

Revista Electrónica Nova Scientia

De la representación de sistemas Euler-Lagrange
a la Hamiltoniana generalizada
From Euler-Lagrange system representation to
the generalized Hamiltonian one

L. H. Rodríguez-Alfaro y E. Alcorta-García

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo
León

México

L. H. Rodríguez-Alfaro. E-mail: luisralfa@gmail.com

Resumen

La representación Hamiltoniana generalizada de sistemas brinda una estructura que puede ser utilizada con ventaja en muchas áreas, entre las cuales se puede mencionar el diseño de observadores y el diagnóstico de fallas basado en modelos. Muchos de los trabajos en estos temas tienen como punto de partida al sistema en forma Hamiltoniana generalizada y, en general, se omite la explicación de cómo llegar a esta representación, por ejemplo, a partir de un modelo no lineal basado en las ecuaciones de Euler-Lagrange. En este trabajo se presenta un análisis detallado de cómo es que se obtiene la representación Hamiltoniana generalizada de un sistema a partir de las n ecuaciones diferenciales de segundo orden obtenidas con el formalismo Euler-Lagrange. Con la finalidad de mostrar en lo particular, después del caso general, cómo se obtiene la representación Hamiltoniana generalizada, se presentan algunos casos de estudio.

Palabras clave: Representación-Hamiltoniana, Euler-Lagrange, Ecuaciones-Hamilton, Transformación

Recepción: 31-10-2014

Aceptación: 29-09-2014

Abstract

The generalized Hamiltonian representation of systems gives structural advantages that can be used in many areas. Some of these are the design of nonlinear observer and model-based fault diagnosis. Many works have as start point the generalized Hamiltonian representation and there is no explication of the way in which this representation is obtained, as for example, starting from the Euler-Lagrange representation of the systems. In this work, a detailed analysis of how this representation is obtained from the n second order differential equations that describe a nonlinear Euler Lagrange system model is presented. In order to show in particular, after the general case, how the generalized Hamiltonian representation is obtained, some case studies are presented.

Keywords: Hamiltonian-representation, Euler-Lagrange, Hamilton-equations, transformation

1. Introducción

En el diseño de los sistemas de control se requiere la medición de los estados, lo cual no siempre es posible por lo que es necesario el diseño de observadores para desempeñar tal función, esto por un lado y por otro lado, los observadores también son utilizados en el diagnóstico de fallas con la finalidad de contar con sistemas de control confiables y seguros. El diseño de observadores no lineales aun cuando se conoce el modelo del sistema no lineal, no siempre es una tarea sencilla, desarrollo que se simplifica cuando el diseño del observador no lineal parte de la representación Hamiltoniana generalizada.

Para obtener la representación Hamiltoniana generalizada a partir del modelo Euler-Lagrange (E-L) de un sistema, se requiere de una transformación de Legendre. Aunque esto es bien conocido de la mecánica clásica (Goldstein, 2000), en este documento se presenta a detalle la aplicación de la transformación para realizar la conversión antes mencionada para tres ejemplos. Además, de las ecuaciones Hamiltonianas se presenta al sistema en una forma generalizada que permite visualizar mejor las características del sistema en cuestión.

En la literatura son bien conocidas las ecuaciones de Euler-Lagrange ver por ejemplo (White, 1958) y (Goldstein, 2000) donde estas ecuaciones se presentan en el contexto de la mecánica clásica, en (Ortega, 1998) se presentan también estas ecuaciones pero como un grupo de sistemas no lineales para los cuales se diseñan estrategias de control no lineal basado en pasividad, en (Kelly, 2005) también se tratan estas ecuaciones para el diseño de controladores en el contexto de robots manipuladores. Del mismo modo en (White, 1958) y (Goldstein, 2000) se presentan la formulación o ecuaciones de Hamilton en el contexto de la mecánica clásica, en (van der Schaft, 2000) también se presentan las ecuaciones de Hamilton para el análisis de sistemas en un contexto energético e incluso presentan un procedimiento para obtener estas ecuaciones a partir de las de Euler-Lagrange. Por su parte la representación Hamiltoniana generalizada en el contexto de sincronización de sistemas caóticos es presentada en (Sira-Ramirez y Cruz-Hernandez, 2001). Como se puede apreciar las 2 ecuaciones de E-L, de Hamilton y la representación Hamiltoniana generalizada, se encuentran en la literatura, sin embargo, al no haber muchos ejemplos disponibles de esta conexión para llegar a la representación Hamiltoniana generalizada a partir de un sistema no lineal con modelo Euler-Lagrange, en este trabajo se aborda esta situación. El trabajo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se presenta el desarrollo basado en

un principio diferencial para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange, en la sección 3 se presenta el análisis para obtener las ecuaciones de Hamilton el cual se basa en la transformación de Legendre, en la sección 4 se presenta el análisis que describe cómo llegar a la representación Hamiltoniana generalizada a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, en la sección 5 se obtiene la representación Hamiltoniana generalizada de dos sistemas no lineales con modelo E-L y finalmente en la sección 6 se presentan las conclusiones.

2. Ecuaciones Euler-Lagrange

La deducción de las ecuaciones de Euler Lagrange parte de la consideración del estado instantáneo del sistema y del concepto de desplazamiento virtual sobre el estado instantáneo, es decir, desde un principio diferencial (Goldstein, 2000).

El desplazamiento virtual ($\delta \mathbf{r}_i$); donde \mathbf{r}_i es un vector de posiciones (Spong, 2006) con $i = 1, \dots, m$, donde m es el número de partículas; es un desplazamiento infinitesimal de la posición de una partícula realizado instantáneamente, esto es a velocidad infinita sin que transcurra el tiempo durante el desplazamiento (este desplazamiento no se relaciona con el movimiento real de la partícula pues sólo es un concepto para análisis), durante este desplazamiento las fuerzas y restricciones pueden cambiar.

Si se supone que el sistema está en equilibrio, entonces la fuerza total (\mathbf{F}_i) en cada partícula desaparece, esto es $\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$. \mathbf{F}_i es el vector que representa las fuerzas que actúan sobre una partícula con $i = 1, \dots, m$. Con $\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ desaparece el trabajo virtual del vector de fuerza \mathbf{F}_i en el desplazamiento $\delta \mathbf{r}_i$, esto es

$$\sum_{i=1}^m \langle \mathbf{F}_i, \delta \mathbf{r}_i \rangle = 0, \dots \dots \dots (1)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica producto interno. Descomponiendo la fuerza total en la fuerza aplicada \mathbf{f}_i y en la fuerza de restricción \mathbf{f}_i^R

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_i^R \dots \dots \dots (2)$$

sustituyendo (2) en (1) resulta

$$\sum_{i=1}^m \langle \mathbf{f}_i, \delta \mathbf{r}_i \rangle + \sum_{i=1}^m \langle \mathbf{f}_i^R, \delta \mathbf{r}_i \rangle = 0, \dots \dots \dots (3)$$

si se consideran sistemas en los cuales el trabajo virtual neto de las fuerzas de restricción es cero, entonces el segundo término es igual a cero en la ecuación (3). Esta condición se cumple para cuerpos rígidos. De tal forma que ahora el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas es

$$\sum_{i=1}^m \langle \mathbf{f}_i, \delta \mathbf{r}_i \rangle = 0, \dots \dots \dots (4)$$

La ecuación (4) es conocida como el principio de trabajo virtual, el cual establece que el trabajo realizado por las fuerzas externas correspondiente a cualquier conjunto de desplazamiento virtual es cero. Note que este principio no es aplicable en general pues requiere que el segundo término de la ecuación (3) se satisfaga, esto es, que las fuerzas de restricción no generen trabajo. Por lo tanto, si el principio de trabajo virtual se aplica, entonces es posible analizar la dinámica del sistema sin tener que evaluar las fuerzas de restricción.

En (4), los desplazamientos virtuales no son independientes, por lo que no se puede concluir de esta ecuación que cada coeficiente de \mathbf{F}_i sea igual a cero. Para aplicar este razonamiento, se debe transformar a coordenadas generalizadas. Pero antes de hacer esto, se consideran sistemas que no están necesariamente en equilibrio. Para este tipo de sistemas el principio de D'Alembert establece que, si se introduce una fuerza ficticia $-\dot{\mathbf{p}}_i$ sobre la partícula i para cada i , donde $\dot{\mathbf{p}}_i$ es el momento de la partícula i , entonces cada partícula estará en equilibrio. Así, si se modifica la ecuación (1) reemplazando \mathbf{F}_i por $\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i$, resulta

$$\sum_{i=1}^m \langle (\mathbf{f}_i - \dot{\mathbf{p}}_i), \delta \mathbf{r}_i \rangle = \sum_{i=1}^m \langle \mathbf{f}_i, \delta \mathbf{r}_i \rangle + \sum_{i=1}^m \langle \dot{\mathbf{p}}_i, \delta \mathbf{r}_i \rangle = 0, \dots \dots \dots (5)$$

la ecuación (5) es conocida como el principio de D'Alembert y es válida para sistemas arbitrarios. Para obtener el principio de D'Alembert en función del desplazamiento virtual de las coordenadas generalizadas, se define la ecuación de transformación

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad i = 1, \dots, m, \dots \dots \dots (6)$$

donde n es el número de coordenadas independientes o grados de libertad. Del mismo modo, $\delta \mathbf{r}_i$ en términos de δq_j está dado por

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, \dots, m, \dots \quad (7)$$

considerando (7) resulta el trabajo virtual en término de las coordenadas generalizadas

$$\sum_{i=1}^m \langle \mathbf{f}_i, \delta \mathbf{r}_i \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{f}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \rangle = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j, \quad \dots \quad (8)$$

donde Q_j es la j -ésima fuerza generalizada, definida como

$$Q_j = \sum_{i=1}^m \langle \mathbf{f}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \rangle, \quad \dots \quad (9)$$

El otro término de la ecuación (5), considerando que $\dot{\mathbf{p}}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ esta descrito por

$$\sum_{i=1}^m \langle \dot{\mathbf{p}}_i, \delta \mathbf{r}_i \rangle = \sum_{i=1}^m \langle m_i \ddot{\mathbf{r}}_i, \delta \mathbf{r}_i \rangle, \quad \dots \quad (10)$$

donde m_i es la masa de la partícula, sustituyendo el desplazamiento virtual (7) en (10) resulta

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \langle m_i \ddot{\mathbf{r}}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \rangle. \quad \dots \quad (11)$$

Usando la regla diferenciación para el producto, se tiene

$$\sum_{i=1}^m \langle m_i \ddot{\mathbf{r}}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \rangle = \sum_{i=1}^m \left[\frac{d}{dt} \left(\langle m_i \dot{\mathbf{r}}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \rangle \right) - \langle m_i \dot{\mathbf{r}}_i, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] \dots \quad (12)$$

Derivando (6) usando la regla de la cadena, resulta

$$\mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \dots \quad (13)$$

a partir de la ecuación previa se deduce que

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \dots \quad (14)$$

y de la misma ecuación (13) se deduce que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial q_j}, \dots \dots \dots (15)$$

sustituyendo (14), (15) y $\dot{r}_i = v_i$ en la ecuación (12) resulta

$$\sum_{i=1}^m \langle m_i \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \rangle = \sum_{i=1}^m \left[\frac{d}{dt} \left(\langle m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} \rangle \right) - \langle m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} \rangle \right], \dots \dots \dots (16)$$

Si la energía cinética se define como

$$T = \sum_{i=1}^m \left\langle \frac{1}{2} m_i v_i v_i \right\rangle, \dots \dots \dots (17)$$

entonces

$$\sum_{i=1}^m \langle m_i \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \rangle = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}, \dots \dots \dots (18)$$

sustituyendo (18) en (11) resulta que el segundo término de la ecuación (5) es

$$\sum_{i=1}^m \langle \dot{p}_i \delta r_i \rangle = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j, \dots \dots \dots (19)$$

combinando (19) y (8) resulta

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = 0, \dots \dots \dots (20)$$

ahora, ya que los desplazamientos virtuales δq_j son independientes se concluye que cada coeficiente es igual a cero en la ecuación (20), esto es

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad \dots \dots \dots (21)$$

Si la fuerza generalizada Q_j es la suma de una fuerza generalizada externa aplicada y otra debida a un campo potencial, entonces el siguiente cambio es válido. Suponiendo que existe una función τ_j y una función de energía potencial $U(q)$, resulta que

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \tau_j, \dots \dots \dots (22)$$

considerando (22) la ecuación (21) se puede reescribir en la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \tau_j, \dots \dots \dots (23)$$

donde $L = T - U$ es el Lagrangiano y (23) son las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange (Spong, 2006). Este análisis para llegar a las ecuaciones de Euler Lagrange también puede ser consultado en (White, 958).

3. Ecuaciones de Hamilton

Las ecuaciones de Hamilton o la formulación Hamiltoniana, es un método alternativo al de las ecuaciones de Lagrange para el estudio de sistemas físicos. En la formulación Hamiltoniana no hay ecuaciones de restricción entre las coordenadas. Las ecuaciones de Hamilton buscan describir el movimiento en términos de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, donde n son los grados de libertad del sistema (Goldstein, 2000).

La transición desde las ecuaciones de Lagrange a las ecuaciones de Hamilton corresponde a un cambio de variables, esto es, de $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ a $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ donde \mathbf{p} se relaciona con \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$ por medio del momento conjugado \mathbf{p}

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \dots \dots \dots (24)$$

Con $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$, $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n]^T$ y $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_n]^T$. Este cambio de variables se hace utilizando la transformación de Legendre. La transformación de $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ a $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ parte del diferencial del Lagrangiano $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, esto es

$$dL = \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\right)^T d\mathbf{q} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T d\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial t} dt, \dots \dots \dots (25)$$

Sustituyendo el momento conjugado (24) en la ecuación de Euler-Lagrange descrita por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}, \dots \dots \dots (26)$$

se tiene

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}, \dots \dots \dots (27)$$

despejando $\frac{d}{dt}\mathbf{p}$ resulta

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}, \dots \dots \dots (28)$$

reemplazando (24) y (28) en (25), resulta

$$dL = \dot{\mathbf{p}}^T d\mathbf{q} + \mathbf{p}^T d\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \dots \dots \dots (29)$$

Luego el Hamiltoniano $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ es generado por la transformación de Legendre, esto es

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{p} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \dots \dots \dots (30)$$

cuyo diferencial es

$$dH = \dot{\mathbf{q}}^T d\mathbf{p} + \mathbf{p}^T d\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{p}}^T d\mathbf{q} - \mathbf{p}^T d\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \dots \dots \dots (31)$$

donde el término $\mathbf{p}^T d\dot{\mathbf{q}}$ se elimina con la transformación de Legendre, resultando

$$dH = \dot{\mathbf{q}}^T d\mathbf{p} - \dot{\mathbf{p}}^T d\mathbf{q} - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \dots \dots \dots (32)$$

donde dH es

$$dH = \frac{\partial H^T}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial H^T}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \dots \dots \dots (33)$$

igualando las ecuaciones (32) y (33), resulta

$$\frac{\partial H^T}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial H^T}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \dot{\mathbf{q}}^T d\mathbf{p} - \dot{\mathbf{p}}^T d\mathbf{q} - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \dots \dots \dots (34)$$

de donde al igualar términos se obtienen $2n + 1$ ecuaciones

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \dots \dots \dots (35)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \dots \dots \dots (36)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \dots \dots \dots (37)$$

las ecuaciones (35) y (36) se conocen como las ecuaciones canónicas o simplemente ecuaciones de Hamilton (Goldstein, 2000), las cuales están constituidas por $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que reemplazan a las n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden de Lagrange. Este análisis también puede ser revisado en (White, 1958).

4. De Euler-Lagrange a representación Hamiltoniana generalizada

En esta sección se define una forma de obtener la representación Hamiltoniana generalizada partiendo de las ecuaciones E-L descritas en la sección 2 pasando por las ecuaciones canónicas de Hamilton descritas en la sección 3, se parte de las ecuaciones E-L con la finalidad de poder convertir el modelo no lineal descrito por las n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden a las $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de Hamilton, esto debido a que para obtener la representación Hamiltoniana generalizada se requiere tener ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con respecto a las variables de interés, tal como aparecen en la formulación Hamiltoniana la cual es posible obtener a partir de la formulación E-L. La formulación E-L es ampliamente utilizada para el modelado de sistemas físicos, de aquí el interés de tomarlas en consideración.

Las ecuaciones de E-L son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}, \dots \dots \dots (38)$$

donde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas generalizadas para un sistema de n grados de libertad, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas externas o generalizadas que pueden ser de tres tipos: 1.- Acciones de control, 2.- Disipación y 3.- Fuerzas de interacción del sistema con el medio ambiente, $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es la función Lagrangiana o simplemente Lagrangiano el cual es la diferencia entre la energía cinética y potencial, esto es

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}), \dots \dots \dots (39)$$

donde $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es la coenergía cinética descrita en términos de las coordenadas generalizadas

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T D(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \dots \dots \dots (40)$$

donde $D(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica definida positiva ($D(\mathbf{q}) = D(\mathbf{q})^T > 0$) y es denominada matriz de inercia generalizada y $U(\mathbf{q})$ es la energía potencial que depende del vector de coordenadas generalizadas \mathbf{q} , esta ecuación no tiene una forma específica como la tiene la ecuación de la coenergía cinética. Con (40) el Lagrangiano es

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T D(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - U(\mathbf{q}), \dots \dots \dots (41)$$

considerando el Lagrangiano (41) la ecuación de movimiento de Lagrange (38) se puede expresar como

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \right) + \frac{\partial U(q)}{\partial q} = \tau, \dots (42)$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \right] = D(q) \dot{q}, \dots (43)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \right] \right\} = D(q) \ddot{q} + \dot{D}(q) \dot{q}. \dots (44)$$

Considerando las ecuaciones (43) y (44) la ecuación de Lagrange (42) cambia a

$$D(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = \tau, \dots (45)$$

donde

$$C(q, \dot{q}) \dot{q} = \dot{D}(q) \dot{q} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T D(q) \dot{q}) \right), \dots (46)$$

$$g(q) = \frac{\partial U(q)}{\partial q}, \dots (47)$$

$g(q)$ es un vector de fuerzas o pares gravitacionales (Kelly, 2005).

Con la finalidad de llevar el sistema con modelo E-L a la representación Hamiltoniana generalizada, las n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden del modelo E-L se transforman a las ecuaciones canónicas de Hamilton, para de esta manera tener $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a partir de las cuales se obtiene la representación Hamiltoniana generalizada para el diseño de observadores no lineales. A partir de la ecuación de Lagrange (45), del momento conjugado

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \dots (48)$$

para $p = [p_1, \dots, p_n]^T$ y considerando que el Lagrangiano es

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q) = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} - U(q), \dots (49)$$

resulta que el momento conjugado (48) es

$$p = D(q) \dot{q}, \dots (50)$$

con esto las n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden (45) se transforman en las $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (van der Schaft, 2000), llamadas ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = D^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p}, \dots \dots \dots (51)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \boldsymbol{\tau}, \dots \dots \dots (52)$$

donde la función Hamiltoniana o Hamiltoniano $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ es

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T D^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p} + U(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T D(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + U(\mathbf{q}). \dots (53)$$

Un sistema no lineal con modelo E-L (45), al ser transformado a las ecuaciones de Hamilton (51) y (52), resulta un modelo no lineal con $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden cuyo vector de estados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ queda definido por

$$\mathbf{x} = [q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n]^T. \dots \dots \dots (54)$$

Ahora el sistema no lineal que originalmente estaba descrito por n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, queda descrito por $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden cuyo vector de estado es (54). A partir del modelo no lineal formado por n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, el sistema no lineal E-L puede ser llevado a una representación Hamiltoniana generalizada. Esta representación Hamiltoniana generalizada se obtiene a partir de un modelo descrito por $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, debido a esto es que se requiere pasar de las n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden de E-L a las $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de Hamilton; esto unido a que la representación cumpla con las condiciones definidas a continuación constituye la representación Hamiltoniana generalizada. Esta representación Hamiltoniana generalizada (Sira-Ramirez y Cruz-Hernández, 2001), esta descrita por

$$\dot{\mathbf{x}} = [J(\mathbf{x}) + S(\mathbf{x})] \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + F(\mathbf{x}) + \mathbf{g}\mathbf{u}, \dots \dots \dots (55)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de estados, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ es el vector de entradas, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ es una matriz constante, $J(\mathbf{x}), S(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son matrices cuadradas que deben satisfacer para todo \mathbf{x} las siguientes propiedades

$$J(\mathbf{x}) = -J^T(\mathbf{x}), \quad S(\mathbf{x}) = S^T(\mathbf{x}), \dots \quad (56)$$

$H(\mathbf{x})$ es una función suave de energía definida globalmente positiva en \mathbb{R}^n la cual se propone de forma que se cumpla la definición y se asume que siempre existe, frecuentemente se usa una función cuadrática de energía descrita como:

$$H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T M \mathbf{x} \quad \dots \quad (57)$$

al derivar parcialmente $H(\mathbf{x})$ con respecto a \mathbf{x} se obtiene el vector gradiente

$$\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right] \dots \quad (58)$$

donde $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante simétrica definida positiva y $F(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial que contiene las no linealidades del sistema. Debido a que las condiciones de la representación Hamiltoniana generalizada no tienen un grado elevado de restricción, una gran cantidad de sistemas no lineales con modelo E-L tales como sistemas electromecánicos, eléctricos, mecánicos y más pueden ser llevados a esta representación.

5. Ejemplos

El Motor Síncrono de Imán Permanente (PMSM por sus siglas en inglés), el PVTOL (Planar Vertical Take Off and Landing aircraft) y un sistema de levitación magnética son los tres sistemas que se presentan para mostrar cómo llegar a la representación Hamiltoniana generalizada a partir de su modelo Euler Lagrange.

5.1. PVTOL

El esquema del PVTOL está formado por dos rotores fijos a una barra rígida con el centro de masa del vehículo a la misma distancia uno de otro. Este vehículo es considerado como un sistema subactuado, debido a que tiene dos entradas y tres salidas o grados de libertad. Tiene un mínimo número de estados y entradas, con los que es posible contar con todas las características que deben tomarse en cuenta para el diseño de sistemas de control para vehículos aéreos que se mueven en el espacio tridimensional.

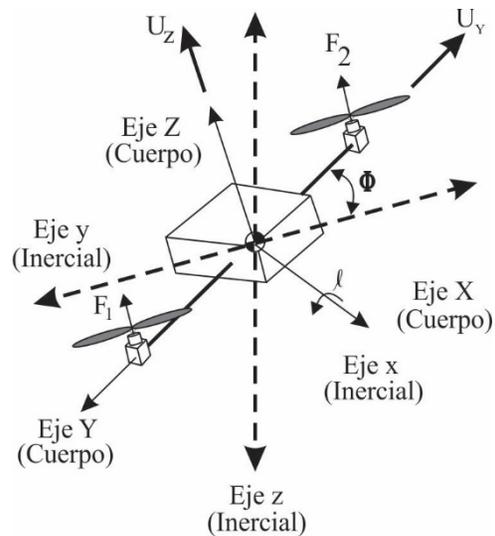


Figura 1. PVTOL de dos rotores

El modelo Euler Lagrange del PVTOL descrito a continuación se puede encontrar en el trabajo sometido (Lara) y en (Wong, 2007)

$$D(q)\ddot{q} + g(q) = \tau \dots\dots\dots (59)$$

donde τ es el vector de entrada que representa las fuerzas y momentos, $g(q)$ contiene los términos gravitacionales y la matriz $D(q)$ contiene términos inerciales.

Para el PVTOL se define $q = [Y, Z, \theta]^T$ como el vector de estado generalizado $\tau = [U_x, U_y, l]^T$, donde

$$D(q) = \begin{bmatrix} -ms\theta & mc\theta & 0 \\ mc\theta & ms\theta & 0 \\ 0 & 0 & J_x \end{bmatrix}, \quad g(q) = \begin{bmatrix} mgc\theta \\ mgs\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \dots\dots\dots (60)$$

donde m es la masa del PVTOL, J_x es la inercia, s y c son las abreviaciones de seno y coseno, respectivamente.

El movimiento en el eje vertical está representado por Y , en el eje horizontal por Z y la posición angular por θ .

5.1.1. Representación Hamiltoniana del PVTOL

Usando el análisis mostrado en la sección 4 se obtienen las ecuaciones de Hamilton a partir del modelo Euler Lagrange (59) del PVTOL. Considerando el vector de momentos generalizados

$$p = D(q)\dot{q}, \dots\dots\dots (61)$$

y el Hamiltoniano

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T D^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + U(\mathbf{q}), \dots \dots \dots (62)$$

donde $U(\mathbf{q})$, es la energía potencial en el PVTOL. Considerando las ecuaciones de Hamilton (51) y (52)

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = D^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p}, \dots \dots \dots (63)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}} + \boldsymbol{\tau}, \dots \dots \dots (64)$$

donde el último término de la ecuación (63) se obtiene despejando $\dot{\mathbf{q}}$ de (61). Mientras que para obtener la ecuación (64), se tiene que

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T D^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + U(\mathbf{q}), \dots \dots \dots (65)$$

con esto (64) cambia a

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}^T D^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + U(\mathbf{q}) \right) + \boldsymbol{\tau} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}^T D^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} U(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}, \dots (66)$$

recordando la ecuación (47) descrita por $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} U(\mathbf{q}) = \mathbf{g}(\mathbf{q})$, resulta

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}^T D^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \right) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}, \dots \dots \dots (67)$$

donde

$$D^{-1}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m} s\theta & \frac{1}{m} c\theta & 0 \\ \frac{1}{m} c\theta & \frac{1}{m} s\theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_x} \end{bmatrix}, \dots \dots \dots (68)$$

Haciendo los cálculos y desarrollando las ecuaciones (63) y (67) resulta que las ecuaciones del PVTOL son

$$\dot{x}_1 = -\frac{x_4}{m} s x_3 + \frac{x_5}{m} c x_3, \dots \dots \dots (69)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{x_4}{m} c x_3 + \frac{x_5}{m} s x_3, \dots \dots \dots (70)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{x_6}{J_x}, \dots \dots \dots (71)$$

$$\dot{x}_4 = -m g c x_3 + U_z, \dots \dots \dots (72)$$

$$\dot{x}_5 = -mgsx_3 + U_Y, \dots\dots\dots (73)$$

$$\dot{x}_6 = \frac{x_4^2}{2m} cx_3 + \frac{x_4 x_5}{m} sx_3 - \frac{x_5^2}{2m} cx_3 + l, \dots\dots (74)$$

Donde $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T = [Y, Z, \emptyset, p_1, p_2, p_3]^T = [\mathbf{q}, \mathbf{p}]^T$. Ahora para obtener la representación Hamiltoniana generalizada (55) del modelo (69)-(74), se propone la siguiente función Hamiltoniana

$$H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{x}, \dots\dots\dots (75)$$

cuyo vector gradiente es

$$\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x}, \dots\dots\dots (76)$$

donde existe una matriz constante simétrica definida positiva $M = I \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, luego las matrices son

$$J(\mathbf{x}) = [0] \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad S(\mathbf{x}) = [0] \in \mathbb{R}^{6 \times 6},$$

$$F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{x_4}{m} sx_3 + \frac{x_5}{m} cx_3 \\ \frac{x_4}{m} cx_3 + \frac{x_5}{m} sx_3 \\ x_6 \\ J_x \\ -mgcx_3 \\ -mgsx_3 \\ \frac{x_4^2}{2m} cx_3 + \frac{x_4 x_5}{m} sx_3 - \frac{x_5^2}{2m} cx_3 \end{bmatrix}, \quad g^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Con estas matrices la representación Hamiltoniana resulta como

$$\dot{\mathbf{x}} = J(\mathbf{x}) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + S(\mathbf{x}) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + F(\mathbf{x}) + g \begin{bmatrix} U_Z \\ U_Y \\ l \end{bmatrix}. \dots\dots\dots (77)$$

La ecuación (77) describe la representación Hamiltoniana generalizada, la cual cumple con todas las condiciones que establece tal representación por lo cual se puede concluir que es correcta. La ventaja de que exista tal representación del PVTOL es que permite el diseño de observadores no lineales de estado, los cuales son utilizados para el diagnóstico de fallas con técnicas basadas en el modelo. Esta representación para el diseño de observadores tiene como ecuación de salida $\mathbf{y} = \mathbf{C} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$, donde $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz constante y $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ donde m es el número de salidas.

5.2. Motor Síncrono de Imán Permanente

En la figura 2 se presenta un motor síncrono de imán permanente.

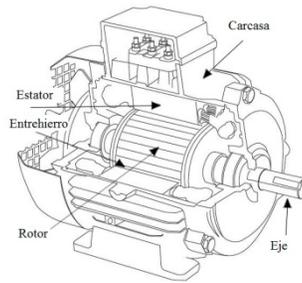


Figura 2. Motor síncrono

El modelo Euler Lagrange del PMSM en el marco de referencia estacionario dq0 fue tomado de (Krause, 2002); donde dq0 es la abreviación de (direct-quadrature-zero) que es una transformación matemática que permite girar el marco de referencia de los sistemas trifásicos reduciendo de esta forma las tres cantidades de corriente alterna a dos cantidades de corriente directa, esto facilita el estudio de las máquinas eléctricas.

Tal modelo esta descrito por

$$D\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{R}_m\mathbf{x} = \boldsymbol{\tau}, \dots\dots\dots (78)$$

con $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T = [i_d, i_q, \omega]^T$ donde i_d e i_q son las corrientes eléctricas en los ejes de directa y cuadratura respectivamente, $\boldsymbol{\tau} = [u_1, u_2, u_3]^T = [u_d, u_q, -\tau_L]^T$ donde u_d, u_q son los voltajes en los ejes de directa y cuadratura respectivamente y τ_L es el par de carga. Donde las matrices de la ecuación (78), son

$$D = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & J_m \end{bmatrix}, \mathbf{C}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -Ln_p x_3 & 0 \\ Ln_p x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_m = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & n_p \emptyset \\ 0 & -\frac{3}{2}n_p \emptyset & B \end{bmatrix}, \dots (79)$$

donde ω es la velocidad del rotor, \emptyset es el flujo de imán permanente, J_m es la inercia del rotor, B es el coeficiente de fricción viscosa, $\tau_e = -\frac{3}{2}n_p \emptyset$ es el par electromagnético, n_p es el número de par de polos, L es la inductancia y R es la resistencia del estator.

Para obtener la representación Hamiltoniana (55) del motor síncrono descrito por el modelo (79), se propone la siguiente función Hamiltoniana como:

$$H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(x_1^2 + Lx_2^2 + \frac{2}{3}J_m x_3^2 \right), \dots\dots\dots (80)$$

donde L y J_m son constantes positivas y puesto que los estados x_1 , x_2 y x_3 están elevados al cuadrado se cumple con la condición que establece que $H(\mathbf{x})$ sea una función definida positiva globalmente en \mathbb{R}^n . El vector gradiente de $H(\mathbf{x})$ es

$$\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left[x_1, Lx_2, \frac{2}{3}J_m x_3 \right]^T, \dots\dots\dots (81)$$

$$\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = M\mathbf{x} \Rightarrow M = \text{diag} \left[1, L, \frac{2}{3}J_m \right], \dots\dots\dots (82)$$

donde M es una matriz simétrica constante y definida positiva, lo cual cumple con la condición para proponer $H(\mathbf{x})$. Una vez propuesta la función Hamiltoniana y su vector gradiente, la representación Hamiltoniana generalizada del PMSM resulta como:

$$\dot{\mathbf{x}} = J(\mathbf{x}) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + S(\mathbf{x}) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + F(\mathbf{x}) + g\mathbf{u}, \dots\dots\dots (83)$$

donde $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3]^T$, $\mathbf{u} = \boldsymbol{\tau} = [u_d, u_q, \tau_L]^T$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3n_p\phi}{2J_m L} \\ 0 & \frac{3n_p\phi}{2J_m L} & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \dots\dots\dots (84)$$

$$F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} n_p x_3 x_2 \\ -n_p x_3 x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

En este caso, puesto que las ecuaciones que modelan al PMSM son de primer orden con respecto a las variables de interés que son las corrientes y la velocidad, no es necesario obtener las ecuaciones de primer orden de Hamilton para llevar el modelo del sistema a la representación Hamiltoniana generalizada. Este caso de estudio también se utiliza en (Rodríguez, et. al., 2012), donde la representación Hamiltoniana generalizada se utiliza como parte de la solución al problema de diagnóstico de fallas basado en el modelo para sistemas no lineales.

5.3. Sistema de levitación magnética

El sistema de levitación magnética presentado en la figura 3

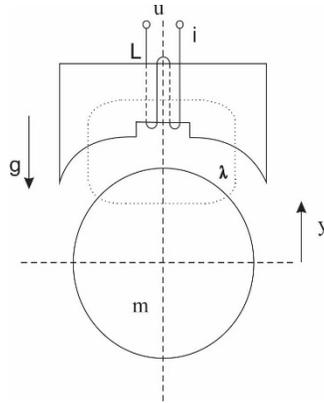


Figura 3. Sistema de levitación magnética

El modelo E-L del sistema de levitación magnética sin disipación tomado de (Ortega, 1998), esta descrito por

$$D(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G} = \boldsymbol{\tau}, \dots\dots\dots (85)$$

donde

$$D(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-q_2)} & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2(1-q_2)^2} \begin{bmatrix} \dot{q}_2 & \dot{q}_1 \\ -\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg_1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots\dots (86)$$

donde q_1 representa la corriente eléctrica en la inductancia, q_2 representa la posición de la bola medida con respecto a la posición nominal, con estas se forma el vector $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^T$, m es la masa de la bola, u_1 es la entrada de control y g_1 es la gravedad. En la Figura 3, λ es el flujo en la inductancia.

Puesto que el modelo (85) del sistema de levitación magnética consta de n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, se requiere para llegar a su representación Hamiltoniana generalizada, obtener las ecuaciones de Hamilton con lo cual se tendrán $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que describen el sistema.

A partir del modelo E-L (85) se obtienen las ecuaciones de Hamilton, esto es considerando el vector de momentos generalizados

$$\mathbf{p} = D(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \dots\dots\dots (87)$$

y el Hamiltoniano

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T D^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p} + U(\mathbf{q}), \dots\dots\dots (88)$$

Considerando las ecuaciones de Hamilton (51) y (52)

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = D^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{p}, \dots\dots\dots (89)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{q}} + \boldsymbol{\tau}, \dots\dots\dots (90)$$

Aplicando (89) a el modelo del sistema de levitación,

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} (1-q_2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \dots\dots\dots (91)$$

de donde resulta que

$$\dot{q}_1 = p_1(1-q_2), \dots\dots\dots (92)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{p_2}{m}. \dots\dots\dots (92)$$

Ahora utilizando (90) se obtienen las ecuaciones diferenciales en relación a los momentos, esto es

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}^T D^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} U(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}, \dots\dots\dots (94)$$

donde $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} U(\mathbf{q}) = \mathbf{G}$. Tomando el primer término de la ecuación previa, se tiene

$$\frac{1}{2} \mathbf{p}^T D^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-q_2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \dots\dots\dots (95)$$

$$= \frac{1}{2} \left(p_1^2(1-q_2) + \frac{p_2^2}{m} \right) = \Phi(q_2), \dots\dots\dots (96)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} \Phi(q_2) \\ \frac{\partial}{\partial q_2} \Phi(q_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -mg_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_l \\ 0 \end{bmatrix}, \dots\dots\dots (97)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} p_1^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -mg_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_l \\ 0 \end{bmatrix}, \dots\dots\dots (98)$$

de donde resulta

$$\dot{p}_1 = u_l, \dots\dots\dots (99)$$

$$\dot{p}_2 = u_l \frac{1}{2} p_1^2 + mg_l, \dots\dots\dots (100)$$

Definiendo $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [q_1, q_2, p_1, p_2]^T$, entonces el sistema queda expresado como

$$\dot{x}_1 = x_3 - x_2 x_3, \dots\dots\dots (101)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{x_4}{m}, \dots\dots\dots (102)$$

$$\dot{x}_3 = u_l, \dots\dots\dots (103)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{2} x_3^2 + mg_l, \dots\dots\dots (104)$$

Para obtener la representación Hamiltoniana generalizada (55) de este sistema, a partir del modelo (101)-(104), el cual está formado por las n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, se propone la siguiente función Hamiltoniana

$$H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{1}{m} x_4^2 \right), \dots\dots\dots (105)$$

puesto que m es una constante positiva y los estados son términos cuadráticos la función propuesta $H(\mathbf{x})$ cumple con ser una función suave definida globalmente positiva en \mathbb{R}^n . La otra condición que debe cumplir la función propuesta es que la matriz M del vector gradiente de $H(\mathbf{x})$ sea constante simétrica y definida positiva, esto es

$$\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left[x_1, x_2, x_3, \frac{1}{m} x_4 \right]^T, \dots\dots\dots (106)$$

$$\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = M\mathbf{x} \Rightarrow M = \text{diag} \left[1, 1, 1, \frac{1}{m} \right], \dots\dots\dots (107)$$

donde

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$g = I \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -x_1 x_2 \\ 0 \\ 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right) x_3^2 + m g_l \end{bmatrix},$$

en la representación previa se cumple con las condiciones establecidas para las matrices $J = -J^T$ y $S = -S^T$.

6. Conclusiones

Se ha presentado un análisis para obtener la representación Hamiltoniana generalizada a partir del modelo no lineal de un sistema descrito por las ecuaciones Euler-Lagrange, para lo cual se transforman las n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden de Lagrange, a las 2n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de Hamilton a partir de las cuales resulta la representación en mención, pues para tal representación se requiere tener la derivada del vector

de estado de interés, lo cual frecuentemente corresponde a la ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden como lo son las de Hamilton. Como casos particulares se presentó la obtención de la representación Hamiltoniana generalizada de tres sistemas no lineales descritos en la formulación Euler-Lagrange, PVTOL, motor síncrono de imán permanente y un sistema de levitación magnética. En el caso del PVTOL fue necesario transformar las n ecuaciones de segundo orden a las $2n$ ecuaciones de primer orden de Hamilton debido a que las variables de estado de interés son las posiciones las cuales resultan de transformar el modelo E-L a un modelo Hamiltoniano, en tanto que para el caso del PMSM no fue necesario obtener las ecuaciones de Hamilton pues las variables de interés son las derivadas de las posiciones las cuales están descritas por ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, que en este caso corresponden a las corrientes y a la velocidad del motor y en el sistema de levitación magnética fue necesario la transformación de las n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden a las $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con lo cual hace posible tratar con la posición de la bola que es la variable de interés.

7. Agradecimientos

El primer autor agradece el apoyo de CONACyT para realizar su doctorado. Los autores agradecen al CONACYT por el financiamiento del trabajo a través del proyecto de ciencia básica no. 178282.

Referencias

- Goldstein, Herbert, Charles Poole and John Safko. (2000). Classical mechanics. Third edition.
- Kelly, Rafael, Victor Santibáñez, and Antonio Loría. (2005). Control of robot manipulators in joint space. Springer.
- Krause P. C., O. Wasynczuk, and S. D. Sudhoff. (2002). Analysis of electric machinery and drive systems. A. John Wiley and sons, inc. publication. 20
- Lara, D., P. Panduro, G. Romero, E. Alcorta and R. Betancourt. Robust control design techniques using differential evolution algorithms applied to the pvtol. Intelligent automation and soft computing.
- Ortega, Romeo, Antonio Loría, Per J. Nicklasson and Hebert Sira-Ramírez. (may 1998). Passivity based control of Euler Lagrange systems: Mechanical, electrical and electromechanical applications. Berlin: Springer Verlag.

Rodríguez-Alfaro, L. H., E. Alcorta-García y C. Posadas-Castillo. (2012). Diagnóstico de fallas en sistemas hamiltonianos. Congreso Nacional de Control Automático.

Sira-Ramirez, H. and C. Cruz-Hernández. (2001). Synchronization of chaotic systems: a generalized Hamiltonian systems approach. International Journal of bifurcation and chaos, vol. 11, no. 5:1381-1395.

Spong, Mark W., Seth Hutchinson and M. Vidyasagar. (2006). Robot modeling and control. A. John Wiley and sons, inc.

Van der Schaft, A. (2000). L2-Gain and passivity techniques in nonlinear control. Springer.

White D. C. and H. H. Woodson. (1958). Electromechanical energy conversion.

Wong, K. C., J. A. Guerrero, D. Lara, and R. Lozano. (2007). Attitude stabilization in over flight of a mini tail-sitter uav with variable pitch propeller. In IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems.

