Universitas Philosophica 64, año 32
enero-junio 2015, Bogotá, Colombia – ISSN 0120-5323

LA NATURALEZA ANALÍTICA DE LA VERDAD MATEMÁTICA

María Paula Parra Ballesteros
Pontificia Universidad Javeriana
m92parra@gmail.com

En este breve trabajo emprendo la tarea de presentar, de manera muy general, la filosofía de la matemática pura, propuesta por Luis Eduardo Suárez en dos artículos publicados en *Universitas Philosophica*. Los artículos se titulan: "Filosofía–Lógica–Matemáticas" y "La naturaleza de la verdad matemática". Para caracterizar la filosofía de la matemática de Luis Eduardo, abordo la pregunta por la naturaleza de la verdad en esta ciencia. El trabajo que ahora presento es motivado por la invitación que hace el profesor Suárez a sus estudiantes en el primero de los artículos mencionados:

> Quisiera con estas líneas, excitar a los jóvenes que aspiran a ser filósofos para que se inicien en algunos temas fascinantes de la filosofía: los de la filosofía de la matemática (y otros temas conexos como la filosofía de la lógica) en los que muy poco o nada ha incursionado la filosofía colombiana. (Suárez, 1984, p. 66)

Este texto lo dividido en dos secciones. La primera, "Tres corrientes filosóficas en matemáticas", da cuenta de tres escuelas que surgieron en la segunda mitad del S. XIX y primera mitad del S. XX. La finalidad de esta sección es mostrar las razones por las cuales el profesor no admite que la caracterización de la filosofía de la matemática hecha por cada escuela sea satisfactoria. La segunda sección, "Naturaleza analítica de la verdad matemática: propuesta de Luis Eduardo Suárez", expone las razones y los motivos por los cuales se establece que la naturaleza de la verdad matemática es analítica.

1. Tres corrientes filosóficas en matemáticas

La crítica que se realiza a la escuela logicista, intuicionista y formalista no es una crítica destructiva. Aunque se señalan las falencias de cada escuela, razones por las cuales no se puede admitir que fundamenten absolutamente la matemática, se muestra el avance y el refinamiento de los métodos que produjo cada uno de los programas.

Un antecedente filosófico de la propuesta logicista lo desarrolla Leibniz en sus trabajos. A finales del S. XIX Gottlob Frege postula la totalidad de la tesis logicista, pero esta solo se dará a conocer a través de su máximo representante: Bertrand Russell. La tesis fundamental del logicismo es: "la matemática se reduce a la lógica" (Suárez, 1984, p. 72). Según esta definición podemos entender que el propósito del programa logicista es fundamentar en leyes y principios lógicos el conocimiento aritmético y su verdad.

Para lograr la deducción de todas las proposiciones matemáticas de axiomas y leyes lógicos, los adeptos al logicismo debieron desarrollar con extrema finura dos elementos: primero, un algoritmo simbólico parecido al del álgebra; segundo, diversos métodos potentes de análisis que permiten definir todos los postulados matemáticos desde términos lógicos.

Dado el desarrollo de estos elementos, Russell y Whitehead emprendieron la ardua tarea de probar la tesis logicista, para lograrlo tuvieron demostrar dos puntos: uno, que la expresión de la totalidad de las proposiciones aritméticas se puede realizar en términos lógicos; otro, el hecho de que toda proposición matemática verdadera es una expresión lógica válida, es decir, la deducción, por medio de razonamientos puramente lógicos y desde una lógica axiomatizada, de toda proposición matemática (Suárez, 1984, p. 72). El primer punto, a diferencia del segundo, es posible cumplirlo.

La imposibilidad de demostrar que toda proposición matemática es una expresión lógica verdadera significa que la verdad de por lo menos una proposición matemática no se sigue de los axiomas y las leyes de la lógica, aunque la proposición dentro del sistema se pueda expresar en términos lógicos. Bretrand Russell halló esta contradicción en los trabajos de Frege, y con la intención de salvar el proyecto logicista, propuso incluir entre los axiomas del sistema el de *reducibilidad*. Otro problema del programa logicista es la falta de justificación del infinito actual, es decir, la explicación de la postulación de totalidades infinitas.

Por su parte, el programa intuicionista se constituye como opuesto al programa logicista. Aunque esta nueva escuela acepta la axiomatización del análisis, rechaza la idea del infinito actual en matemática. Esto que implica en la ciencia el rechazo a la construcción o postulación –teórica– del conjunto total de los números reales. Así pues, esta escuela no acepta en grado alguno la idea cantoriana de números y clases transfinitas.

La cercania de la escuela intuicionista con la epistemología kantiana –la caracterización kantiana del conocimiento matemático– es patente. Al igual que Kant, los miembros de esta escuela –Kroneckner, Poincaré y Brower– sostienen que el conocimiento matemático es un conocimiento creado por la mente del matemático y justificado por la intuición. Por esta razón, la verdad que expresan las proposiciones matemáticas no se refiere a objetos intemporales o metafísicos, sino que ella está destinada a satisfacer ciertas necesidades del hombre en relación con un medio.

La lógica que enmarca la matemática intuicionista no puede ser la lógica clásica elemental; ya que la lógica clásica acepta postulados que la matemática intuicionista rechaza como consecuencia de su fundamento epistemológico. Dos de estos postulados son la construcción de conjuntos o clase infinitos y el principio de tercero excluido.

La superioridad filosófica de la escuela intuicionista respecto de la escuela logicista consiste en que el intuicionismo "[c]umple el programa que establece, sin recurrir a presupuestos excluídos por él mismo, utilizando en sus construcciones los principios de razonamiento descritos en su lógica intuicionista" (Suárez, 1984, p. 74). El problema de la matemática intuicionista es que se le pueden plantear tanto las objeciones propias de la concepción cartesiana del conocimiento intuitivo, como las objeciones pertinentes a una concepción kantiana de la filosofía de la matemática. Además, esta escuela reduce en gran medida el conocimento de la matemática clásica al negar algunos de los postulados bajo los cuales esta se fundamenta.

Ahora bien, David Hilbert fundó y desarrolló el método formalista para fundamentar la matemática en una serie ordenada y finita de pasos que probasen la consistencia del sistema. Para lograr este cometido, dicha escuela tuvo que perfeccionar el método axiomático, con lo que excluye cualquier significado intuitivo de los términos primitivos que se utilizan. Al excluir un significado determinado de los términos primitivos se abre la posibilidad a que el método axiomático sea interpretado de distintas maneras. Además, por la reducción a postulados y axiomas básicos, así como el uso exhaustivo del simbolismo lógico de Peano, este método conduce a una economía del pensamiento.

¿Qué significa que una teoría sea formalizada? Que todas sus afirmaciones y reglas de inferencia, al margen de cualqueir contenido concreto, se pueden hacer explícitas. Para ello, el procedimiento que se debe aplicar requiere de un vocabulario formal que incluye reglas bien formadas de un sistema finito de axiomas, sobre los cuales se pueden efectuar transformaciones de acuerdo con reglas de inherencia. Una teoría es completamente formalizada si y solo si no contiene dos teoremas uno de los cuales sea negación del otro (Suárez, 1984, p. 76).

A diferencia de la escuela logicista y la escuela intuicionista, los formalistas no se interesan por los supuestos epistemológicos de la teoría. La consecuencia de esto es que no plantean su investigación respecto al carácter verdadero de las proposiciones matemáticas, sino respecto de si el sistema es o no consistente. Si el programa formalista hubiese sido exitoso, la matemática y la lógica –que se desarrollan simultáneamente– se tendrían que considerar independientes a la filosofía.

Por último, hay que decir que cada escuela aborda –para negar o afirmar– la relación entre matemática, lógica y filosofía. Además, por consideraciones que tienen que ver con el infinito –actual o potencial–, se asumen posturas respecto a la existencia real o 'abstracta' de los objetos matemáticos.

2. Naturaleza analítica de la verdad matemática: propuesta de Luis Eduardo Suárez

Si el problema central de la matemática es la definición de la verdad matemática (Suárez, 1984, p. 77), hay una relación efectiva entre la matemática, la lógica y la filosofía. Ahora bien, si la definición de la verdad matemática es analítica, se responde por los motivos que autorizan la aceptabilidad –validez objetiva– de los enunciados y teorías de una manera determinda.

De modo general, una afirmación matemática se afirma verdadera en el mismo sentido en el que lo hace la proposición "nigún hombre casado es soltero". Es decir, la aceptabilidad de la verdad no depende de la experiencia empírica ya sea porque la proposición no se encuentra ligada a la experiencia, o porque es anterior a ella. Por tanto, la verdad que expresan dichas proposiciones es analítica y *a priori*.

La analiticidad de la verdad de una proposición está condicionada por las definiciones o estipulaciones que determinan la significación de los términos usados en cada caso. La certeza de una afirmación analítica es absoluta, pero esta certeza –conseguida gracias al análisis de las definiciones de los términos implicados– tiene como costo la vaciedad de contenido informativo: de una proposición analítica no se sigue un contenido empírico o una implicación práctica. Esta explicación es suficiente para entender que la verdad de una proposición como "ningún hombre casado es soltero" es analítica. Pero la matemática no solo se constituye de términos definidos, en esta ciencia, también se encuentran conceptos básicos o términos primitivos que no se definen en la teoría, así como principios y relaciones lógicas que se utilizan en la demostración de las proposiciones.

El conjunto total de las definiciones, los axiomas y las relaciones lógicas de los elementos que conforman la ciencia son las estipulaciones que se admiten para su prueba. El conjunto de axiomas o postulados que adopta Suárez como base de toda la matemática es el sistema axiomático de Peano. Estos postulados pueden interpretarse de dos maneras: como axiomas materiales y como axiomas abstractos. A continuación se presentan los postulados axiomáticos materiales y la regla deductiva lógica adoptada; aunque la axiomática abstracta exalta la cualidad principal del sistema de Peano, a saber, que los postulados pueden ser interpretados de distintas maneras y no solo en el lenguaje aritmético, es más dificil y extenso dar y comprender los postulados y la demostración de la matemática desde axiomas abstractos. Hecha esta aclaración, los términos primitivos de la axiomática material de Peano son los conceptos de 0, número y sucesor. ellos no son definidos en los axiomáticos materiales:

> P_1 = 0 es un número.
> P_2 = El sucesor de un número (n) cualquiera es un número (n + 1) o n'.
> P_3 = Dos números diferentes no tienen el mismo sucesor.
> P_4 = 0 no es sucesor de ningún número.
> P_5 = Si P es una propiedad tal que: 0 tiene esa propiedad (P) y si siempre que n tiene la propiedad P, su sucesor tiene la propiedad P. Entonces: Todo número tiene esa propiedad P. (Suárez, 1985, p. 83)

De P_1 se sigue que el 0 es un número. Por P_2 si n = 0, (n + 1) = 1, este proceso se sigue indefinidamente siempre y cuando, para la nueva definición de un número particular n es igual a su antecesor inmediato. Por P_3 y P_5 se garantiza que en el proceso nunca se va a definir dos veces un mismo número. Por P_4 nunca se podrá definir 0.

Para definir las operaciones básicas de la mátemática, por ejemplo la adición, se debe establecer la relación lógica por la cuál es posible realizar la operación matemática. En este caso la relación que permite hacer la demostración es la transitividad de la identidad, en términos lógicos se expresa: ‘(a = b) (b = c) (a = c)’. En términos aritméticos, como ya están definidos los números naturales, se puede aplicar la transitividad de la identidad desde la definición de número como el agregado en 1 hasta llegar al término que por definición no es sucesor (0). Entonces, para definir la suma ‘7 + 5 = 12’ se deben tener presente tanto las definiciones recursivas de 7 y 5, como la de 12, para establecer que ‘7 + 5 = 12’ si ‘[12 = (11’) = 7 + (3’)’].

Como la matemática no se reduce a los números naturales, se deben definir todos los tipos de números –enteros, racionales, irracionales, reales, no-reales–. Estas definiciones son posibles en la medida en que se pueden definir los tipos mayores de números en relación con los tipos menores. Por lo que se llega a la necesidad de crear conjuntos de conjuntos de pares ordenados de una clase inferior que definan un número de la clase superior.

La definición de los tipos de números como conjuntos, unos más grandes que otros, supone dos axiomas que no son propiamente lógicos –es decir, que su verdad es independiente de la verdad de los otros postulados del sistema–, estos axiomas demostrativos son conocidos como el axioma de elección y de infinito, ellos garantizan que tanto los conjuntos finitos como los conjuntos infinitos son organizables.

Ahora bien, como lo importante para la matemática es expresar proposiciones verdaderas, los axiomas de Peano deben ser necesariamente interpretados en su significación habitual, la cual requiere la definición de 0, sucesor y número natural. Suárez acepta y adopta las definiciones dadas por G. Frege y B. Russell de estos conceptos pero, a diferencia del logicismo, considera que en la prueba de la noción de sucesor y número natural se deben utilizar los axiomas de elección y de infinito respectivamente.

Con todo, la definición de la naturaleza de la verdad matemática propuesta por Luis Eduardo consta de tres elementos: 1. El sistema axiomático de Peano. 2. La interpretación habitual –y la prueba formal– del programa logicista de los términos primitivos del sistema axiomático de Peano. 3. Los axiomas de elección e infinitud para justificar las definiciones de número natural y sucesor, tal y como los define el programa logicista. Estos son los componentes que conforman el logicismo del que habla Suárez en el penúltimo apartado de su segundo artículo. Desde este punto de vista es, entonces, posible sostener que la matemática es una rama de la lógica en el siguiente sentido:

a) Todo concepto de la Matemática –Aritmética, Álgebra, Análisis– puede definirse en términos de cuatro conceptos de la lógica pura. Los conceptos de negación, cuantificador universal, función y variable.

> Todo teorema de la matemática puede deducirse de esas definiciones por medio de los principio de la lógica (más los axiomas de elección y de infinito) (Suárez, 1985, p. 90).