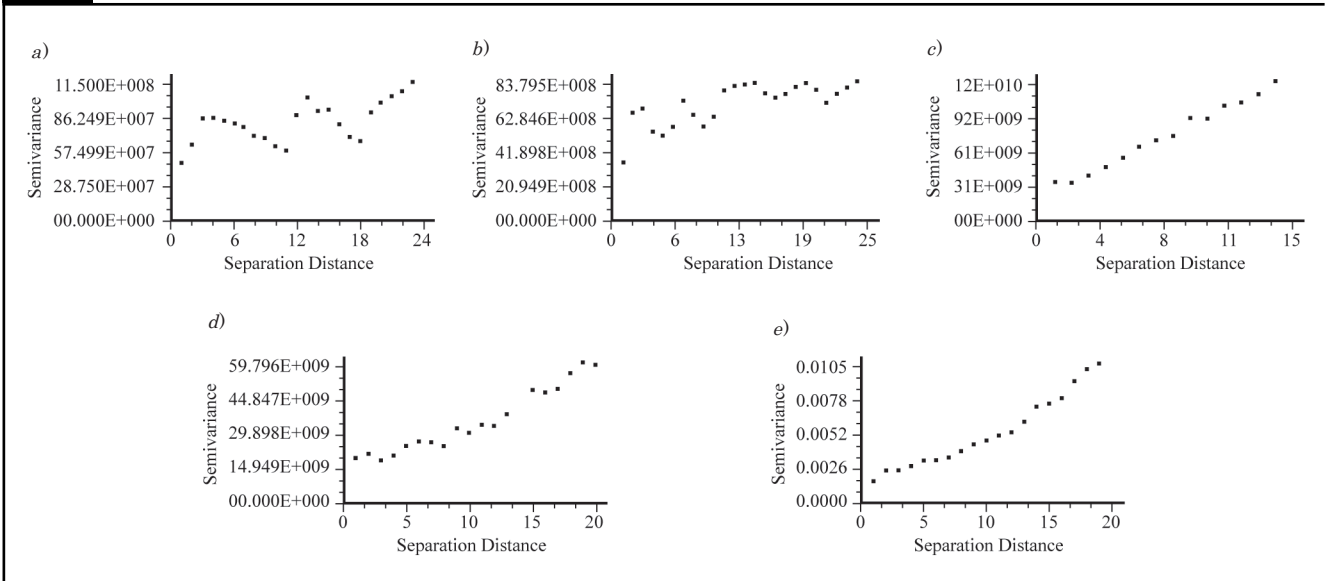
c) Si  $D_v < 1.5$  y  $H > 0.5$ , la serie es persistente, en otras palabras, presenta efectos de memoria a largo plazo. Lo que sucede hoy impacta en el futuro (Lento, 2013).

1. 4. Construcción de las series de anomalías de variables de frijol

Al considerar las series de tiempo de superficie cosechada, producción, rendimiento, volúmenes exportados e importados de frijol (datos originales: datos sin remoción de tendencias), la estimación del variograma no fue posible, en teoría. Cuando la distancia calculada entre puntos muestreados es cero, la función variograma se establece como cero, pero debido a la presencia de un error de medición y de variación en el espacio, cuando dos puntos muestreados son muy cercanos la función variograma no significa que deba ser cero, por lo que el efecto *nugget* se produce (Wang et al., 2014) (gráfica 1).

Los casos de volúmenes exportados importados y producción de frijol muestran un efecto de *hoyo* o comportamiento sinusoidal. El enfoque de geometría

Gráfica 1. Variogramas experimentales de volumen exportado para cada una de las series de tiempo.



Nota: a) y b): 1925-2010; c), d) y e): 1897-2012.  
Fuente: elaboración propia.

fractal usado supone que las relaciones entre la varianza promedio y los incrementos de tiempo, sin remoción de las tendencias, se describe por funciones potenciales, de manera que si los variogramas no se ajustan a una función potencial, la dimensión fractal no debe ser estimada con este método (Sadoti *et al.*, 2014; Dominique *et al.*, 2011).

Por lo tanto, las tendencias de las series evidenciadas fueron eliminadas para cada una de las series; se tomó en cuenta que generan resultados espurios para series autosimilares o autoafines (Wilks, 2011; Lung y Yu, 2009).

Dicho procedimiento se realizó con base en la ecuación (4):

$$Y_{di} = Y_i - (a + bX_i) \tag{4}$$

donde  $Y_{di}$  es el  $i$ -ésimo valor de la serie sin tendencia.

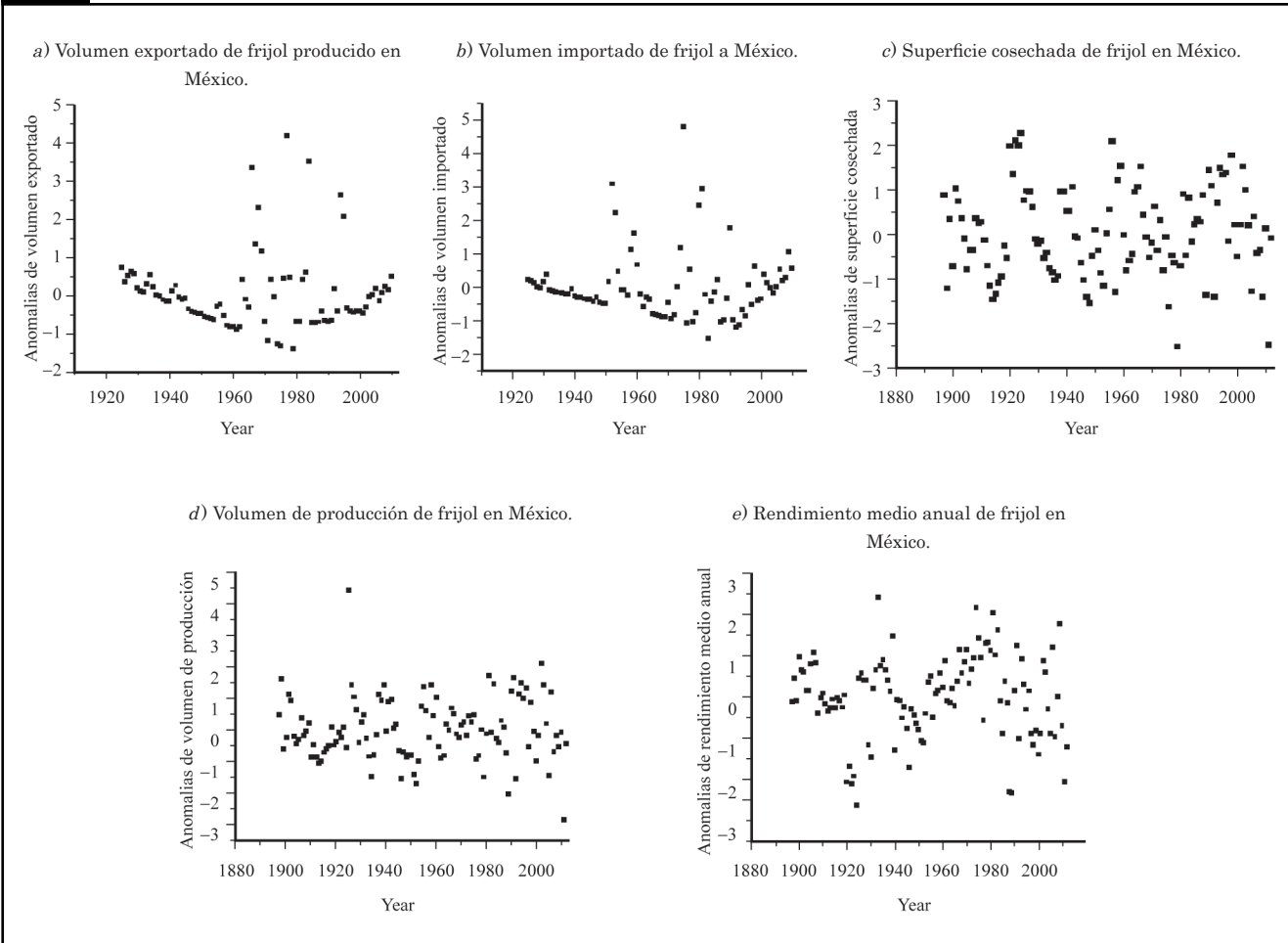
Después cada una de las subseries fue normalizada (ecuación 5):

$$Y_{ni} = \frac{Y_{di} - \bar{Y}_d}{SD_d} \tag{5}$$

donde  $Y_{ni}$  es la  $i$ -ésima anomalía normalizada,  $\bar{Y}_d$  es la media aritmética de la subserie con tendencia removida y  $SD_d$  es la desviación estándar de la subserie con tendencia eliminada.

En la última etapa se unieron dos subseries de anomalías normalizadas para cada una de las variables. Como resultado, los conjuntos de datos de anomalías normalizadas presentaron media cero y varianza unitaria. Así, cada conjunto de valores  $Y_{ni}$  es considerado como serie de anomalías normalizadas de la respectiva variable (gráfica 2). El uso de las anomalías se justifica porque es común que las series de tiempo, en general, sean no estacionarias y presenten tendencias de plazo largo. Así, la remoción de las tendencias (como en este caso) es un aspecto importante con el objetivo de evitar la influencia de la no estacionariedad de las series originales que pudieran inducir resultados espurios (Wilks, 2011).

**Gráfica 2.** Series de anomalías normalizadas de variables de frijol en México.



Nota: a) y b): 1925-2010; c), d) y e): 1897-2012.  
Fuente: elaboración propia.

La base de datos y la eliminación de las tendencias se computaron en hojas de cálculo de Microsoft Excel 2013, mientras que la estimación de los variogramas se realizó con el *software* Geostatistics for Environmental Sciences versión 2.3 (Gama Desing Software, 1995).

2. Resultados y discusión

Algunos indicadores de las series de tiempo de volumen exportado e importado, superficie cosechada, producción y rendimiento medio anual de frijol muestran que de 1925 a 2010 en promedio se han exportado unas 16 600 *t* e importado 50 000 *t* de frijol. En el periodo de 1897 a 2012, la superficie cosechada en México con frijol fue de 1.23 millones de *ha* en promedio, con una superficie máxima de 2.24 millones de *ha* y una mínima de 470 000 *ha*. La producción fue en

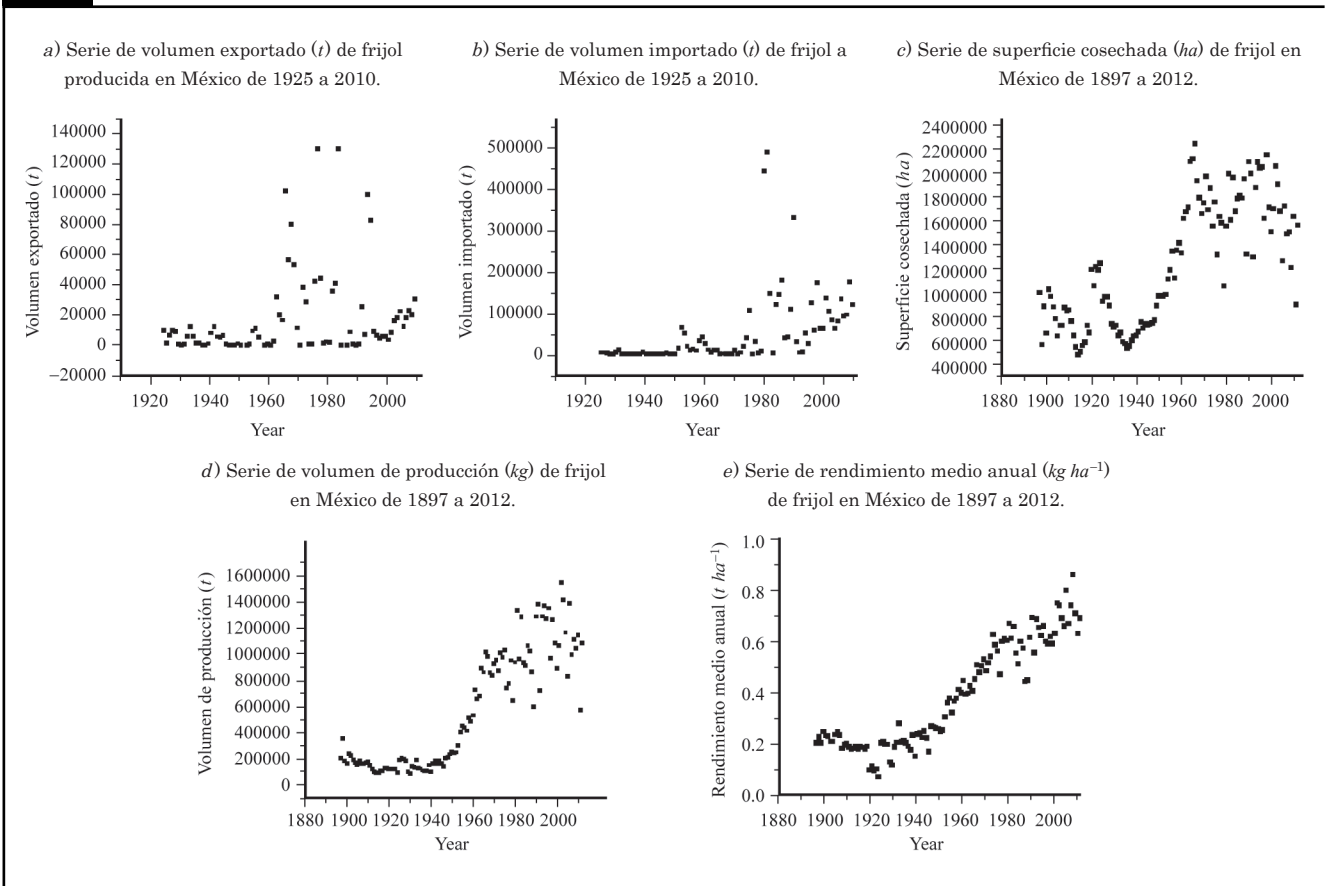
promedio de 560 000 *t*, con una producción máxima de 1.5 millones de *t*. En el caso de los rendimientos se destaca un valor máximo de 860 *kg ha<sup>-1</sup>*, un valor mínimo de 70 *kg ha<sup>-1</sup>* y un promedio de 380 *kg ha<sup>-1</sup>*. En el cuadro 1 se presenta una descripción de las variables consideradas, medidas de tendencia central y variabilidad (estadísticos descriptivos), y en la gráfica 3 se representa a las series de tiempo correspondientes.

**Cuadro 1.** Descripción de las series de tiempo de superficie cosechada (*ha*), producción (*kg*), rendimientos (*kg ha<sup>-1</sup>*), volúmenes exportados (*kg*) e importados (*kg*) de frijol.

VARIABLES	Periodo	<i>n</i>	Media	Varianza	Valor mínimo	Valor máximo
Volumen exportado ( <i>t</i> )	1925-2010	86	16 603.7	7.78E+08	0.0	130 076.0
Volumen importado ( <i>t</i> )	1925-2010	86	49 339.6	7.64E+09	14.0	490 189.0
Superficie cosechada (millones <i>ha</i> )	1897-2012	116	1.23	2.62E+11	0.47	2.24
Producción ( <i>t</i> )	1897-2012	116	557 990.0	1.97E+11	82 577.0	1 549 091.0
Rendimiento ( <i>t ha<sup>-1</sup></i> )	1897-2012	116	0.38	0.04	0.07	0.86

Nota: *n* = total de datos de la serie de tiempo.  
Fuente: elaboración propia.

**Gráfica 3.** Descripción de series de tiempo de variables consideradas en el estudio.



Fuente: elaboración propia.

Los resultados del variograma log-log se muestran en el cuadro 2. En general, la linealidad apreciada para las series de anomalías normalizadas de superficie cosechada, volumen de producción, rendimiento, y volúmenes exportado e importado de frijol indica que pueden ser modeladas como series autoafines.

Los valores de  $D_v > 1.5$  y valores de  $H < 0.5$  expresan la presencia de variaciones de corto plazo (cuadro 2), lo cual sugiere sensibilidad a fuerzas externas con variaciones de corto plazo en las series de anomalías normalizadas de superficie cosechada, volumen de producción, rendimiento, y volumen exportado e importado de frijol. El comportamiento evidenciado es antipersistente y muestra la presencia de correlaciones negativas. En otras palabras, estas series son impredecibles.

Este comportamiento antipersistente puede ser explicado por la amplia variación en la producción de frijol en México, debido principalmente a que más de 50% de la superficie se cultiva en condiciones de temporal (Serrano *et al.*, 2013; Sagarpa-SIAP, 2013; Ledesma y Ramírez, 1994), con uso limitado de semillas mejoradas, suelos pobres en nutrientes (Nansen, 2012) y con niveles tecnológicos limitados obteniéndose en promedio rendimientos bajos (Valdez y Olivares, 1998) en comparación con los principales países productores como EUA, China, Indonesia, Myanmar y Brasil con rendimientos de 1.86, 1.53, 0.99, 0.93 y 0.80 toneladas por hectárea (Secretaría de Economía, 2012).

El valor de dimensión fractal (1.86) para la serie de anomalías de rendimiento medio anual de frijol coincide con el estimado (1.84) por Valdez *et al.* (2007). En general, las series en estudio se asocian a valores de dimensión fractal que sugieren la dominancia de variabilidad de plazo corto. El orden de las series de acuerdo con la dominancia de este tipo de variación fue volumen exportado < volumen importado < superficie cosechada < rendimiento medio anual < volumen de producción.

Lo anterior sugiere la posibilidad de que fuerzas externas al sistema de producción, como pueden ser factores físicos, bióticos o climáticos influyan sobre la sensibilidad a las condiciones iniciales de las series de anomalías normalizadas de variables de frijol en México. Por lo tanto, es recomendable que en trabajos de investigación futuros se involucre el análisis de la sensibilidad a las condiciones iniciales de las series en estudio mediante; por ejemplo, el exponente de Lyapunov, tal y como lo hicieron Valdez *et al.* (2007).

Los resultados de los variogramas log-log para las series de anomalías de volúmenes exportados e importados, superficie cosechada, producción y rendimiento medio anual de frijol son mostrados en la gráfica 4. En el cálculo de los estimadores de fractalidad se usaron las observaciones más cercanas al origen con el propósito de que sus valores fueran más estocásticos que determinísticos. Es decir, se procuró que en su cómputo se involucrara a las observaciones definidas por un gran número de pares o diferencias asociadas a diferentes intervalos de tiempo ( $w$ , años).

**Conclusiones**

Las series de tiempo de anomalías de variables de frijol se analizaron con la técnica de variografía. Los resultados muestran valores de  $D_v > 1.5$  para las series de anomalías de volúmenes exportados ( $t$ ) e importados ( $t$ ), superficie cosechada ( $ha$ ), rendimiento medio anual ( $t\ ha^{-1}$ ) y producción de frijol ( $t$ ), e indican que dichas series son series autoafines, a grado tal que la variación de plazo corto es la dominante.

Los valores de las series de anomalías normalizadas sugieren que son prácticamente impredecibles mediante las técnicas estadísticas más usadas. Entonces, con fines de predicción, la recomendación es involucrar algún parámetro de fractalidad en la ecuación o modelo estadístico.

**Prospectiva**

Las herramientas de la geometría fractal, como las utilizadas en este estudio, pueden incluirse en el análisis de series de tiempo para entender los posibles mecanismos que están influyendo en el comportamiento de los sistemas de producción de granos básicos en México.

**Cuadro 2.** Parámetros de fractalidad estimados con los variogramas log-log para las series de anomalías de superficie cosechada, producción, rendimiento, volúmenes exportados e importados de frijol.

Serie de anomalías	$D_v$	$Se$	$R^2$	$n$	$H$	Nota (Variación predominante)
Volumen exportado	1.798	0.453	0.887	4	0.202	Variación de corto plazo
Volumen importado	1.818	0.630	0.806	4	0.182	Variación de corto plazo
Superficie cosechada	1.839	0.139	0.951	11	0.161	Variación de corto plazo
Producción	1.889	0.159	0.953	9	0.111	Variación de corto plazo
Rendimiento medio anual	1.865	0.143	0.919	17	0.135	Variación de corto plazo

Nota:  $D_v$  es la dimensión fractal;  $Se$  es el error estándar;  $R^2$  es el coeficiente de determinación;  $n$  es el tamaño de la muestra y  $H$  es el exponente de Hurst.  
Fuente: elaboración propia.

Permanece la posibilidad de que fluctuaciones asociadas a la variabilidad de corto plazo no reflejen algo especial acerca de los mecanismos que genera la dinámica en las series de anomalías de volúmenes exportados e importados, superficie cosechada, rendimiento medio anual y producción de frijol. ¿Acaso este comportamiento puede ser el resultado de los diversos insumos que intervienen en la cadena agroalimentaria de frijol en México? Esta pregunta justifica el estudio de estas series con el objetivo de conocer si sus comportamientos son afectados por fuerzas externas que operan a diferentes escalas de tiempo. Debido a ello, conviene manejar como meta la comprensión de los mecanismos que intervienen en la presencia de leyes de escala en las series, así como para generar conocimiento sobre su autoafinidad geométrica.

Además de los insumos que se utilizan en la cadena agroalimentaria de frijol, deben ser considerados los factores climáticos, económicos y comerciales. La oferta de granos como el frijol está relacionada con la intensidad y distribución de las lluvias que impacta en su producción. Otros factores vinculados al cambio climático son la actividad solar y el fenómeno de osci-

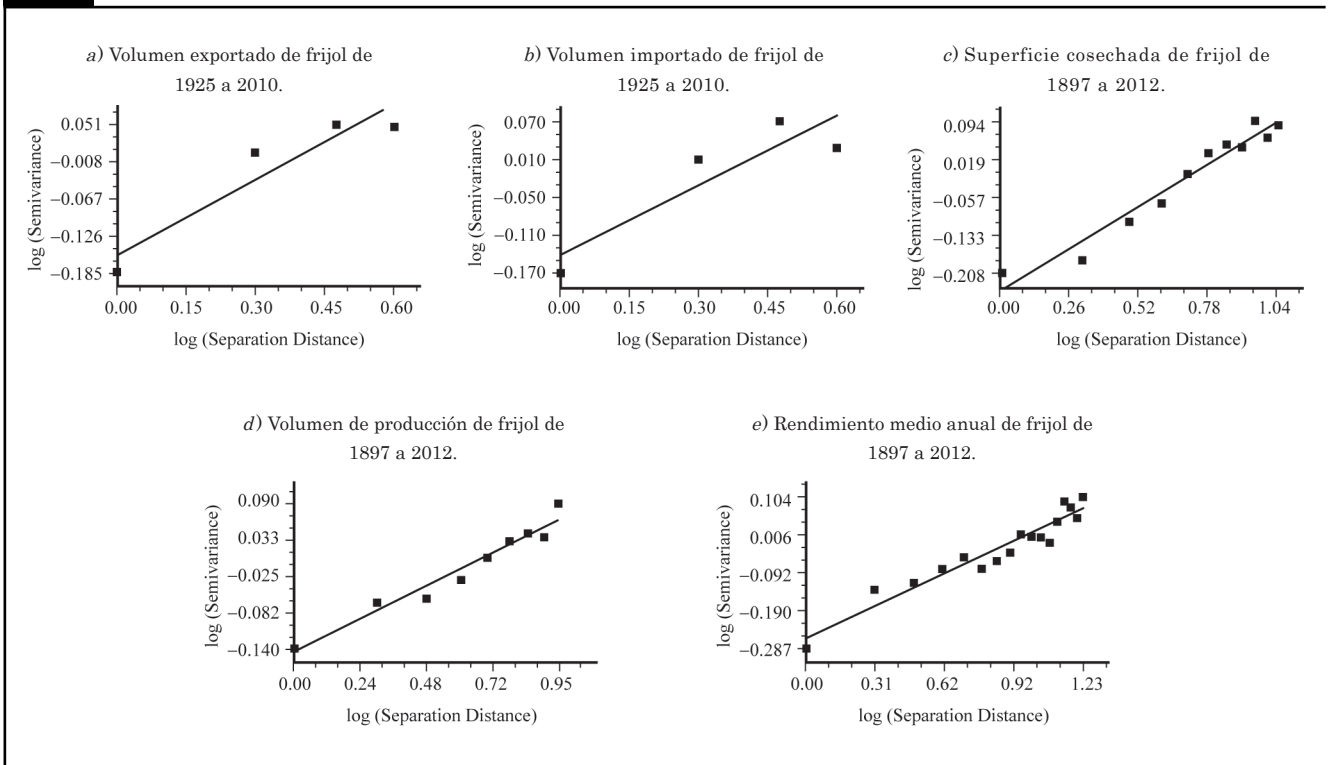
lación del Sur El Niño (ENSO, por sus siglas en inglés) que afectan el clima terrestre y en consecuencia el crecimiento de las plantas. El productor de frijol también considerará en su decisión de producción el comportamiento a la baja de los precios de venta, el aumento de los costos por el alza de los precios de los insumos, entre otros.

Los precios de las materias primas agrícolas, la oferta y demanda de los productos agropecuarios y los efectos del cambio climático son las principales causas del comportamiento volátil en los mercados internacionales. Estos efectos agregan mayor impredecibilidad en volumen y valor a las series de superficie cosechada, rendimiento, importación, exportación, rendimiento y volumen de producción de frijol en México. Será por lo tanto, necesario la utilización de la geometría fractal para identificar factores externos al sistema de producción.

Por este motivo, en trabajos futuros es conveniente identificar la sensibilidad a condiciones iniciales de las series de anomalías mediante el índice de Lyapunov, por ejemplo, con el propósito de conocer a mayor profundidad sus dinámicas y divergencias de trayectorias cercanas, *i.e.* nivel de caos.



**Gráfica 4.** Variogramas log-log de las series de anomalías normalizadas de variables de frijol.



Fuente: elaboración propia.

- Bachmaier, M. y Backes, M. (2011). Variogram or Semivariogram? Variance or Semivariance? Allan Variance or Introducing a New Term? *Mathematical Geosciences*, 43: 735-740. DOI 10.1007/s11004-011-9348-3
- Blanco-Macías, F., Valdez-Cepeda, R. D. y Magallanes-Quintanar, R. (2011). Pan evaporation analysis in central México: Trends, self-affinity and important frequencies. *International Journal of the Physical Sciences*, 6(3), 540-549. DOI: 10.5897/IJPS10.586. Disponible en: [http://www.academicjournals.org/article/article1380792511\\_Blanco%E2%80%93Mac%C3%ADas%20et%20al.pdf](http://www.academicjournals.org/article/article1380792511_Blanco%E2%80%93Mac%C3%ADas%20et%20al.pdf)
- Dominique, C. R., Rivera, L. E. y Rosiers, D. F. (2011). Determining the value at risk in the Shadow of the power law: the case of the SP-500 index. *Journal of Global Business and Technology*, 7(1). Disponible en: <http://web.b.ebscohost.com/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=9&sid=5cf3bdab-1614-4b61-9346-db48362f467e%40sessionmgr114&hid=103>
- Fattahi, M. H., Talebbeydokhti, N., Rakhshandehroo, G. R., Shamsai, A. y Nikooee, E. (2011). The robust fractal analysis of time series: Concerning signal class and data length. *Fractals*, 19(1), 29-49. DOI: 10.1142/S0218348X11005099. Disponible en: <http://web.b.ebscohost.com/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=11&sid=5cf3bdab-1614-4b61-9346-db48362f467e%40sessionmgr114&hid=103>
- Gama Design Software. (1995). *GS+: Geostatistics for the Environmental Sciences*. Version 2.3. Plainwell. USA. Disponible en: <http://www.gammasoftware.com/>
- Ghosh, D., Argha, D., Srimonti, D., Rosalima, S. y Shukla, S. (2012). Multifractality of radon concentration fluctuation in earthquake related signal. *Fractals*, 20(1), 33-39. Disponible en: <http://web.a.ebscohost.com/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=6&sid=415f824f-6cc0-4f21-9891-e727886705bf%40sessionmgr4004&hid=4114>
- Grönlund, A., Yi, I. G. y Kim, B. J. (2012). Fractal profit landscape of the stock market. *PLoS One*, 7(4): e33960. DOI:10.1371/journal.pone.0033960. Disponible en: <http://web.b.ebscohost.com/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=14&sid=5cf3bdab-1614-4b61-9346-db48362f467e%40sessionmgr114&hid=103>
- INEGI (Instituto Nacional de Estadística y Geografía) (2011). El cultivo del frijol en Zacatecas. *Censo Agropecuario 2007*. Disponible en: [http://www.inegi.org.mx/prod\\_serv/contenidos/espanol/bvINEGI/productos/censos/agropecuario/2007/agricultura/frijol\\_zac/CultfriZac.pdf](http://www.inegi.org.mx/prod_serv/contenidos/espanol/bvINEGI/productos/censos/agropecuario/2007/agricultura/frijol_zac/CultfriZac.pdf). Fecha de consulta: 20 agosto de 2014.
- INEGI (Instituto Nacional de Estadística y Geografía) (2009). *Estadísticas Históricas de México*. Disponible en: [http://www.inegi.org.mx/prod\\_serv/contenidos/espanol/bvINEGI/productos/integracion/pais/historicas/EHM7-1.pdf](http://www.inegi.org.mx/prod_serv/contenidos/espanol/bvINEGI/productos/integracion/pais/historicas/EHM7-1.pdf). Fecha de consulta: 17 de marzo de 2014.
- Kesavarao, P., Rao, K. M. M. y Muralikrishna, V. (2011). Comparison of fractal dimensions of SAR and optical digital elevation models. *International Journal of Geoinformatics*, 7(2). ISSN 16S6-ii5. Disponible en: <http://web.b.ebscohost.com/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=27&sid=5cf3bdab-1614-4b61-9346-db48362f467e%40sessionmgr114&hid=103>
- La Torre, D., Marsiglio, S. y Privileggi, F. (2011). Fractals and self-similarity in economics: the case of a stochastic two-sector growth model. *Image Analysis Stereology*, 30, 143-151. DOI:10.5566/ias.v30.p143-151. Disponible en: <http://web.b.ebscohost.com/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=19&sid=5cf3bdab-1614-4b61-9346-db48362f467e%40sessionmgr114&hid=103>
- Ledesma, M. J. C. y Ramírez, M. C. A. (1994). La producción de frijol en México y sus perspectivas ante el tratado de libre comercio, en R. Schwentesius Rindermann, M. A., Gómez Cruz, J. C. Ledesma Mares, C. Gallegos Vázquez (coords.), *El TLC y sus repercusiones en el sector agropecuario del centro-norte de México* (pp. 39-61). Chapingo: CIESTAAM-Universidad Autónoma de Chapingo.
- Lento, C. (2013). A synthesis of technical analysis and fractal geometry: Evidence from the components of the dow jones industrial average. *Journal of Technical Analysis*, 67, 25-45. Disponible en: <http://web.a.ebscohost.com/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=4&sid=415f824f-6cc0-4f21-9891-e727886705bf%40sessionmgr4004&hid=4114>
- Lung, F. L. y Yu, J. (2009). Spatial Nonstationarity and Spurious Regression: the Case with a Row-normalized Spatial Weights Matrix. *Spatial Economic Analysis*, 4(3), 301-327. DOI: 10.1080/17421770903114703. Disponible en: <http://web.a.ebscohost.com/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=10&sid=415f824f-6cc0-4f21-9891-e727886705bf%40sessionmgr4004&hid=4114>
- Mandelbrot, B. B. (1982). *The fractal geometry of nature*. New York: W. H. Freeman.



- Namyslowska, W. B. y Wynalek, J. (2011a). The analysis of vertical displacements for a hydrotechnical facility using geostatistics Part I. Structural analysis and estimation of displacements. *Studia Geotechnica et Mechanica*, 33(1), 33-54. Disponible en: <http://web.b.ebscohost.com/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=27&sid=5cf3bdab-1614-4b61-9346-db48362f467e%40sessionmgr114&hid=103>
- Namyslowska, W. B. y Wynalek, J. (2011b). The analysis of vertical displacements for a hydrotechnical facility using geostatistics Part II. Determining the probability of displacement occurrence and its prediction. *Studia Geotechnica et Mechanica*, 33 (2), 67-75. Disponible en: <http://web.b.ebscohost.com/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=42&sid=5cf3bdab-1614-4b61-9346-db48362f467e%40sessionmgr114&hid=103>
- Nansen, C. (2012). Use of variogram parameters in analysis of hyperspectral imaging data acquired from dual-stressed crop leaves. *Remote Sens*, 4, 180-193. DOI: 10.3390/rs4010180. Disponible en: <http://web.b.ebscohost.com/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=4&sid=6643a20a-4519-44f0-930e-8e1e532bf456%40sessionmgr115&hid=123>
- Sadoti, G., Pollock, M. G., Vierling, K. T., Albright, T. P. y Strand, E. K. (2014). Variogram models reveal habitat gradients predicting patterns of territory occupancy and nest survival among vesper sparrows. *Wildlife Biology*, 20: 97-107. DOI: 10.2981/wlb.13056
- Sagarpa-Siacon (Secretaría de Agricultura, Ganadería, Desarrollo Rural, Pesca y Alimentación-Servicio de Información Agroalimentaria de Consulta). (2013). *Estadísticas-Siacon 2012*. Disponible en: <http://www.SIAP.gob.mx/optestadistica-siacon2012parcial-siacon-zip/>. Fecha de consulta: 17 de marzo de 2014.
- Sagarpa-SIAP (Secretaría de Agricultura, Ganadería, Desarrollo Rural, Pesca y Alimentación-Servicio de Información Agroalimentaria y Pesquera). (2013). *Cierre de la producción agrícola por cultivo*. Disponible en: <http://www.SIAP.gob.mx/cierre-de-la-produccion-agricola-por-cultivo/>. Fecha de consulta: 17 de marzo de 2014.
- Sánchez, G. M., Fernández, M. M. y Trinidad, S. J. (2012). Introducing fractal dimension algorithms to calculate the Hurst exponent of financial time series. *European Physical Journal B Condensed Matter*, 85(3): 1-13. DOI: 10.1140/epjb/e2012-20803-2. Disponible en: <http://web.b.ebscohost.com/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=33&sid=5cf3bdab-1614-4b61-9346-db48362f467e%40sessionmgr114&hid=103>
- SARH (Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos). (1983). Consumos aparentes de productos agrícolas 1925-1982. *Economía Agrícola*, 7(9).
- Secretaría de Economía. (2012). *Análisis de la cadena de valor del frijol. Dirección general de industrias básicas*. Disponible en: [http://www.economia.gob.mx/files/comunidad\\_negocios/industria\\_comercio/analisis\\_cadena\\_valor\\_frijol.pdf](http://www.economia.gob.mx/files/comunidad_negocios/industria_comercio/analisis_cadena_valor_frijol.pdf). Fecha de consulta: agosto 20 de 2014.
- Serrano, C. L. M., Feliciano, G. G. y Arroyo, P. M. G. (2013). Estimación de cosecha de frijol, en: J. Aguilar-Ávila y V. H. Santoyo-Cortés (coords.), *Estimación de rendimientos en el sector agropecuario*. Chapingo: CIESTAAM-Universidad Autónoma de Chapingo y Miguel Ángel Porrúa.
- Valdez, C. R. D. y Olivares, S. E. (1998). Fractal analysis of Mexico's annual mean yields of maize, bean, wheat and rice. *Field Crops Research*, 59: 53-62. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4290\(98\)00108-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4290(98)00108-7)
- Valdez, C. R. D., Delgadillo, R. O., Magallanes, Q. R., Miramontes-De L., García, H. J. L., Enciso, M. A. y Mendoza, B. (2007). Scale-invariance of normalized yearly mean grain yield anomaly series. *Advances in Complex Systems*, 10(3): 395-412. DOI: 10.1142/S0219525907001161.
- Velásquez, V. M. A., Medina, G., Cohen, S. I., Oleschko, L. K., Ruiz, C. J. A. y Korvin, G. (2013). Spatial variability of the Hurst exponent for the daily scale rainfall series in the state of Zacatecas, Mexico. *Journal of Applied Meteorology & Climatology*, 52(12) DOI: 10.1175/JAMC-D-13-0136.1. Disponible en: <http://web.b.ebscohost.com/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=29&sid=5cf3bdab-1614-4b61-9346-db48362f467e%40sessionmgr114&hid=103>
- Wang, L., He, J., Zhang, T. y Zhu, P. (2014). Research on geostatistical analysis approaches. *Journal of Chemical & Pharmaceutical Research*, 6(6), 1796-1799. Database: Academic Search Complete. Disponible en: <http://web.b.ebscohost.com/ehost/pdfviewer/pdfviewer?vid=38&sid=5cf3bdab-1614-4b61-9346-db48362f467e%40sessionmgr114&hid=103>
- Wilks, D. S. (2011). *Statistical methods in the atmospheric sciences. Academic Press. Volume 100 of International geophysics series*. USA. Elsevier Inc. ISSN 0074-6142. ISBN 0123850223, 9780123850225.