

César Gutiérrez Tapia, Javier González Damián
Campo magnético generado por N bobinas alineadas axialmente
Ciencia Ergo Sum, vol. 9, núm. 3, noviembre, 2002
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Available in: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=10490310>



Ciencia Ergo Sum,
ISSN (Printed Version): 1405-0269
ciencia.ergosum@yahoo.com.mx
Universidad Autónoma del Estado de México
México

How to cite

| Complete issue

| More information about this article

| Journal's homepage

www.redalyc.org

Non-Profit Academic Project, developed under the Open Acces Initiative

Campo magnético generado por N bobinas alineadas axialmente

César Gutiérrez Tapia*** y Javier González Damián**

Recepción: julio 1 de 2002

Aceptación: septiembre 3 de 2002

* Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares
Apartado Postal 18-1027, C. P. 11801.
México, D. F.

Correo electrónico: cgt@nuclear.inin.mx

** Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma
del Estado de México, Instituto Literario 100,
Toluca, Estado de México.

Este trabajo fue financiado parcialmente por los
proyectos 27974-E y 33873-E del Conacyt, México.

Resumen. El cálculo del campo magnético generado por N bobinas axialmente alineadas permanece como un importante problema técnico en el proceso de construcción de los diferentes dispositivos para confinar el plasma con perfiles de campo externo tipo espejo. Los dos métodos más frecuentemente usados para el cálculo del campo magnético son: el método de los armónicos zonales y el método de las ecuaciones integrales elípticas. En este trabajo, considerando los métodos numéricos existentes para el cálculo de las integrales elípticas completas de primera clase K y segunda clase E , se describe la obtención de expresiones simples para calcular el campo magnético por el segundo método. Las expresiones obtenidas se pueden programar fácilmente en algún lenguaje de programación. Se realiza una comparación con resultados reportados y obtenidos de forma experimental.

Palabras clave: campo magnético, espejo magnético, bobina.

Magnetic Field Generated by N Axially Aligned Coils

Abstract. The calculation of the magnetic field generated by N axially aligned coils is still an important technical problem in the construction process of several plasma confinement devices with mirror type magnetic field profiles. The two more frequently used methods in magnetic field calculation of N symmetrically aligned coils are the method of zonal harmonics and that of elliptic integral equations. In this paper, using the existing numerical methods for computation of complete elliptic integrals of first kind K and second kind E respectively, a simple algorithm for magnetic field calculation is obtained. This algorithm can be easily transported in any programming language. A comparison with experimental results is presented.

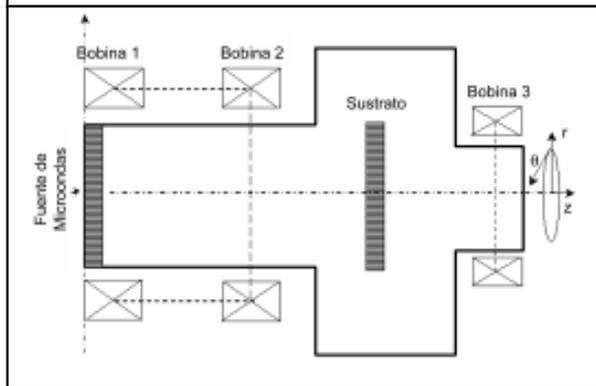
Key words: magnetic field, magnetic mirror, coil.

Introducción

El confinamiento del plasma y su comportamiento están fuertemente correlacionados por la estructura del campo magnético. Un plasma es un conjunto de partículas ionizadas y neutras donde la parte ionizada constituye una parte bastante importante, de tal manera que ésta determina el comportamiento global del plasma. Una forma natural para confinar el plasma es por medio de un campo magnético. En relación con el confinamiento magnético del plasma exis-

ten dos formas de geometrías del campo magnético: toroidal y abierta. En el caso de una geometría abierta, las líneas de campo, a diferencia de una geometría toroidal, no se cierran en sí mismas. Lo que se puede hacer es generar regiones donde el campo magnético es intenso y si consideramos dos de estas regiones, se puede considerar el confinamiento del plasma dentro de estas dos regiones las cuales forman un 'espejo magnético'. El término 'espejo magnético' se relaciona con el hecho de que el plasma, al ser un diamagnético, tiende a situarse donde el campo magnético

Figura 1. Representación esquemática de una fuente de plasma ECR típica con sus principales sistemas constitutivos.



es más débil por lo que las regiones de campo magnético intenso 'reflejan' al plasma confinándolo en la región entre estas regiones de campo magnético intenso. Si consideramos más de una región de confinamiento podemos obtener un sistema de N espejos magnéticos.

Las aplicaciones potenciales del plasma en la ciencia de materiales (Lieberman y Lichtenberg, 1994), incluyendo la deposición de películas delgadas, la polimerización por plasmas, la fabricación de microcircuitos, la soldadura eléctrica, el endurecimiento superficial de aceros, síntesis y obtención de polvos ultra finos, etcétera, han incrementado el interés en el desarrollo de diferentes clases de dispositivos para producción del plasma. Un caso particularmente im-

Los métodos más usados para calcular el campo magnético de un sistema de N bobinas alineadas axialmente son los de los armónicos zonales y el método de las integrales elípticas.

portante son las fuentes de plasma donde el plasma se forma en la resonancia ciclotrónica de los electrones (tipo ECR), donde el mecanismo resonante consiste en la sintonización de la frecuencia de la onda electromagnética con la frecuencia con la que giran los electrones alrededor de las líneas de campo (frecuencia ciclotrónica). Estas fuentes de plasma se utilizan actualmente de forma intensiva por los tiempos cortos de procesamiento y densidades altas del plasma necesarias para ciertas aplicaciones (Camps *et al.*, 1995; Assmussen *et al.*, 1997). Usualmente, las fuentes de plasma tipo ECR se integran por tres sistemas principales: el sistema de vacío, el sistema de campo magnético y el sistema de microondas (Camps *et al.*, 1995). En la figura 1 se muestra el esquema de una fuente de plasma tipo ECR típica, donde

el sistema de campo magnético está formado por tres bobinas alineadas (González y Gutiérrez, 2001). El diseño de estas bobinas es un problema técnico no trivial, ya que está relacionado con la determinación del perfil de campo magnético y con la localización de la zona de resonancia. Además, es importante notar que la estructura del campo magnético domina fuertemente la dinámica de las partículas del plasma. En el proceso de construcción de una fuente de plasma tipo ECR, así como en sus aplicaciones correspondientes, las fórmulas simples para calcular el campo magnético B son bastante deseables.

Los métodos más usados para calcular el campo magnético de un sistema de N bobinas alineadas axialmente son los de los armónicos zonales y el método de las integrales elípticas. El primer método, desarrollado por King (1924) y Garret (1962), permite una separación de la geometría del campo de aquella del sistema generador, por lo que las coordenadas del campo y de la fuente se pueden describir por sistemas independientes de ecuaciones en las diferentes etapas del cálculo.

La dificultad presente en el segundo método es el cálculo, con un grado alto de exactitud de las integrales elípticas de primera y segunda clase (Garret, 1963). Actualmente existen bibliotecas como la NAG o la IMSL (rutinas ELK/DELK y ELE/DELE) que proporcionan algoritmos bastante estables para el cálculo de estas integrales, por lo que en este trabajo se describe la obtención de expresiones simples para calcular el campo magnético basado en este último método (NAG, 1991; IMSL, 1997). Estas expresiones permiten calcular con bastante precisión el campo magnético generado por un sistema de bobinas alineadas axialmente.

El procedimiento para calcular el campo magnético B generado por N bobinas alineadas axialmente se basa en el uso consecutivo del principio de superposición. Primeramente, el cálculo es realizado para una capa formada por L espiras con corriente; posteriormente este resultado es usado para el cálculo del sistema formado por M capas anidadas, las cuales forman una bobina. Finalmente, se generaliza el resultado obtenido para el caso de N bobinas magnéticas alineadas axialmente.

El trabajo se organiza como sigue. En el siguiente apartado se presenta el cálculo del campo magnético generado por una capa de corriente formada por L espiras. A continuación se generaliza el resultado obtenido para la capa de corriente en el cálculo del campo magnético para M capas anidadas que forman una bobina. Enseguida se describe la

generalización para el caso de N bobinas alineadas axialmente. Después se presenta una comparación con resultados experimentales reportados en el caso particular de tres bobinas alineadas axialmente. Finalmente, los principales resultados se resumen en el último apartado.

1. Campo magnético generado por una capa de corriente

El campo magnético generado por L espiras que forman una capa de corriente se obtiene del principio de superposición, donde se utiliza el campo de una espira para calcular el campo de toda la capa. El potencial vectorial para una espira, en coordenadas cilíndricas, tiene la forma (Morozov y Solov'ev, 1965):

$$A_{\theta} = \frac{2J}{c} \int_0^{\pi} \frac{R \cos \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr \cos \theta}}, \tag{1}$$

donde J es la corriente total que circula a través de la espira y R es el radio de la espira, respectivamente. Si asumimos una simetría axial, necesitaremos únicamente la componente azimutal. Introduciendo la nueva variable:

$$\phi = \frac{1}{2}(\theta - \pi), \tag{2}$$

la ecuación (1) puede ser integrada obteniendo

$$A_{\theta}(r, z) = \pm \frac{4J}{c} \sqrt{\frac{R}{r}} \left\{ \left(\frac{1}{k} - \frac{k}{2} \right) \mathcal{K}(k) - \frac{E(k)}{k} \right\}, \tag{3}$$

donde k se define como

$$k = \sqrt{\frac{4Rr}{(r+R)^2 + z^2}}. \tag{4}$$

Los signos más/menos en la ecuación (3) indican el sentido del flujo de corriente en la espira (ley de Biot-Savart). Las integrales elípticas de primera y segunda clase están definidas, respectivamente como (Granadshtein y Ryzhik, 1980):

$$\mathcal{K} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}, \tag{5}$$

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi} d\phi. \tag{6}$$

Usando la relación $B = \nabla \times A$, el campo magnético en coordenadas cilíndricas se expresa como

$$B_r(r, z) = -\frac{\partial A_{\theta}}{\partial z}, \tag{7}$$

$$B_z(r, z) = \frac{A_{\theta}}{r} + \frac{\partial A_{\theta}}{\partial r}, \tag{8}$$

e introduciendo el vector potencial (3) en las ecuaciones (7) y (8) obtenemos

$$\frac{\partial A_{\theta}}{\partial r} = -\frac{A_{\theta}}{2r} + \frac{\partial A_{\theta}}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial r}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial A_{\theta}}{\partial z} = \frac{\partial A_{\theta}}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial z}, \tag{10}$$

de donde,

$$B_r(r, z) = -\frac{2zJ}{cr\sqrt{(r+R)^2 + z^2}} \left[\mathcal{K}(k) - \frac{z^2 + r^2 + R^2}{(r-R)^2 + z^2} E(k) \right], \tag{11}$$

$$B_z(r, z) = \frac{2J}{c\sqrt{(r+R)^2 + z^2}} \left[\mathcal{K}(k) - \frac{z^2 + r^2 - R^2}{(r-R)^2 + z^2} E(k) \right], \tag{12}$$

Aquí se han utilizado las siguientes relaciones funcionales entre las integrales elípticas (Granadshtein y Ryzhik, 1980)

$$\frac{\partial \mathcal{K}(k)}{\partial k} = \frac{E(k)}{kk^2} - \frac{\mathcal{K}(k)}{k}, \tag{13}$$

Figura 2. Sección transversal de una capa formada por tres espiras circulares, y donde se muestra el sistema de coordenadas cilíndrico usado en nuestros cálculos.

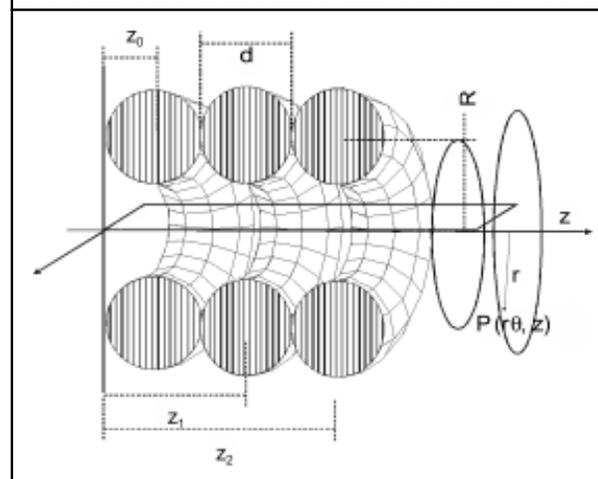
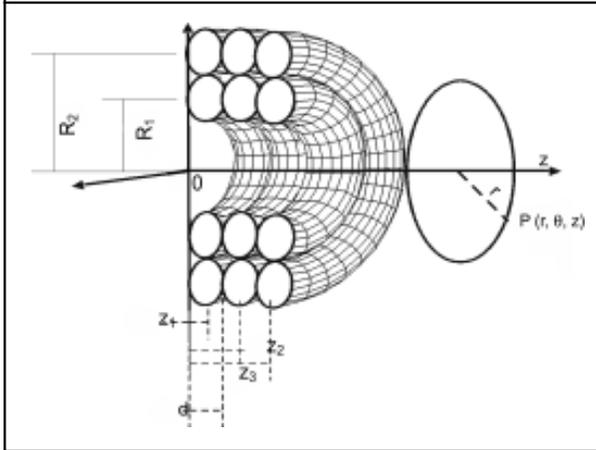


Figura 3. Sección transversal de una bobina formada por dos capas anidadas cada una de las cuales está formada por tres espiras.



$$\frac{\partial E(k)}{\partial k} = \frac{E(k)}{k} \frac{K(k)}{k}, \quad (14)$$

donde $k = 1 - k_1^2$. El sistema de coordenadas se muestra en la figura 2.

Ahora, considerando el grosor de las bobinas d , las componentes del campo magnético a la distancia $d/2$ desde el origen de coordenadas (figura 3) se transforma como

$$B_r(r, z) = -\frac{\partial A_{\theta l}}{\partial k_1} \frac{\partial k_1}{\partial z}, \quad (15)$$

$$B_z(r, z) = \frac{A_{\theta l}}{2r} + \frac{\partial A_{\theta l}}{\partial k_1} \frac{\partial k_1}{\partial r}, \quad (16)$$

donde

$$k_1^2 = \frac{4R_1 r}{(r + R_1)^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2}, \quad (17)$$

$$A_{\theta l}(r, z) = \frac{4J}{c} \sqrt{\frac{R_1}{r}} \left[\left(\frac{1}{k_1} - \frac{k_1}{2} \right) \mathcal{K}(k_1) - \frac{E(k_1)}{k_1} \right], \quad (18)$$

y

$$\frac{\partial A_{\theta l}}{\partial k_1} = \frac{4J}{c} \sqrt{\frac{R_1}{r}} \left[\left(\frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{2} \right) \frac{E(k_1)}{(1 - k_1^2)} - \frac{K(k_1)}{k_1^2} \right], \quad (19)$$

$$\frac{\partial k_1}{\partial r} = k_1 \left[\frac{1}{2r} - \frac{(r + R_1)}{(r + R_1)^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2} \right], \quad (20)$$

$$\frac{\partial k_1}{\partial z} = -\frac{k_1 \left(z - \frac{d}{2}\right)}{(r + R_1)^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2}. \quad (21)$$

Finalmente, sustituyendo las ecuaciones (17) y (21) en las ecuaciones (15) y (16), las respectivas componentes del campo magnético toman la forma

$$B_r(r, z) = -\frac{2J \left(z - \frac{d}{2}\right)}{c r \sqrt{(r + R_1)^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2}} \left[\mathcal{K}(k_1) - \frac{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + r^2 + R_1^2}{(r - R_1)^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2} E(k_1) \right], \quad (22)$$

$$B_z(r, z) = \frac{2J}{c \sqrt{(r + R_1)^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2}} \left[\mathcal{K}(k_1) - \frac{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + r^2 - R_1^2}{(r - R_1)^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2} E(k_1) \right]. \quad (23)$$

Usando el principio de superposición, se pueden utilizar las ecuaciones (22) y (23) para calcular el campo magnético generado por una capa de corriente formada por L espiras alineadas axialmente en la forma

$$B_r(r, z) = -\sum_{l=1}^L \frac{\partial A_{\theta l}}{\partial k_1} \frac{\partial k_1}{\partial z}, \quad (24)$$

$$B_z(r, z) = \sum_{l=1}^L \left(\frac{A_{\theta l}}{2r} + \frac{\partial A_{\theta l}}{\partial k_1} \frac{\partial k_1}{\partial r} \right) \quad (25)$$

donde L es el número total de espiras de corriente en la capa, y

$$k_l^2 = \frac{4R_1 r}{(r + R_1)^2 + (z - z_l)^2}, \quad (26)$$

$$A_{\theta l}(r, z) = \frac{4J}{c} \sqrt{\frac{R_1}{r}} \left[\left(\frac{1}{k_l} - \frac{k_l}{2} \right) \mathcal{K}(k_l) - \frac{E(k_l)}{k_l} \right]. \quad (27)$$

Aquí, la cantidad

$$z_l = d \left(l - \frac{1}{2} \right) \quad (28)$$

es la posición del extremo izquierdo de la capa de corriente sobre el eje 0z.

2. Una bobina magnética

Continuando el procedimiento descrito en la sección anterior, ahora es posible calcular el campo magnético generado por M capas de corriente anidadas las cuales forman una bobina magnética. Aquí se introduce el incremento en la cantidad d en el radio R_1 (figura 3). De la misma forma que en la sección anterior, utilizamos el principio de superposición, de donde las componentes del campo magnético se pueden escribir en la forma

$$B_r(r, z) = - \sum_{m=1}^{M_1} \sum_{l=1}^{L_1} \frac{\partial A_{\theta lm}}{\partial k_{lm}} \frac{\partial k_{lm}}{\partial z} \tag{29}$$

$$B_z(r, z) = \sum_{m=1}^{M_1} \sum_{l=1}^{L_1} \left(\frac{A_{\theta lm}}{2r} + \frac{\partial A_{\theta lm}}{\partial k_{lm}} \frac{\partial k_{lm}}{\partial r} \right) \tag{30}$$

Aquí, L_1 y M_1 son el número de espiras en la m -ésima capa y el número de capas de corriente anidadas en la bobina, respectivamente. El resto de las otras cantidades se definen como

$$k_{lm}^2 = \frac{4R_m r}{(r_1 + R_m)^2 + (z - z_l)^2} \tag{31}$$

$$A_{\theta lm}(r, z) = \frac{4J}{c} \sqrt{\frac{R_m}{r}} \left[\left(\frac{1}{k_{lm}} - \frac{k_{lm}}{2} \right) \mathcal{K}(k_{lm}) - \frac{E(k_{lm})}{k_{lm}} \right] \tag{32}$$

$$\frac{\partial A_{\theta lm}}{\partial k_{lm}} = \frac{4J}{c} \sqrt{\frac{R_m}{r}} \left[\left(\frac{1}{k_{lm}^2} - \frac{1}{2} \right) \frac{E(k_{lm})}{1 - k_{lm}^2} - \frac{\mathcal{K}(k_{lm})}{k_{lm}^2} \right] \tag{33}$$

$$\frac{\partial k_{lm}}{\partial r} = k_{lm} \left[\frac{1}{2r} - \frac{r + R_m}{(r + R_m)^2 + (z - z_l)^2} \right] \tag{34}$$

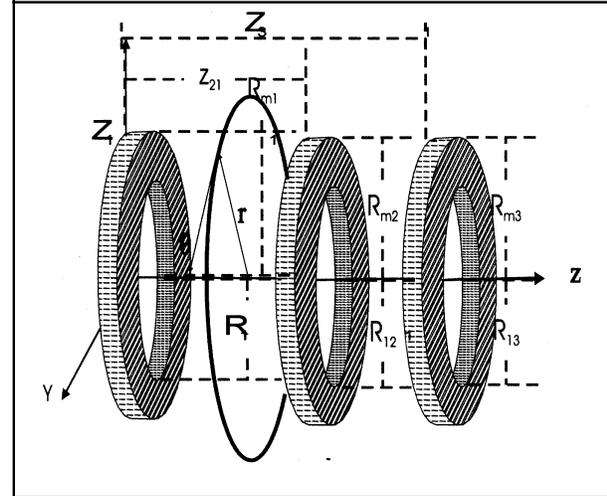
$$\frac{\partial k_{lm}}{\partial z} = - \frac{k_{lm}(z - z_l)}{(r + R_m)^2 + (z - z_l)^2} \tag{35}$$

donde el radio interno de la m -ésima capa de corriente, denotada como R_m se define como

$$R_m = r_1 + d \left(m - \frac{1}{2} \right) \tag{36}$$

y r_1 representa el radio interno de la bobina.

Figura 4. Sistema de tres bobinas alineadas axialmente con su correspondiente sistema de coordenadas.



3. N bobinas magnéticas alineadas axialmente

Ahora consideraremos un sistema de N bobinas magnéticas alineadas axialmente, donde cada una de ellas está localizada a una distancia z_n del origen de coordenadas (figura 4). Del principio de superposición, las ecuaciones (29) y (30) se transforman como

$$B_r(r, z) = - \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_n} \sum_{l=1}^{L_n} \frac{\partial A_{\theta lmn}}{\partial k_{lmn}} \frac{\partial k_{lmn}}{\partial z} \tag{37}$$

$$B_z(r, z) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_n} \sum_{l=1}^{L_n} \left(\frac{A_{\theta lmn}}{2r} + \frac{\partial A_{\theta lmn}}{\partial k_{lmn}} \frac{\partial k_{lmn}}{\partial r} \right) \tag{38}$$

donde L_n y M_n son el número de espiras en la m -ésima capa de corriente y el número total de capas anidadas en la n -ésima bobina, respectivamente, y

$$k_{lmn}^2 = \frac{4R_{mn} r}{(r + R_{mn})^2 + (z - z_l)^2} \tag{39}$$

$$A_{\theta lmn}(r, z) = \frac{4J_n}{c} \sqrt{\frac{R_{mn}}{r}} \left[\left(\frac{1}{k_{lmn}} - \frac{k_{lmn}}{2} \right) \mathcal{K}(k_{lmn}) - \frac{E(k_{lmn})}{k_{lmn}} \right] \tag{40}$$

$$\frac{\partial A_{\theta lmn}}{\partial k_{lmn}} = \frac{4J_n}{c} \sqrt{\frac{R_{mn}}{r}} \left[\left(\frac{1}{k_{lmn}^2} - \frac{1}{2} \right) \frac{E(k_{lmn})}{1 - k_{lmn}^2} - \frac{\mathcal{K}(k_{lmn})}{k_{lmn}^2} \right] \tag{41}$$

$$\frac{\partial k_{lmn}}{\partial r} = k_{lmn} \left[\frac{1}{2r} - \frac{(r + R_{mn})}{(r + R_{mn})^2 + (z - z_l)^2} \right] \tag{42}$$

Figura 5. Componentes axial (líneas oscuras) y radial (líneas quebradas) del campo magnético para diferentes valores de r de acuerdo con los parámetros obtenidos por Camps *et al.* (1995). En ambos casos la línea central corresponde al valor $r=0$ cm.

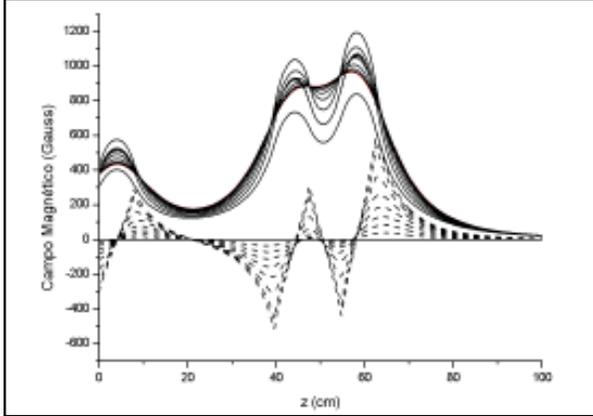
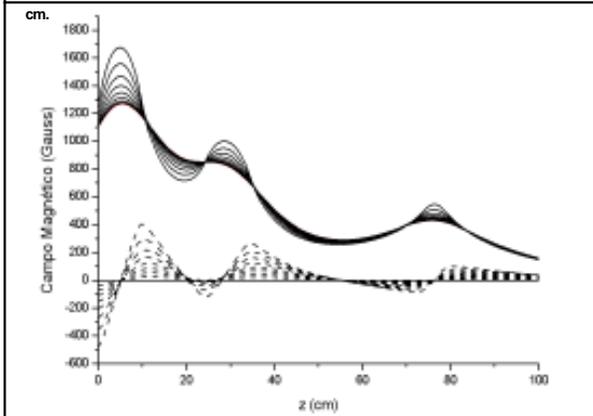


Figura 6. Componentes axial (líneas oscuras) y radial (líneas quebradas) del campo magnético para diferentes valores de r de acuerdo con los parámetros obtenidos por Sadeghi *et al.* (1991). En ambos casos la línea central corresponde al valor $r=0$ cm.



$$\frac{\partial k_{lmm}}{\partial z} = -\frac{k_{lmm}(z-z_{nl})}{(r+R_{mm})^2+(z-z_{nl})^2} \quad (43)$$

Aquí J_n es la corriente que circula a través de la n -ésima bobina magnética y R_{mm} representa su radio interno definido como

$$R_{mm} = r_n + d\left(m - \frac{1}{2}\right) \quad (44)$$

y

$$z_{nl} = z_n + d\left(l - \frac{1}{2}\right) \quad (45)$$

determina la posición del extremo izquierdo de la n -ésima bobina magnética sobre el eje Oz .

Las expresiones analíticas son frecuentemente útiles en el cálculo del transporte de partículas en las máquinas-espejo.

En nuestro caso, las expresiones analíticas resultantes para las componentes del campo magnético de un sistema de N bobinas alineadas axialmente son

$$B_r(r, z) = -\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_n} \sum_{l=1}^{L_n} \frac{2J_n(z-z_{nl})}{cr} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(r+R_{mm})^2+(z-z_{nl})^2}} [K(k_{lmm}) - \frac{(z-z_{nl})^2+r^2+R_{mm}^2}{(r-R_{mm})^2+(z-z_{nl})^2} E(k_{lmm})] \right\} \quad (46)$$

$$B_z(r, z) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_n} \sum_{l=1}^{L_n} \frac{2J_n}{c} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(r+R_{mm})^2+(z-z_{nl})^2}} [K(k_{lmm}) - \frac{(z-z_{nl})^2+r^2-R_{mm}^2}{(r-R_{mm})^2+(z-z_{nl})^2} E(k_{lmm})] \right\} \quad (47)$$

Usando la representación en serie para las integrales elípticas de primera y segunda clase (Granadshtein y Ryzhik, 1980), es fácil mostrar la convergencia de la ecuación (46) en el límite cuando $r \rightarrow 0$.

4. Casos particulares

En esta sección se analiza primeramente el caso particular de tres bobinas ($N=3$) alineadas axialmente a través de las expresiones (37) y (38) para el cálculo del campo magnético. Para validar estas expresiones, se consideran los parámetros reportados por Camps *et al.* (1995) y Sadeghi *et al.* (1991) (resumidas en la tabla 1). Los perfiles del campo magnético axial y radial estimados por los mismos autores se muestran en las figuras 5 y 6, respectivamente. Comparando estas gráficas con las correspondientes de Camps *et al.* (1995) (figura 2) y de Sadeghi *et al.* (1991) (figura 1), muestran una gran concordancia. Otro aspecto importante que se observa de las figuras 5 y 6 es la variabilidad en signo de la componente radial, lo cual puede explicar la heterogeneidad que se obtiene en los depósitos de películas delgadas observada en los experimentos de Camps *et al.* (1995).

Conclusiones

En el presente trabajo se describió la obtención de expresiones simples para el cálculo del campo magnético generado por N bobinas alineadas axialmente, utilizando el método de las integrales elípticas. Estas expresiones pueden ser bastante útiles en el diseño y construcción de máquinas-espejo para el confinamiento de un plasma, como por ejemplo las fuentes de plasma tipo ECR.

Tabla 1. Valores de los principales parámetros usados en las figuras 5 y 6 en el caso de tres bobinas, y en las figuras 7 y 8 para el caso de cinco bobinas alineadas axialmente.

	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	d
	(A)	(A)	(A)	(A)	(A)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)											(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)
Figura 5	20.0	31.5	38.5	-	-	8.0	8.0	8.0	-	-	20	20	20	-	-	20	20	20	-	-	0.0	39.5	54.7	-	-	0.4
Figura 6	180.0	90.0	70.0	-	-	10.8	10.8	11.4	-	-	14	14	46	-	-	12	12	5	-	-	0.0	24.6	74.5	-	-	0.8
Figura 7	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	0.0	20.0	40.0	60.0	80.0	0.4
Figura 8	50.0	30.0	40.0	30.0	50.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	0.0	30.0	40.0	50.0	90.0	0.4

Figura 7. Componentes axial (líneas oscuras) y radial (líneas quebradas) del campo magnético para diferentes valores de r cuando las bobinas son iguales. En ambos casos la línea central corresponde al valor $r=0$ cm.

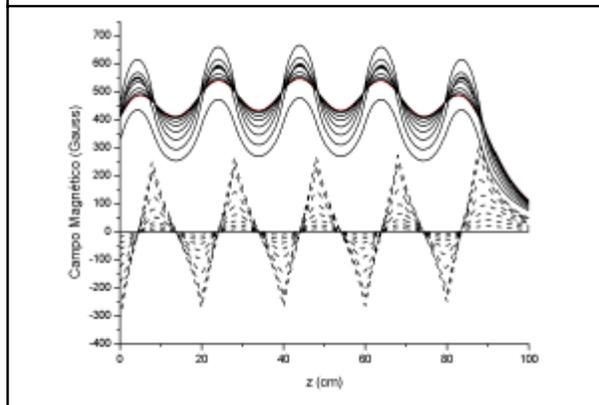
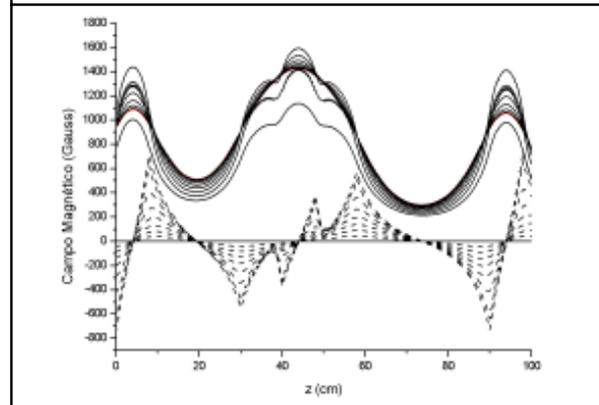


Figura 8. Componentes axial (líneas oscuras) y radial (líneas quebradas) del campo magnético para diferentes valores de r cuando las bobinas no son iguales. En ambos casos la línea central corresponde al valor $r=0$ cm.



Se analizan las expresiones para las componentes del campo magnético (37) y (38) en el caso particular de tres y cinco bobinas alineadas axialmente. En el caso de tres bobinas, los resultados de los cálculos fueron comparados con los obtenidos por medio de otros métodos tanto experimentales como numéricos (Camps *et al.*, 1995; Sadeghi *et al.*, 1991). De los resultados para la componente radial, se observa la existencia de una fuerte variabilidad en signo, lo cual puede explicar

la estructura heterogénea de los depósitos de películas delgadas observadas en el experimento de Camps *et al.*, 1995.

Finalmente, es importante notar que la discrepancia entre las mediciones experimentales del campo magnético usando un gausómetro BELL 620 con los valores obtenidos por medio del método descrito en este trabajo son importantes en el caso de corrientes grandes (≥ 50 A). Esta discrepancia es analizada actualmente.

oA

Bibliografía

Assmussen, J.; T. A. Grotjohn, Peng U Mak, y M. A. Perrin (1997). "The Design and Application of Electron Cyclotron Resonance Discharges IEEE", *Trans. Plasma Sci.*, 25, 1196

Camps, E.; O. Olea; C. Gutiérrez-Tapia y M. Villagrán (1995). "Characteristics of a Microwave Electron Cyclotron Resonance Plasma Source", *Rev. Sci. Instrum.*, 66, 3219.

Garret, M. W. (1962). *Computer Programs Using Zonal Harmonics for Magnetic Properties of Current Systems*. Oak Ridge National Laboratory, ORNL-3318.

Garret, M. W. (1963). "Calculation of Fields, Forces, and Mutual Inductances of Current Systems by Elliptic Integrals", *J. Appl. Phys.*, 34, 2567.

González-Damián, J y C. Gutiérrez-Tapia (2001). "Particle Fluxes in an Electron Cyclotron Resonance Plasma Discharge", *J. Appl. Phys.*, 90, 1124.

Granadshtein, I. S. e I. M. Rydzhik (1980). *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, New York.

IMSL (1997). *Library Math/Library Special Functions*. Chapter 9. Visual Numerics, Inc., Houston, Texas.

King, L. V. (1924). *On the Direct Numerical Calculation of Elliptic Functions and Integrals*. Cambridge University Press, Cambridge, England.

Lieberman, M. A. y A. J. Lichtenberg (1994). *Principles of Plasma Discharge and Materials Processing*. John Wiley & Sons, New York.

Morozov, A. I. y Solev'ev (1965). "The Structure of the Magnetic Field", *Reviews of Plasma Physics*, Vol. 2, 1, Consultants Bureau, New York.

NAG (1991). *Fortran Library Manual, Mark 15*. Oxford, U. K.

Sadeghi, N.; T. Nakano; D. J. Trevor y R. A. Gottsho (1991). "Ion Transport in an Electron Cyclotron Resonance Plasma", *J. Appl. Phys.*, 70, 2552.