ECONOFÍSICA. MECÁNICA ESTADÍSTICA DEL DINERO: CONSECUENCIAS TERMODINÁMICAS DE LA LIMITACIÓN EN LAS TRANSACCIONES ECONÓMICAS.

ECONOPHYSICS. STATISTICAL MECHANICS OF MONEY: THERMODINAMIC CONSEQUENCES OF LIMITATIONS IN ECONOMIC TRANSACTIONS.

"Money, it´s a gas"
Dark Side of the Moon. Pink Floyd

D. Pedro Valverde Caramés[1]
Jefe de Área. Servicio de Estudios Tributarios y Estadísticas.
Agencia Estatal de Administración Tributaria. España

Resumen

La Econofísica recurre a métodos de Mecánica Estadística y a la Física de sistemas complejos para modelizar los sistemas económicos. Los modelos de tipo gas (KWEM) intentan explicar las propiedades más relevante de las transacciones económicas en una sociedad partiendo de la Teoría Cinética de los Gases, que describe las interacciones entre las partículas de un gas. Se definen así los llamados modelos basados en agentes.

---

[1] Correo electrónico: pedro.valverdec@correo.aeat.es.
El autor agradece al Equipo Editorial la colaboración para la adaptación del documento original.

Si en estos modelos se introducen restricciones que limiten el intercambio económico, los sistemas convergerán a estados de equilibrio estadístico caracterizados por una importante desigualdad en el reparto de la riqueza. Por otra parte, lo anterior permite dotar de un significado económico a un parámetro fundamental en toda esta teoría como es el de *temperatura económica.*

Palabras clave

Econofísica; Física estadística; Distribución de Boltzmann-Gibbs; Modelos multi-agente; Economía computacional.

Abstract

Econophysics uses methods of Statistical Mechanics and Physics of Complex Systems to model economic systems. Gas type models (KWEM) try to explain the most important properties of economic transactions in a society, take into account the Kinetic Theory of Gases, which describes the interactions between the particles of a gas. The so-called agent-based models are thus defined. If restrictions of economic exchange are introduced in these models, the systems converge to statistical equilibrium states, characterized by significant inequality in the distribution of wealth. Moreover, this allows to provide an economic meaning to a fundamental parameter in all this theory: economical temperature.

Keywords

Econophysics; Statistical physics; Boltzmann-Gibbs Distributions; Multi-agent system; Computational Economic.

JEL: A12, C63.

1. Introducción

Un buen número de fenómenos económicos responden a lo que en Física se conoce bajo el nombre de dinámica no lineal o de sistemas complejos: sistemas cuyo comportamiento colectivo no se puede explicar a partir de la simple superposición de sus partes constituyentes. Por ejemplo, son de este tipo aquellos que describen situaciones muy alejadas del equilibrio o los que exhiben comportamientos caóticos. Cabe preguntarse, por tanto, si sería posible emplear métodos de Física Estadística para desarrollar modelos económicos realistas y eficientes. En los últimos años, este novedoso enfoque interdisciplinar, al que se ha dado en llamar *Econofísica* (véase, por ejemplo, Mantegna, R. y E. Stanley (2000)), ha mejorado de manera considerable nuestra comprensión de numerosos procesos económicos.

Este trabajo se centrará en los denominados modelos de tipo gas (conocidos en la literatura como *Kinetic Wealth Exchange Models* o KWEM), que intentan describir las interacciones económicas a partir de su analogía con uno de los sistemas físicos más sencillos que se conocen: un gas de partículas. La idea seminal proviene de los trabajos de Mandelbrot (1963) y se fundamenta en que las leyes de la Mecánica Estadística gobiernan el comportamiento de un inmenso número de interacciones individuales tales como las colisiones dentro de un gas contenido en un volumen cerrado. Desde esta perspectiva, la teoría clásica de gases homogéneos es fácilmente adaptable al esquema de un modelo económico: en este caso, las moléculas y sus velocidades son reemplazadas por agentes (individuos y/o empresas) y su dinero, y en lugar de colisiones binarias se consideran intercambios entre dos agentes económicos. Al igual que los diferentes modelos de interacciones en un gas determinan sus propiedades macroscópicas (presión, temperatura, entalpía, etc.), al considerarse diversos tipos de transacciones económicas se deberían recuperar distribuciones de dinero distintas y parámetros macroscópicos diferentes. En el caso que nos ocupa, tanto la Mecánica Estadística como la Economía estudian grandes conjuntos de elementos, átomos en un caso y agentes económicos en el otro, siendo por ello que el concepto de "*equilibrio estadístico*" jugará un papel determinante.

Dicho en otros términos, una persona individual no es relevante ni tiene ninguna de las características propias de una economía entera. Sin embargo, millones de personas juntas, actuando individualmente, crean la economía y quizás ésta puede ser descrita por algunas reglas que permitan hacer predicciones, igual que la *Ecuación de estado* describe en Termodinámica la presión y la temperatura y predice el comportamiento colectivo de un conjunto de átomos o moléculas.

Tabla 1. Analogía entre modelo cinético y multi-agente

	Modelo físico	Modelo económico
Cantidades intercambiadas	K=energía cinética	m=dinero
Unidades	N Partículas	N Agentes
Interacción	Colisiones	Transacciones

Si en estos modelos se introducen restricciones que limiten el intercambio económico, los sistemas convergen a estados de equilibrio estadístico caracterizados por una importante desigualdad en el reparto de la "*riqueza*". Por otra parte, lo anterior permite dotar de un significado económico a un parámetro fundamental en toda esta teoría como es el de *temperatura económica.*

Dentro de este esquema es muy importante puntualizar que el dinero no se corresponde de una manera unívoca con la *riqueza*. El dinero es sólo una parte de misma, siendo la otra, *la riqueza material* (o inmaterial, pero no monetaria, piénsese en los derechos de una patente a modo de ejemplo). A efectos de lo que sigue, siempre se entenderá que el dinero hace mención al papel moneda o en su caso a activos bancarios, o de otro tipo, pero de liquidez inmediata.

2. Modelos tipo Boltzmann-Gibbs: origen, campo de aplicación y limitaciones

2.1. El marco teórico

Considérese un sistema formado por muchos agentes económicos (*N*>>1), los cuales se pueden considerar como individuos o corporaciones. Se parte del supuesto de que *N* es un número constante. Cada agente *i* tiene una cantidad de dinero m_i que puede intercambiar con cualquier otro agente. Lo que subyace a dicha interacción es algún tipo de actividad económica, tal como la compra de algún bien o servicio; sin embargo, este detalle no es importante en el ámbito de este trabajo, donde lo relevante es el resultado de la interacción entre los agentes *i* y *j* en la que alguna cantidad de dinero Δp cambia de manos:

$$[m_i\,, m_j] \quad \rightarrow \quad [m_i'\,, m_j'] \;=\; [m_i - \Delta p\,, m_j + \Delta p]$$

Como se deduce de la expresión anterior, la cantidad total de dinero se mantiene constante en cada transacción $m_i + m_j = m_i' + m_j'$. Esta regla de conservación local de la cantidad de dinero es análoga a la conservación de la energía entre átomos en colisión. Se asume que no existe ningún flujo externo de dinero que pueda alterar al sistema, ya que éste es, por definición, un *sistema aislado,* de tal manera que la cantidad total de dinero *M* permanece constante.

Sea $P(m)$ la función de distribución de la probabilidad del dinero, tal que el número de agentes con dinero entre m y $m + dm$ es igual a $NP(m)dm$. Estamos interesados en la distribución $P(m)$ estacionaria correspondiente a un estado de equilibrio termodinámico. En esta situación, la posición de cualquier agente puede fluctuar abruptamente en una interacción con otro agente pero la distribución de probabilidad no cambia. $P(m)$ se puede derivar de la misma manera que se obtiene la distribución de equilibrio de la energía $P(\varepsilon)$ en mecánica estadística. Considérese la división del sistema global en dos subsistemas 1 y 2. Como la cantidad total de dinero se mantiene constante se cumple que $m = m1 + m2$, por tanto se tiene que $P = P1 * P2$ con lo que se concluye que $P(m) = P(m1 + m2) = P(m1) + P(m2)$. La solución de esta ecuación es:

$$P\ (m) = C\ \cdot\ e^{-M/T}$$

por lo que la probabilidad de equilibrio distribución del dinero tiene la forma de Boltzmann-Gibbs. De las condiciones de normalización $\int_{-\infty}^{\infty} P(m)dm = 1$ y $\int_{-\infty}^{\infty} mP(m)dm = M/N$ se obtiene que $C = 1/T$ y que $T = M/N$. Por lo tanto, la *"temperatura monetaria", T,* es el promedio de la cantidad de dinero por cada agente[2].

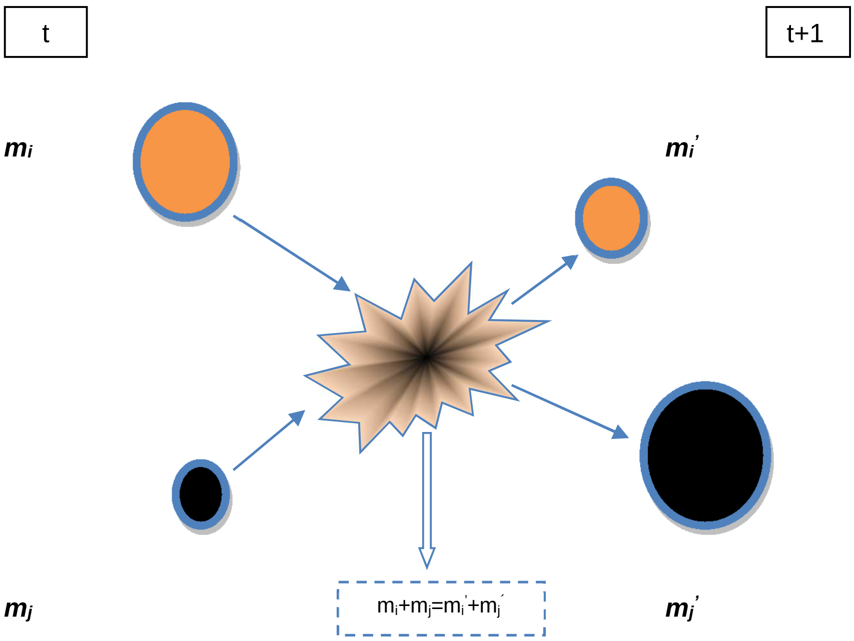
En este trabajo se partirá, como modelo inicial, de que en cada interacción se determina una cantidad aleatoria a intercambiar que sigue una distribución uniforme U: $\Delta p \sim U[1{,}100]\ /\ p \in Z.$ Así, en cada iteración se elegirán, al azar, dos agentes y una cantidad Δp para intercambiar entre ellos, siempre y cuando el *donante* tenga dinero suficiente para realizar el

---

[2] La distribución de Boltzmann-Gibbs puede ser también derivada por la maximización de la entropía de la distribución de dinero $S = -\int_0^{\infty} P(m)lnP(m)dm$ bajo la restricción de la conservación de la cantidad de dinero.

intercambio. El vector de dinero inicial *V*$V_{inicial}$ será uniforme: $mi = 100\ para\ \forall\ i = 1 \ldots N$, donde N es el tamaño del colectivo simulado $N = 10.000$ y $M = 10^6$ es la cantidad total de dinero del sistema. Por tanto, la distribución de probabilidad inicial viene dada por $P_{inicial}$ *(m) = δ (m - 100).*

Diagrama 1. Proceso de interacción para un modelo basado en agentes. Dos individuos, con dinero (m_i, m_j), en el momento t interactúan de alguna manera para acabar con un reparto (m_i', m_j') en t+1. La cantidad total de dinero se conserva en el proceso



La figura 1 muestra la distribución de equilibrio conseguida después de 10^6 iteraciones, lo que significa que, en promedio, cada agente ha participado en unas 100 transacciones, ya sea como perdedor o ganador. En el estado de equilibrio el sistema no experimenta cambios sensibles, más allá de ligeras fluctuaciones en las variables que lo describen a nivel macroscópico. Por otra parte, como se puede observar en la figura 2, en el proceso la entropía S del sistema aumenta en el tiempo hasta saturarse en el valor máximo para la distribución de Boltzmann-Gibbs.

Figura 1. Histograma: distribución estacionaria de probabilidad del dinero $P(m)$. Curva sólida de ajuste de una distribución de Boltzmann-Gibbs con parámetro T=100

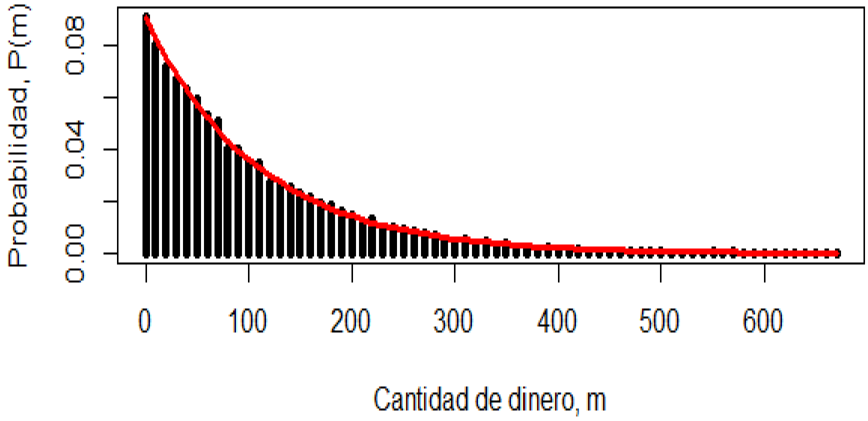
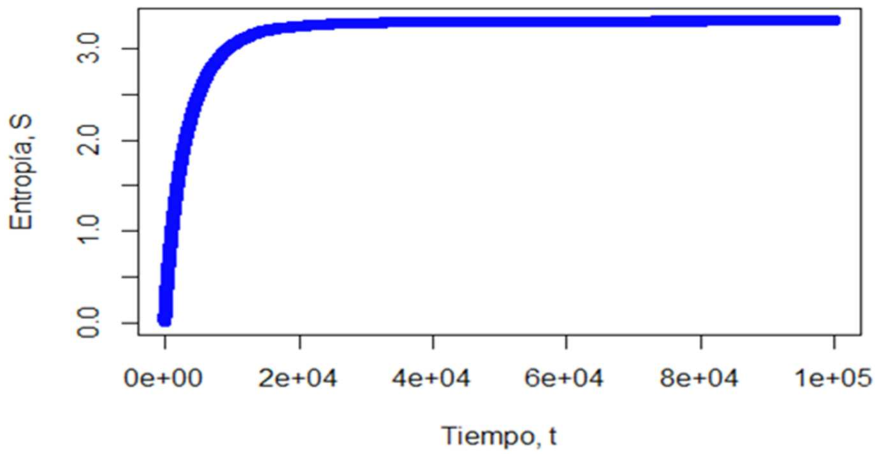


Figura 2. Evolución temporal de la entropía para el modelo anterior (el tiempo se mide en ciclos de iteración)



Recordemos que la entropía es una medida de la distribución aleatoria de un sistema. Todo sistema aislado evoluciona en el sentido de maximizar su entropía y la distribución de Boltzmann-Gibbs, de equilibrio, es precisamente, la que garantiza su maximización en el sistema.

El resultado anterior se obtiene partiendo de la distribución de dinero $V_{inicial}$. No obstante, la distribución estacionaria final es la misma si se parte de otra inicial distinta y/o se aplican otras reglas de intercambio diferentes, siempre que se respete la conservación del dinero y el modelo sea aditivo. Como se afirma en Chatterjee, A. y B. Chakrabarti (2007), la distribución final es universal, dentro de los condiciones impuestas, aunque la distribución de partida (y/o las reglas de intercambio) propuestas sean diferentes.

2.2. Modelo con parámetro de ahorro. Análisis de la equidad

En el modelo considerado anteriormente, el dinero intercambiado tiene las mismas probabilidades de transferencia desde un agente con el equilibrio *m* a un agente con el equilibrio *m'* y viceversa. Esto también es cierto aun cuando la cantidad intercambiada sea aleatoria siempre que la distribución de probabilidad de Δp sea independiente de *m* y *m'.* Las interacciones microscópicas son, por tanto, simétricas frente al tiempo. Como consecuencia de lo anterior, la distribución estacionaria *P(m)* es siempre exponencial (de Boltzmann-Gibbs). A estos modelos se los denomina aditivos. Aquí es posible encontrar la distribución estacionaria sin conocer los detalles exactos de las interacciones a nivel microscópico (que pocas veces son bien conocidas), mientras la condición de simetría sea satisfecha.

Sin embargo, no hay ninguna razón fundamental para esperar que la simetría de inversión temporal esté siempre presente en Economía. A aquellos modelos en los que la simetría de la inversión del tiempo se rompe se los conoce como modelos multiplicativos. Si la simetría de inversión temporal no se cumple, el sistema puede tener una distribución estacionaria que no sea de Boltzmann-Gibbs o, incluso, no alcanzar una distribución estacionaria (véase Yakovenko, V. y J.J. Barkley Rosser, 2009).

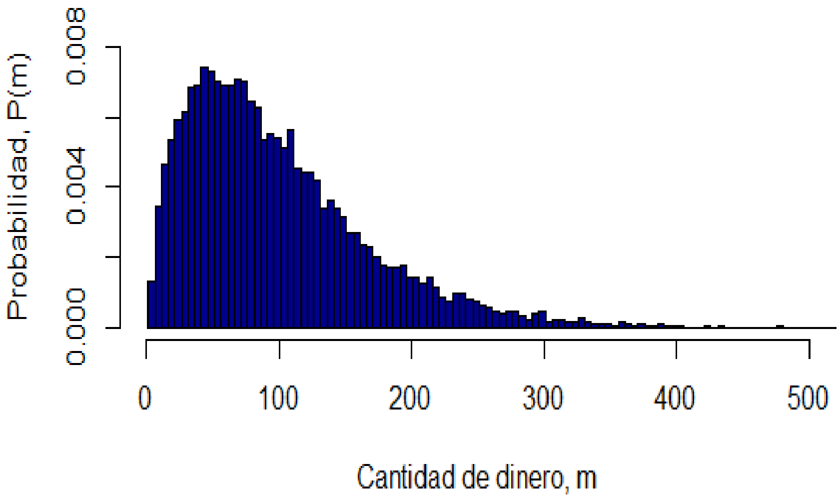
Un ejemplo de esta clase es aquel en que los agentes presentes en el modelo ahorran una fracción λ de su dinero (*Propensión marginal al ahorro*), de tal forma que en cada iteración el *donante* se reserva una parte $(\lambda \cdot m)$ y sólo pone en juego una fracción $(1 - \lambda \cdot m)$ de su dinero total. De esta manera, el agente *i*, que juega el papel de *donante*, efectuará la transacción si y sólo si $(1 - \lambda_i \cdot m_i) \geq \Delta p$; en caso contrario los agentes no intercambian la cantidad Δp. La introducción del parámetro de ahorro λ supone introducir la posibilidad de individualizar a los agentes; para mayor generalidad supondremos que λ es una variable aleatoria que se distribuye uniformemente, $\lambda \sim U\,[0,1]$ y que se determina para cada transacción de manera que la regla de intercambio viene dada por:

$$m_i^{'} = \begin{cases} m_i - \Delta p & si \;\; (1 - \lambda_i m_i) \geq \Delta p \\ m_i & si \; m_i < \Delta p \end{cases}$$

$$m_j^{'} = \begin{cases} m_j + \Delta p & si \; (1 - \lambda_i m_i) \geq \Delta p \\ m_j & si \; m_i < \Delta p \end{cases}$$

En este modelo, así simulado, se asume que cada agente en cada transacción decide de manera independiente (e idénticamente distribuida) qué proporción del dinero del que dispone se reserva. Con respecto al modelo inicial, el único cambio que se ha producido es introducir una condición más restrictiva para que se efectúe cada transacción; sin embargo, este cambio provoca que, una vez efectuada la transacción, ésta no pueda, en general, deshacerse para recuperar la configuración original (hay ruptura de la simetría temporal).

Figura 3. Histograma: distribución estacionaria de probabilidad del dinero en un modelo multiplicativo

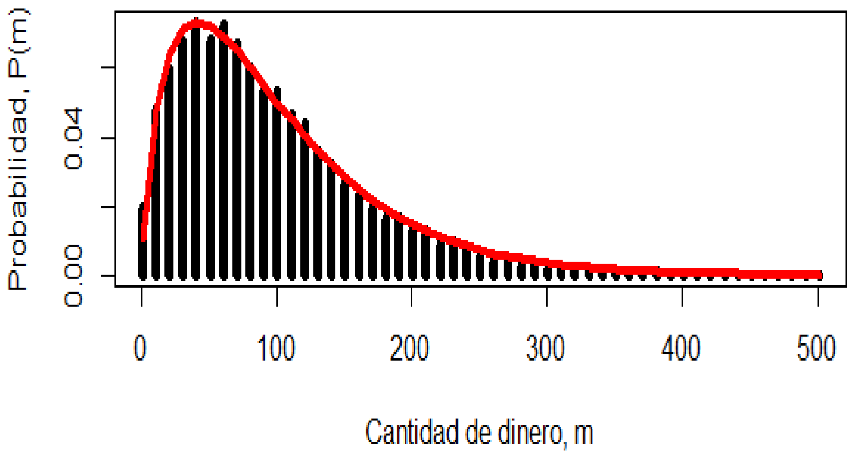


A la vista de la simulaciones realizadas, cabe destacar que la distribución de equilibrio tampoco depende en este caso ni de la distribución inicial ni del número de agentes implicados (siempre que sea lo suficientemente grande, N>100). Este modelo conduce a una distribución de equilibrio cualitativamente diferente a las que obtienen en un modelo aditivo[3].

En Landau, M.D. y E.M. Lifshitz (1969) se propone un modelo de ajuste a una función tipo Gamma dada por: $P(m) = C * m^{\beta} * e^{-\frac{m}{T}}$, que difiere de la de Boltzmann-Gibbs en el *prefactor* m^{β}. Si se ejecuta una simulación ajustando la distribución obtenida en este apartado, se obtiene un ajuste casi perfecto; la figura 4 muestra el ajuste de los datos del modelo y el ajuste correspondiente.

[3] En particular, presenta una moda $x_m > 0$ y un límite cero para valores de *m* pequeños, es decir: $\lim_{x \to 0} (fx) = 0$.

Figura 4. Histograma: distribución estacionaria de probabilidad. Línea sólida, ajuste con distribución tipo Gamma $P(m)=C * m^{\beta} * e^{-\frac{m}{T}}$



Este modelo representa un paso adelante en una definición más realista del modelo básico inicial y parece una opción lógica la definición de un criterio de ahorro que esté presente en las transacciones entre agentes. Dado que las distribuciones de ambos modelos son tan diferentes cabe preguntarse sobre los efectos económicos que se pueden deducir de esa diferencia.

En Economía la aproximación más usual al nivel de desigualdad personal se obtiene mediante la curva de Lorenz que, partiendo de la distribución ordenada de ingresos, representa conjuntamente las proporciones acumuladas de perceptores de rentas (*p*, en el eje horizontal) y las correspondientes proporciones acumuladas de rentas percibidas (*q*, en el eje vertical). Esta curva lleva además asociada una medida de la desigualdad, construida por comparación entre la situación observada en cada caso y la correspondiente a un reparto igualitario, que vendría representado por la recta de equidistribución (Kleiber, C. y S. Kotz, 2003). Por otra parte, dada una distribución de rentas que denotamos por Y_i con frecuencias relativas f_i, la expresión más habitualmente utilizada para medir la desigualdad es el *Índice de Gini* (Gradín, C. y C. del Río, 2001).

Figura 5. Distribuciones estacionarias de probabilidad del dinero en un modelo aditivo versus un modelo multiplicativo

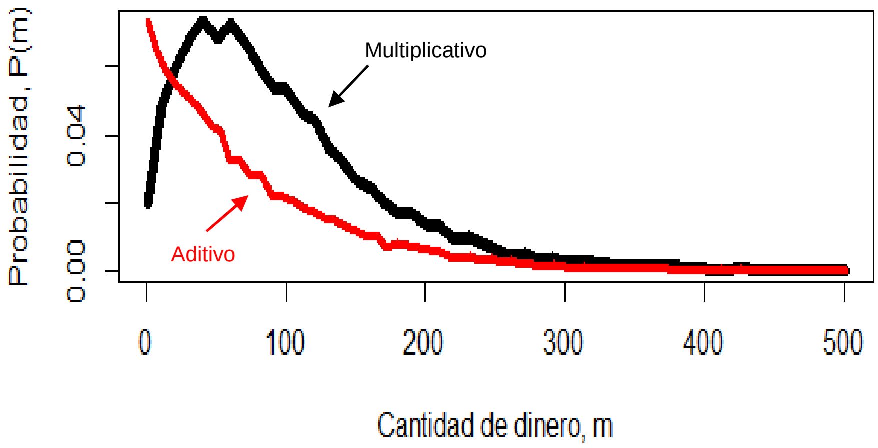
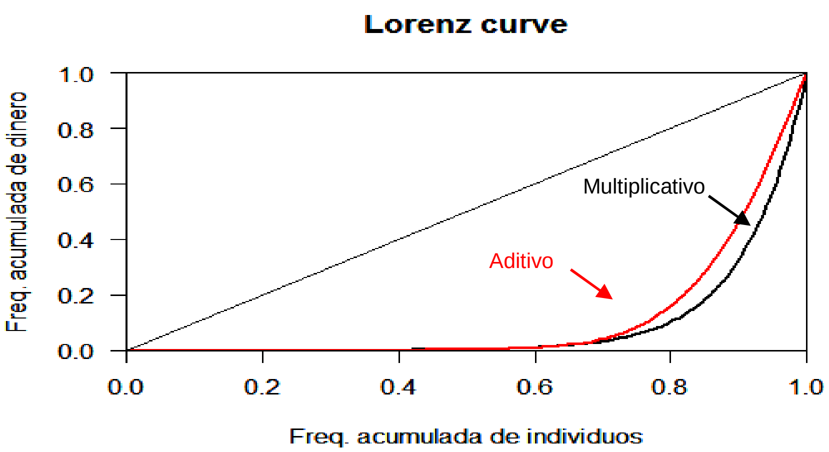


Figura 6. Curva de Lorenz para las dos distribuciones anteriores



La figura 6 muestra las curvas de Lorenz para ambos casos. El índice de Gini para el caso general alcanza un valor $I_G = 0{,}82$ mientras que si se introduce un coeficiente de ahorro de distirbución uniforme, el valor pasa a ser $I_G = 0{,}77$. Se concluye pues que la distribución de equilibrio con tasas de ahorro positivas da lugar a un reparto más equitativo de la masa monetaria.

La distribución de Boltzmann–Gibbs no necesariamente se sostiene para cualquier sistema conservativo. Sin embargo, dicha distribución *es universal en un sentido limitado* para una amplia clase de modelos que mantienen la simetría de inversión temporal; en tal caso la distribución estacionaria es exponencial y no depende de los detalles de un modelo (Chatterjee, A. *et al.* (2005); Dragulesku, A. y V.M. Yakovenko (2000)). A la inversa, cuando la simetría de inversión temporal se rompe, la distribución puede depender de los detalles de un modelo.

Los dos modelos presentados aquí, sin y con tasa de ahorro, son los más sencillos y a la vez más representativos de los modelos tipo KWEM. Sobre ellos se pueden introducir variaciones que recojan otros aspectos de la realidad económica, por ejemplo permitir el endeudamiento de los agentes, introducir un banco central que inyecte dinero en el sistema, una autoridad fiscal que imponga impuestos y/o subvenciones etc. (Yakovenko, V.M. y J. Barkley Rosser, (2009))

2.3. Transacciones posibles frente a transacciones efectivas. Motivación para su estudio.

Cada vez que dos agentes se enfrentan a una *posible* transacción, el que ésta se lleve a cabo o no va a depender de que el *donante* tenga una cantidad de dinero que por lo menos sea igual al precio marcado para la operación (Δp). De esto se infiere que lógicamente no todas las transacciones posibles se convertirán en transacciones efectivas, entendiéndose que estas últimas modifican la distribución previa del dinero (dos agentes han cambiado de posición). Parece por ello interesante diferenciar entre ambos tipos de situaciones.

Considérese un sistema en estado estacionario, en el que se han producido *E* transacciones (potenciales) de las cuales únicamente E_e han derivado en un acuerdo (efectivas). Tiene entonces sentido la siguiente probabilidad:

$$\Phi = E_e/\mathrm{E} \quad [1]$$

Dada una transacción escogida al azar, definida por los parámetros (m_i, m_j, Δp), Φ indicaría cual es la posibilidad de que alcance un acuerdo. En términos computacionales, cada iteración que realiza en una simulación numérica es una transacción posible. En las efectuadas en el marco de este estudio, para sistemas de Boltzmann-Gibbs (sin deuda y sin ahorro), una vez alcanzado el equilibrio termodinámico, Φ es del orden del 63%.

Si, en cambio, se introduce un parámetro de ahorro en el modelo (λ_i), una vez alcanzado el correspondiente equilibrio, Φ se reduce a un 43%. La introducción de λ_i reduce la probabilidad de que se produzcan transacciones efectivas. Los agentes económicos no disponen de todo su dinero y ello se refleja, como cabría esperar, en una reducción de Φ. Dado que el modelo Boltzmann-Gibbs plantea el mínimo posible de limitaciones a las transacciones entre agentes, de hecho que se produzca o no sólo va a depender de m_i *y* Δp, es de esperar que Φ sea máximo. Obsérvese que el receptor (con dinero m_j) no juega en estos modelos ningún papel, la transacción se dará, o no, independientemente de la cantidad de dinero de la que disponga.

Las consecuencias de todo lo anterior quedan reflejadas en la velocidad de convergencia al equilibrio de los sistemas. Aunque Φ únicamente cobre sentido en estado estacionario, se puede pensar que cuanto menor sea su valor mayor habrá sido el tiempo que al sistema le habrá llevado alcanzar el equilibrio. De hecho, los modelos con ahorro convergen al equilibrio más lentamente que el modelo sin ahorro.

3. Objetivos y métodos

Los modelos anteriores seleccionan a los agentes que intercambian dinero de manera aleatoria, resultando en distribuciones de Boltzmann-Gibbs y, en ciertos límites, en distribuciones de tipo potencial. Estos modelos no consideran la posibilidad de que no se den todas las posibles transacciones, aun cuando no hubiese impedimento alguno desde un punto de vista estrictamente económico. En particular, no se considera la relación que pueda existir entre la cantidad de dinero que poseen los (dos) agentes y la probabilidad de que éstos interactúen entre sí. En términos económicos, los agentes son neutrales ante la cantidad de dinero que poseen en cada momento (sólo es relevante si se puede dar la transacción o no). Una manera de introducir restricciones en el esquema de intercambio consiste en suponer que agentes con riquezas semejantes tienden a interactuar entre ellos con mayor probabilidad. Dado que en realidad sólo se maneja una variable (la cantidad de dinero) únicamente se puede discriminar en función de ella. Se plantea así un modelo de *relaciones económicas estratificadas*, donde los agentes económicos interactúan con más probabilidad en el caso de que formen parte del mismo estrato económico. Por ejemplo, personas que viven en barrios de una clase determinada pueden rehuir el intercambio comercial, o tenerlo prohibido de alguna manera, con otras que habitan en barrios más (o menos) acomodados aun cuando se cumpla que $m_i > \Delta p$.

3.1. Hipótesis de trabajo y supuestos previos

El modelo de intercambio está formado por *N* agentes donde el agente *i-ésimo* posee una cantidad de dinero m_i. Se supone que la cantidad total de dinero, *M*, se conserva en todas las transacciones ya que es una economía aislada y no existe ningún flujo externo de dinero que pueda alterar al sistema. En cada transacción dos agentes elegidos al azar intercambiarán una cantidad Δp *(aleatoria)* siempre y cuando, además de que el *donante* cumpla que $m_i \geq \Delta p$, se verifique que la diferencia de riqueza entre ellos no sobrepase un límite U establecido previamente. Si los agentes escogidos no resultan ser de la misma *clase económica (definida por U)*, entonces no se produce la transacción permaneciendo en su estado inicial. Así pues, el parámetro *U* medirá la "*anchura*" de la clase económica.

3.2. Modelo matemático

El modelo selecciona dos agentes al azar, *i y j*; ambos intercambian una cantidad Δp $(\Delta p \sim U[0,1])$ / $p \in Z)$ siempre y cuando, además de que el *donante* cumpla que $m_i \geq \Delta p$, se verifique que $|m_i - m_j| \leq U$. El modelo de transacciones económicas estratificado queda definido matemáticamente según las siguientes reglas de interacción teniendo en cuenta que, a diferencia de los modelos anteriores, en éste el agente receptor deja de ser neutral en cada transacción:

$$m_i' = \begin{cases} (m_i - \Delta p) & si \begin{cases} m_i \geq \Delta \mathrm{p} \\ y \\ |m_i - m_j| \leq U \end{cases} \\ \\ m_i & si \begin{cases} m_i < \Delta p \\ o \\ |m_i - m_j| > U \end{cases} \end{cases} \qquad [2]$$

$$m_j^{'} = \begin{cases} (m_j + \Delta p) & si \begin{cases} m_i \geq \Delta \text{p} \\ y \\ |m_i - m_j| \leq U \end{cases} \\ \\ m_j & si \begin{cases} m_i < \Delta p \\ o \\ |m_i - m_j| > U \end{cases} \end{cases} \qquad [3]$$

Nótese que la interacción sólo se puede dar entre agentes que pertenezcan al mismo estrato económico. Parece evidente que la introducción del parámetro U supone que se pierdan potenciales intercambios entre agentes que sí se darían si no se hubiesen levantado barreras externas a la mera dinámica económica. Se pone así de manifiesto la importancia de diferenciar entre transacciones potenciales y efectivas. En principio se puede argüir que cuanto mayor sea el parámetro U (y por tanto menor las restricciones al intercambio entre dos agentes cualquiera) tanto más deberá de parecerse al sistema sin restricción alguna. En términos promedio, podemos suponer que una vez transcurridas las N primeras iteraciones, $N/2$ agentes habrán ganado lo que la otra mitad habrá perdido. Se habrán formado dos estratos económicos con riquezas diferentes. En esas condiciones, la probabilidad de que un agente de uno de los dos grupos realice una transacción con uno perteneciente al otro estrato es del 50%. Dependiendo del tamaño asignado a U el intercambio puede no llegar a darse (aun cuando fuese factible en términos de Δp), con lo cual la mitad de las posibles ocasiones de llegar a un acuerdo económico correrían el riesgo de no concretarse.

Para obtener el comportamiento del modelo estratificado se han ejecutado una serie de simulaciones mediante simulación directa de Montecarlo (o como esquema de Bird). Como paso inicial se trata de seleccionar aleatoriamente pares de agentes al azar con reemplazamiento, para colisiones binarias e intercambio de dinero según una determinada regla de transacción, las ecuaciones [2] y [3] en este caso, según U (anchura de la clase económica) y el previo vigente en la iteración Δp.

Si $m_i < \Delta p$, el *donante* no tiene suficiente dinero para entregar al receptor. La transacción no se lleva a cabo en ningún caso. Los agentes se quedan tal y como estaban y se procede a elegir a otro par de ellos diferentes. El resultado de la iteración será por tanto (m_i, m_j). Se vuelve al paso inicial.

Si $mi \geq \Delta p$ y $|mi - mj| > U$, el *donante* tiene suficiente dinero para entregar al receptor pero no se cumple la condición de pertenencia a la misma clase económica. La transacción no se lleva a cabo y los agentes no intercambian dinero entre ellos. El resultado de la iteración será (m_i, m_j). Se vuelve al paso inicial.

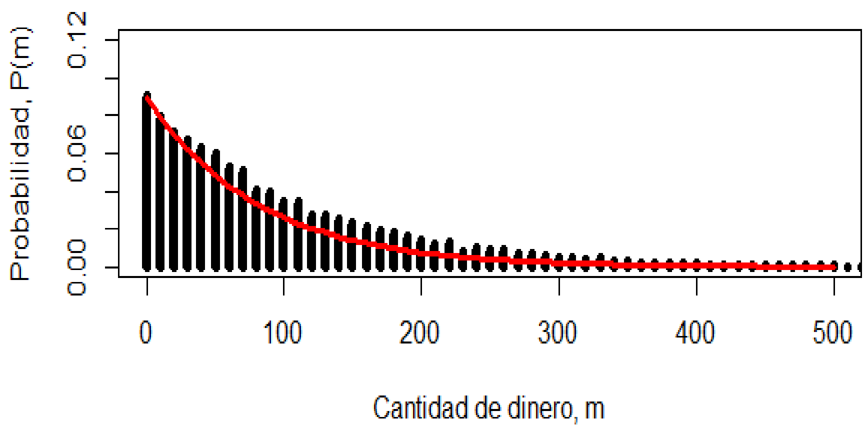
Si $mi \geq \Delta p$ y $|mi - mj| \leq U$, el *donante* tiene suficiente dinero para entregar al receptor y se cumple la condición de pertenencia a la misma clase económica. La transacción se lleva a cabo y los agentes intercambian dinero entre ellos. El resultado de la iteración será (m_i-Δp, m_j+Δp). Se vuelve al paso inicial.

Como anteriormente, el vector de dinero inicial $V_{inicial}$ será uniforme, $mi = 100 \ \forall \ i = 1, \ldots, N$ y N es el tamaño del colectivo simulado. Se tomarán para el análisis los siguientes valores del parámetro $U = \{1.000, 100, 10\}$, es decir, diez, uno y un décimo del valor inicial asignado a cada uno de los agentes.

4. Resultados

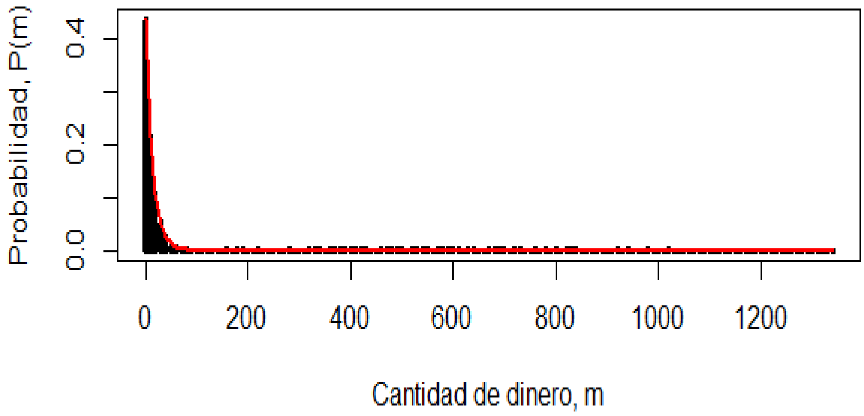
Si *U*=1000, el modelo se ajusta perfectamente a distribuciones de Boltzmann-Gibbs; como en el caso general, las distribuciones empíricas simuladas en ambos casos son casi idénticas. Al ser la anchura del estrato muy grande su influencia en el modelo es muy pequeña, lo que supone mínimas restricciones al intercambio, y por ello, como era de esperar, diferencia muy poco del caso general sin restricciones. La temperatura de equilibrio es casi la obtenida en el modelo teórico presentado en el apartado 2.1.

Figura 7. Distribuciones estacionarias de probabilidad del dinero U=1000. Ajuste de una distribución de Boltzmann-Gibbs con parámetro de equilibrio T=101,3



Para *U*=100 una tentativa de ajuste a una distribución de Boltzmann-Gibbs se da con parámetros de equilibrio, temperatura de equilibrio, *T=16,77.* Con esta distribución se ajustan bien los niveles de ocupación de dinero muy bajos, pero mucho peor a los grupos de renta más altos.

Figura 8. Distribuciones estacionarias de probabilidad del dinero U=100. Ajuste de una distribución de Boltzmann-Gibbs



Para un caso todavía más extremo *U=10* el ajuste de la distribución de Boltzmann-Gibbs se da para una temperatura de equilibrio *T=4,02*.

Figura 9. Distribuciones estacionarias de probabilidad del dinero U=10. Ajuste de una distribución de Boltzmann-Gibbs

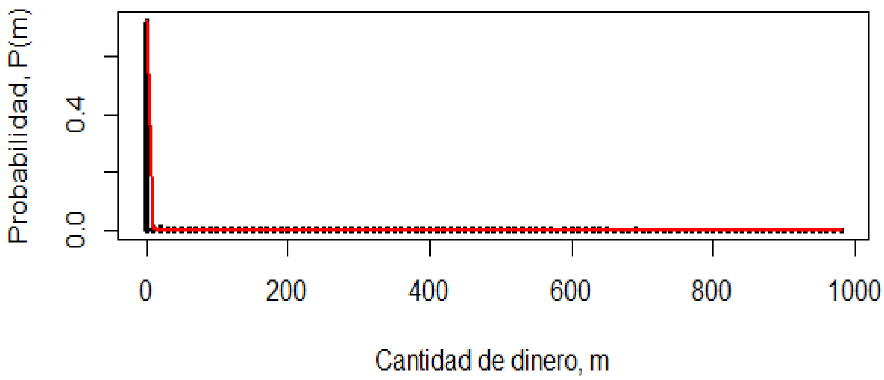


Tabla 2. Resumen de algunas medidas de posición (cuartiles y primer intervalo) y parámetros de ajuste para los escalones estudiados. Se comparan con el modelo sin restricciones al intercambio, esto es aquel en el que $U = \infty$

Escalón	P. ajuste		Medidas de posición					
U	C	T	%[0,10)	q0	q25	q50	q75	q100
∞	0,0943	100,1	9,36%	0	29	69	139	1.221
1000	0,0946	100,3	10,00%	0	28	69	141	1.625
100	0,366	16,77	38,75%	0	5	14	37	1.123
10	0,55	4,02	54,80%	0	1	3	131	784

La introducción de una condición de estratificación en el colectivo supone que no todas aquellas interacciones en las que se cumpla la condición básica del modelo $m_i \geq \Delta p$ se van a hacer efectivas y con ello surge una pérdida de oportunidades de transacción que abocan a una gran parte de los agentes a niveles muy bajos de dinero.

Veamos un ejemplo numérico para U=*100.* Supóngase que $\Delta p = 60$. En la primera transacción se tendría: $[m_i, m_j] = [100, 100] \to [40, 160] = [m_i', m_j']$. En la n-*ésima* interacción m_i' vuelve a intervenir, pero esta vez como ganador con, por ejemplo, $\Delta p = 80$. Sea un agente $m_k \geq 200$ el perdedor. Puesto que $m_k - m_i' = 160 > \mathrm{U}$ no se producirá la transacción y m_i' no podrá aprovecharse de su posición favorable en esa interacción, con lo cual seguirá siendo $m_i'' = 40$ cuando podría haber resultado ser $m_i'' = 120 = 40 + 80$ y habrá perdido una oportunidad de mejorar su posición relativa al no poder efectuar libremente la transacción. Al estar ligada a un determinado parámetro U sus posibilidades de interacción con el resto de los agentes disminuyen.

Por otra parte, para aquellas transacciones que se realicen no queda garantizado que la simetría de inversión temporal se mantenga, dependerá del valor de U y de las posiciones relativas de los agentes después de ocurrida la transacción. Se puede suponer que, cuanto menor sea U, tanto mayor será la probabilidad de que se viole el principio de simetría, con lo cual el modelo será en todo caso una mezcla de aditivo y multiplicativo, lo que explicaría su comportamiento. Si partimos del ejemplo numérico anterior, con U=*100* y ∆*p=60,* véanse los dos siguientes intercambios:

$$[\, m_i, m_j \,] = [110, 200] \; \rightarrow [50, 260] = [\, m_i', m_j' \,] \qquad [4]$$

$$[\, m_c, m_d \,] = [100, 30] \leftrightarrow \; [40, 90] = [\, m_c', m_d'] \qquad [5]$$

Queda claro que [4] es un intercambio irreversible, propio de un sistema multiplicativo, en tanto que [5] sí es reversible y, por tanto, satisfaría el principio de inversión temporal. Si U fuese más grande, por ejemplo $\mathrm{U} = 500$, ambos casos serían reversibles y si U fuese más pequeño, $\mathrm{U} = 20$, ambos irreversibles. Aunque no se presenta aquí, todos los resultados obtenidos en este apartado son trasladables a modelos en los que se introducen tasas de ahorro.

5. El significado de la *Temperatura del sistema* y su relación con la velocidad del dinero. Ecuación cuantitativa del dinero

Cabe preguntarse por el sentido económico que pueda tener el parámetro T de equilibrio que caracteriza a la distribución. Para ello, vamos a estudiar la relación empírica que puede establecerse entre el modelo anterior, de naturaleza estadística $P(m,T)$, y la llamada *Ecuación de cambio* desarrollada en el marco de la *Teoría Cuantitativa del Dinero*. Según ésta, en cada momento, y en particular en situación de equilibrio termodinámico, se debe verificar que el valor total de las transacciones que se realizan en la economía, en un intervalo de tiempo fijado de antemano, ha de ser igual a la cantidad de dinero existente en esa economía multiplicado por el número de veces que el dinero cambia de manos. La expresión más sencilla de esta igualdad viene dada por:

$$P \cdot Q \;=\; M \cdot V$$

P	Nivel de precios (precio medio en el intervalo de tiempo considerado). En los modelos planteados se obtendrá a partir de que $\Delta p \sim U[1{,}100] \;/\; \in Z\; p$.
Q	Nivel de producción (aquí el volumen de transacciones “efectivamente” realizadas).
M	Cantidad de dinero en el sistema, que es constante. En nuestro caso *M=10*^{6}*.*
V	Número de veces que el dinero cambia de manos el período considerado, la velocidad de circulación del dinero (magnitud adimensional).

En el contexto del modelo utilizado (en principio, sin ahorro ni posibilidad de endeudamiento), sea $\tilde{E}$ el número de iteraciones realizadas y que tomaremos como el período de análisis al que se refiere la igualdad anterior. Cada una de esas iteraciones es una *posible* transacción económica entre dos agentes elegidos al azar. La probabilidad de que ocurra es conocida, ya que es la tasa de transacciones efectivas, definida anteriormente, sobre el total de iteraciones: Φ. De esa manera se puede plantear entonces que el número de transacciones efectivas realizadas, Q, en $\tilde{E}$ iteraciones, se puede aproximar, por hipótesis, como: $Q = \tilde{E} \cdot \Phi$. Asúmase, como una primera aproximación, que P=$< p >$ es el precio medio del período y que, dado $\Delta p \sim U[1, 100] \;/\; p \in Z$, es conocido. De esta manera, la ecuación del dinero, en términos de la velocidad, vendría dada como:

$$V = \frac{< p >}{M} \cdot \; \tilde{E} \cdot \Phi$$

Tomando $\tilde{E} \; = M = 10^{6}$, se tiene que:

$$V =< p > \cdot \Phi \qquad [6]$$

Por tanto se estima una relación directa entre la velocidad del dinero en circulación y la tasa de transacciones efectivas. Como se desprende de los resultados obtenidos (véase Tabla 2), a medida que se consideran escalones (*U*) más pequeños, por tanto, condiciones más restrictivas, la proporción de iteraciones que devienen en una transacción efectiva disminuye. Así, por ejemplo, para $U = 1.000$, un escalón tan grande que el sistema es en la práctica equivalente a uno sin ningún tipo de restricción, el 63% de las iteraciones dan lugar a una transacción entre agentes, tal y como se desprende del valor de t. Para $U = 500$, menos del 46% se transforma en una relación comercial de intercambio y para $U = 100$ este valor es ya únicamente de un 9%. Puesto que las transacciones disminuyen, el valor promedio de las mismas ($< p > \cdot\ Q$) también lo hará y dada la constancia de la masa monetaria M, necesariamente V debe disminuir. Esto se puede entender directamente en términos de la *"Ecuación de cambio".*

La figura 10 muestra claramente este efecto; el incremento de las restricciones al comercio genera una pérdida de oportunidades de transacción y el número de interacciones disminuye abruptamente. Si hay menos transacciones, con una masa monetaria fija M, esto implica necesariamente que el dinero se estanca, disminuye su movilidad de acuerdo con la ecuación [6]. El valor de Φ se obtiene directamente de la simulación contando el número de transacciones que derivan en acuerdo e intercambio; por tanto un recuento de las iteraciones que devienen en cambio de posición de los agentes implicados. Este análisis lo es desde una perspectiva puramente económica; se simulan diversos escenarios para la relación entre los agentes, se contabilizan el número de relaciones efectivas entre ellos y, como se conoce el vector de precios que rige en los diversos modelos, se obtienen conclusiones aplicando *la Ecuación Cuantitativa del Dinero*.

Figura 10. Relación entre la amplitud del escalón U y la tasa de transacciones efectivas Φ

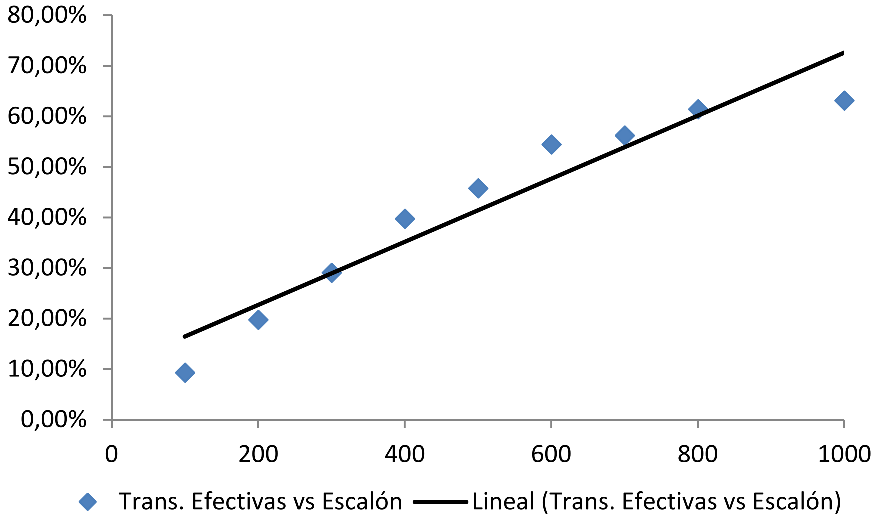
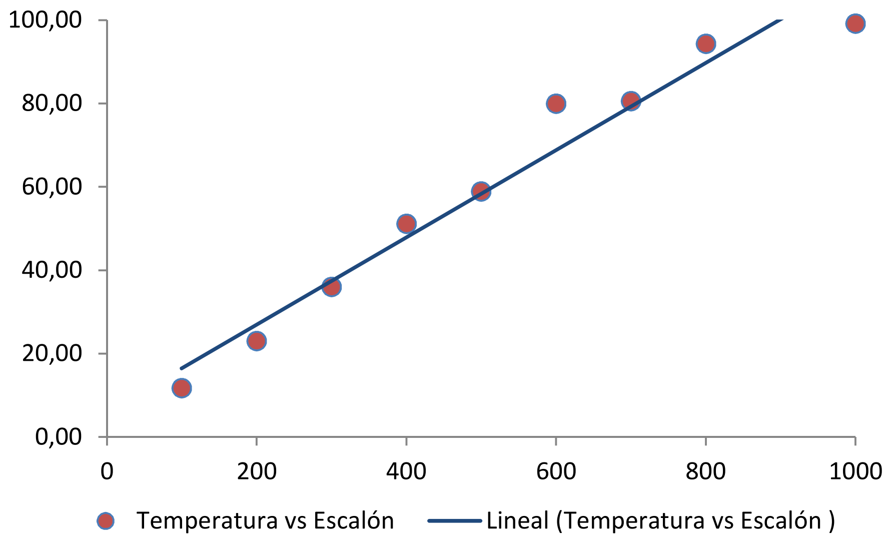


Figura 11. Temperatura monetaria (T) en relación con (U)

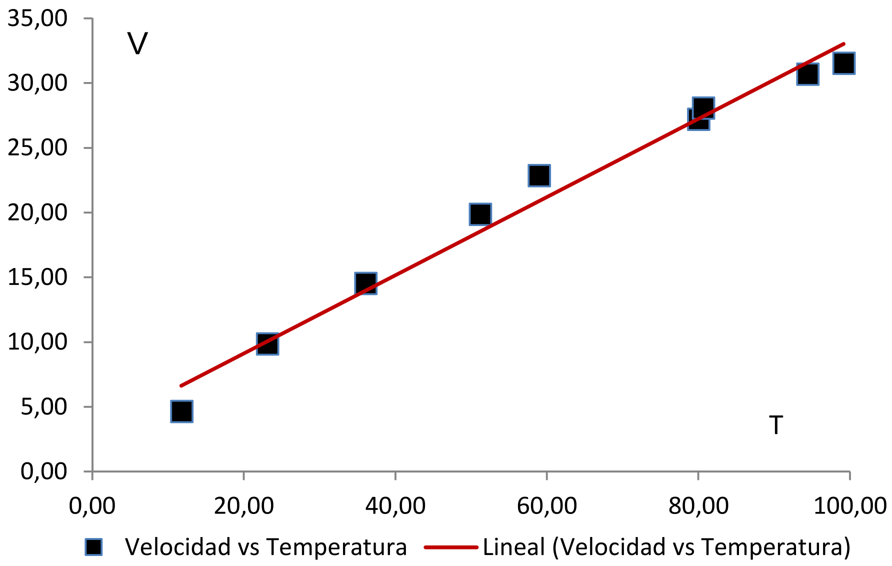


Si la distribución empírica del dinero obtenida para cada escenario se reemplaza por la aproximación dada por el ajuste de $P\,(m) = C(T) \cdot exp\,(-m\,/\,T\,)$, se puede relacionar el parámetro T de equilibrio con U. Como se puede observar, figura 11, a medida que se consideran escalones más pequeños la temperatura de equilibrio disminuye. Se evidencia, por tanto, una relación empírica entre, T y U, por tanto, entre T y la probabilidad dada por Φ y por ello entre T y V.

A menor valor de T, menor probabilidad de intercambio y velocidad del dinero. A la inversa, si la probabilidad de intercambio se reduce, la velocidad del dinero también lo hará y con ello, el sistema *se enfría*, es decir el parámetro T de ajuste (en equilibrio) es menor. La figura 12 muestra la relación empírica existente entre la temperatura del sistema y la velocidad de intercambio del dinero. En un gas, la temperatura es una medida macroscópica *de la actividad* de las partículas del sistema. Una mayor temperatura es la consecuencia de una frecuencia superior en las colisiones de las moléculas que lo forman y por ello de la transmisión de energía entre ellas. Como se observa, la analogía de los modelos *tipo gas,* propios de la Mecánica Estadística, con un sistema económico es casi total, de hecho, incluso mucho más profunda de lo que se podría imaginar una vez que se ha dotado de una interpretación económica al parámetro *T*. También aquí una baja *temperatura monetaria* es la consecuencia de una menor actividad, de un *enfriamiento* de la relaciones entre los agentes económicos.

Nótese que la relación entre Temperatura y Velocidad del dinero obtenida es también válida para el caso de modelos puramente multiplicativos, donde la distribución de ajuste es una Gamma en lugar de la distribución de Boltzmann-Gibbs, por ejemplo en los modelos con ahorro.

Figura 12. Relación entre la amplitud del escalón U y la tasa de transacciones efectivas Φ



6. Conclusiones

La Economía a diferencia de la Física, es una ciencia *no experimental*; por tanto, es imposible controlar las condiciones para estudiar cómo reacciona una economía ante cambios en los parámetros que la definen. No obstante, se pueden realizar simulaciones numéricas de modelos económicos que deparen resultados de interés. De hecho, el presente trabajo es esencialmente una propuesta de Economía Computacional. Los modelos de intercambio estocástico (KWEM), aun siendo muy elementales, son capaces de proporcionar una idea de la distribución del dinero en la sociedad. Su gran ventaja es que no se hace necesario detallar en exceso la forma de interacción, tan solo hace falta conocer los estados inicial y final de la misma. Parece, por tanto, que es la capacidad de modelar sistemas, de retener lo que parece más importante, lo que permite predecir comportamientos en sistemas donde no se puede experimentar directamente. Obsérvese que estos modelos, a diferencia de los planteamientos de la teoría económica, hacen abstracción de cualquier tipo de hipótesis sobre el comportamiento de los individuos, sus preferencias, motivaciones etc. El nivel microeconómico, el de los individuos, no es relevante, lo importante es determinar qué estado de equilibrio alcanza el sistema.

La primera consecuencia y quizás la más fundamental que se puede extraer es que la desigualdad (en términos monetarios) es inherente a una economía de mercado. Las simulaciones planteadas en ningún caso convergen a un equilibrio *igualitario* (todos los agentes con cantidades "similares" de dinero en los bolsillos) y esto es así independientemente de cuál sea el punto de partida escogido o del tipo de intercambio planteado. La desigualdad económica surge como un resultado natural en este esquema de intercambios monetarios estocásticos *independiente* de cualquier factor exógeno.

Una segunda consecuencia es que los efectos de la desigualdad pueden ser mitigados, parcialmente, por la introducción de hábitos de ahorro. El ahorro juega un papel atenuador de las desigualdades que se generan de manera irremediable en este tipo de modelos de intercambio monetario. Ninguno de los agentes está condenado a una bancarrota absoluta y los niveles de pobreza son proporcionalmente mucho menores que los observados en el caso sin ahorro. Si bien es cierto lo anterior, también lo es que el libre intercambio entre los individuos permite que éstos tengan probabilidades de modificar su posición monetaria. Pueden ganar o perder dinero, pero en última instancia cabe la posibilidad de modificar su posición (incluso la de pasar de *pobres* a *ricos*, o viceversa). Ahora bien, si sobre este esquema se imponen restricciones a la libertad de los individuos, de modo que ellos discriminen (o los discriminen) a la hora de efectuar transacciones económicas se generan altos niveles de desigualdad. Por ejemplo, si un individuo sólo comercia con otros similares a él en términos económicos- pero que puede encubrir diferencias de posición social, espacial o de otro tipo- ello supone que renunciará a oportunidades que le surjan y que de esta forma se perderán posibilidades reales de intercambio. En este contexto de pérdida de oportunidades de negocio, el sistema alcanza el equilibrio con una estructura muy polarizada; una masa muy grande de *pobres* y otra pequeña de *ricos* que se reparten el dinero total del sistema.

Pero quizás lo que es más relevante es que la movilidad de los individuos se reduce y es mucho más difícil cambiar de posición. El modelo con restricciones al intercambio da lugar a un sistema mucho más estático, con muy pocas fluctuaciones. Un sistema encorsetado lleva a bloqueos en la economía, y a su paralización. Por el contrario, si no se limitan las transacciones entre individuos, por muy alejados *económicamente* que estén, el sistema, como se dice en ecología, es *autosostenible*, con existencia de clases sociales, pero con posibilidad de cambios de una a otra.

Otra manera de enfocar lo anterior es verlo en términos de la velocidad de circulación del dinero, de la fluidez en su movimiento que depende a su vez del número de intercambios económicos. Cuando el dinero se estanca (se queda en los bolsillos) la ruleta de la economía deja de girar, las oportunidades de intercambio disminuyen y el sistema se esclerotiza.

El concepto de *Temperatura económica* (que, a menudo, se usa en un sentido figurado: "*la economía se ha enfriado durante la crisis*", "*la economía estaba muy caliente en la época del ladrillo*") tiene un sentido cuantitativo claro. Como se puede constatar en el marco de los modelos anteriores se cuantifica lo cualitativo, relacionándolo con las posibilidades de intercambio y con la velocidad de circulación del dinero.

Del análisis de estos modelos, en términos de gobernanza económica, interesa que la acción pública vaya en el sentido de garantizar la movilidad económica: conviene que se generen oportunidades de negocio para que los individuos puedan intervenir. Si el dinero se mueve; se presta, se intercambia, se compra, se vende, las posibilidades de participar, de entrar en juego, son mucho mayores que en un sistema detenido y carente de posibilidades. Parece claro que existen más oportunidades de movilidad social en un sistema con fluctuaciones constantes, reflejo de un equilibrio estadístico dinámico, que en el marco de un *equilibro estático*.

Fecha de recepción del artículo:	05 de mayo de 2015
Fecha de aceptación definitiva:	21 de julio de 2015

7. Bibliografía

[1] Chakraborti, A.; I. Muni Toke; M. Patriarca y F. Abergel (2011): “Econophysics Review”. *Quantitative Finance*, 11:7; Págs. 991-1012. http://digital.csic.es/bitstream/10261/47012/1/econoc.pdf

[2] Chatterjee, A. y B. Chakrabarti (2007): “Kinetic exchange models for income and wealth distributions”. *The European physical journal* (*Eur. Phys. J.* B), nº 60. Págs. 135-149.

[3] Chatterjee, A.; S. Yarlagadda y B. K. Chakrabarti (Eds.) (2005): *Econophysics of Wealth Distributions.* Springer Verlag.

[4] Demidovich, B.P. (1980): *Métodos numéricos de análisis*. Ediciones Paraninfo.

[5] Dragulescu, A. y V.M. Yakovenko (2000): "Statistical mechanics of money". *The European physical journal* (*Eur. Phys. J.* B), nº 17. Págs. 723-729.

[6] Gradín, C. y C. del Río (2001): *La medición de la desigualdad*. Mimeo. http://decon.edu.uy/~mito/nip/desigualdad.pdf

[7] Judd, K.L. (1997): "Computational economics and economic theory: Substitutes or complements?". *Journal of Economics Dynamics and Control*, nº 21 (6). Págs. 907-942.

[8] Kleiber, C. y S. Kotz (2003): *Statistical Size Distribution in Economics and Actuarial Sciences*. Wiley.

[9] Landau, L.D. y E.M. Lifshitz (1969): *Física Teórica. Física Estadística*. Editorial Reverte.

[10] Mantegna, R. y E. Stanley (2000): *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge.

[11] Mandelbrot, B (1963): "The Variation of Certain Speculative Prices". *The Journal of Business*, vol. 36, nº 4. Págs. 394-419. http://web.williams.edu/Mathematics/sjmiller/public_html/341Fa09/econ/Mandelbroit_VariationCertainSpeculativePrices.pdf.

[12] Mankiw, G. (2002): *Principios de economía*. Mc Graw-Hill. 2ª Ed.

[13] Morse, P.M. (1971): *Termofísica*. Ed. Selecciones Científicas. Madrid.

[14] Tesfatsion, L. (2002): *Agent-based computational economics: Growing economies from the bottom-up*. ISU Economics Work Paper, nº 1, February.

[15] Yakovenko, V. M. y J. Barkley Rosser (2009): "Statistical mechanics of money, wealth, and income". *Reviews of Modern Physics*, nº 81, 1703. http://arxiv.org/abs/0905.1518

[16] Van Dinther, C. (2008): *Agent-based Simulation for Research in Economics*. En *Handbook of Information Technology in Finance*. Capítulo 18. Springer Verlag.