Marco Antonio Castillo Rubí

Topología y álgebra: hasta que la muerte las separe

Ciencia Ergo Sum, vol. 11, núm. 1, marzo-junio, 2004, pp. 71-81,
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Ciencia Ergo Sum,
ISSN (Versión impresa): 1405-0269
ciencia.ergosum@yahoo.com.mx
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Topología y álgebra: hasta que la muerte los separe

Marco Antonio Castillo Rubí*

Recepción: mayo 22 de 2003
Aceptación: septiembre 30 de 2003

*** Tesista del Departamento de Matemáticas en el Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN).**
Correo electrónico: mac@math.cinvestav.mx

Resumen. Un problema topológico fundamental es decidir cuándo dos espacios topológicos son homeomorfos. En general no existe un método algorítmico que resuelva este problema. Probar que dos espacios sean homeomorfos puede resultar una tarea más bien artesanal. Es precisamente el objetivo de este trabajo construir un modelo algebraico menejable (el grupo fundamental) que detecte la presencia o ausencia de propiedades topológicas en los espacios.

Palabras clave: grupo fundamental, primer grupo de homotopía, grupo de Poincaré.

Topology and Algebra: Until Death do them Apart

Abstract. A fundamental topological problem entails deciding when two topological spaces are homeomorphic. In general, an algorithmic method does not exist that can resolve this problem. Attempting to prove that two spaces are homeomorphic may result in a task that is essentially mechanical. The precise object of this work is to construct a manageable algebraic model (the fundamental group) that detects the presence or absence of topological properties in spaces.

Key words: fundamental group, first homotopy group, group of Poincaré.

Introducción

La topología es la versión moderna de la geometría: estudia la naturaleza y las propiedades de los espacios. Las diferentes clases de geometría (incluida la topología como un caso especial) se distinguen básicamente por los diversos tipos de transformaciones que se permiten aplicar sin que los objetos considerados realmente cambien. En la geometría euclidiana ordinaria, por ejemplo, puede trasladarse, rotar y reflejar los objetos pero sin estirarlos ni doblarlos. Así, dos objetos son 'congruentes' si, mediante estas transformaciones, uno puede sobreponerse en el otro, de manera que coincidan perfectamente. En la topología es factible cualquier cambio continuo que pueda ser constantemente deshecho. Por ejemplo, un círculo es lo mismo que un triángulo o un cuadrado; el proceso de transformación de uno en el otro puede hacerse de tal modo que puntos cercanos a la figura original permanezcan cercanos en la figura final. Por esta razón la topología es conocida como la 'geometría de la goma'. En este sentido, es una de las formas más básicas de la geometría y se usa en casi en todas las ramas de las matemáticas. Sin embargo, existe una forma aún más básica: la homotopía. Usamos topología para describir homotopía; pero en la última se permite una variedad tan grande de transformaciones que el resultado se asemeje más al álgebra que a la topología. La experiencia ha mostrado que la solución de muchos problemas topológicos, geométricos y hasta diferenciales depende exclusivamente de las propiedades homotópicas de los objetos estudiados. Cabe mencionar que la geometría diferencial y la topología algebraica son, a la vez, el lenguaje de la física moderna. El método de la segunda es el siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \text{Objeto geométrico} & & \text{Número} \\ \text{(espacio topológico)} & \rightsquigarrow & \text{(estructura algebraica)} \\ X & & T(X) \end{array}$$

es decir, pasamos de un espacio topológico X a un modelo algebraico $T(X)$ (donde $T(X)$ puede ser, por ejemplo, un grupo). Un objetivo principal de la topología algebraica es encontrar modelos algebraicos de los espacios. Es natural requerir que si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, f induzca un homomorfismo $T(f)$: $T(X) \rightarrow T(Y)$ tal que:

1. Si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$: $T(X) \rightarrow T(Z)$.
2. Si $1_x : X \rightarrow X$ es la función idéntica, $T(1_x)$:$T(x) \rightarrow T(X)$ es el homomorfismo idéntico.

En estas condiciones obtenemos:

si $f : X \rightarrow Y$ es homeomorfismo, entonces $T(f)$: $T(X) \rightarrow T(Y)$ es isomorfismo. Luego $T(X)$ distinto de $T(Y)$ implica que X y Y no sean homeomorfos.

1. Homotopía entre funciones

Denotaremos por $C(X, Y)$ al espacio de funciones continuas, que es el conjunto de todas las funciones continuas de un espacio topológico X a un espacio topológico Y.

Definición 1.1. *La topología compacto-abierta en $C(X, Y)$ es la generada por la familia siguiente:*

$\gamma=\{[K, U]:K \subseteq X, U \subseteq Y$, *con* K *compacto y* U *abierto*$\}$

Sea X un espacio topológico y sean $x_0, x_1 \in X$. Un camino de x_0 a x_1 en X es una función continua $\alpha : I\rightarrow X$ tal que $\alpha(0)= x_0$ y $\alpha(1)= x_1$; se dice que x_0 es el origen del camino y x_1 el final. Así, el espacio de todos los caminos en X es $C(I, X)$, el cual contiene dos importantes subespacios:

1. $E(X, x_0, x_1)$ es el subespacio de caminos f: $I\rightarrow X$ tal que $f(0)= x_0$, $f(1)= x_1$.
2. $E(X, x_0)$ es el espacio de caminos que empiezan en x_0.
3. $\Omega(X, x_0)= E(X, x_0, x_0)$ se le llama espacio de lazos.

Definición 1.2.
1. Un espacio X es conexo si no es la unión de dos abiertos disjuntos no vacíos.
2. Un espacio X es conexo por arcos si para cada par de puntos $x, y \in X$ existe $\alpha \in C(I, X)$ tal que $\alpha(0)= x$; $\alpha(1)= y$.

Definición 1.3.
Sean X y Y espacios topológicios y sean f, g: $X\rightarrow Y$ funciones continuas, f y g se dicen funciones homotópicas si existe una función continua H: $X\times I \rightarrow Y$ tal que

$H(x, 0)=f(x) \quad \forall x \in X$
$H(x, 1)=g(x) \quad \forall x \in X$

En este caso, la aplicación H se llama una homotopía entre f y g; la representaremos por $f \simeq_H g$.

La t-ésima rama de una homotopía H: $X\times I \rightarrow Y$ es la función continua H_t: $X \rightarrow Y$ definida por $H_t(x) = H(x, t)$, que es la siguiente composición:

$$X \xrightarrow{i} X\times\{t\} \subset X\times I \xrightarrow{H} Y$$

Así, H es una familia de funciones continuas que empiezan en f y terminan en g; es decir, $H=\{H_t\}_{t\in I}$, donde $H_0 = f$ y $H_1 = g$ en el espacio de funciones continuas $C(X, Y)$, por lo que podemos pensar la homotopía entre dos funciones f y g como un camino en el espacio $C(X, Y)$ de f a g, donde el parámetro t es el tiempo. Entonces al tiempo $t = 0$ obtenemos la aplicación f, y cuando t varía, la aplicación H_t varía continuamente, de tal forma que al tiempo $t = 1$ obtenemos la aplicación g. Por ello se dice que una homotopía es una deformación continua entre dos funciones.

Definición 1.4. *Dos funciones f, g: $X \rightarrow Y$ son homotópicas relativamente a un subconjunto A de X si existe una homotopía H: $X\times I \rightarrow Y$ entre f y g tal que*

$H(a, t) = f(a) = g(a) \ \forall\ a \in A, \forall\ t \in I,$

en otras palabras, podemos deformar f en g sin alterar los valores de f en A. Esto es, para todo $a \in A$, $H(a, t)$ no depende de $t \in I$. Denotaremos esto por $f \simeq_{rel A} g$.

Lema 1.5. *Sean X y W espacios topológicos, y supongamos que $W = A \cup B$, donde A y B son ambos subconjuntos cerrados de W. Si f: $A \rightarrow X$ y g: $B \rightarrow X$ son aplicaciones continuas tales que $f(w) = g(w)$ para toda $w \in A \cap B$, entonces la aplicación h: $W \rightarrow X$ definida por*

$$h(w)=\begin{cases} f(w) & \text{si } w\in A \\ g(w) & \text{si } w\in B \end{cases} \quad \text{es continua.}$$

Demostración:
Sea C un subconjunto cerrado de X, veamos que $h^{-1}(C)$ es cerrado en W; en efecto, pues:

$h^{-1}(C) = h^{-1}(C) \cap W$
$= h^{-1}(C) \cap (A \cup B)$

$= (h^{-1}(C) \cap A) \cup (h^{-1}(C) \cap B)$
$= f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$

Puesto que f es continua, entonces $f^{-1}(C)$ es cerrado en A y por lo tanto es cerrado en W, pues A es cerrado en W. Análogamente $g^{-1}(C)$ es cerrado en W. Por ello $h^{-1}(C)$ es cerado en W y así h es continua. ■

Proposición 1.6 La relación $\simeq_{relA}$ es una relación de equivalencia en $C(X, Y)$

Demostración:
• Reflexiva: Definimos $H: X\times I \to Y$ por $H(x, t) = f(x)$, la cual es continua (pues es constante en t), y además

$H(x, 0) = f(x)$
$H(x, 1) = f(x)$
$H(a, t) = f(a) = f(a)$
por lo tanto $f \simeq_{relA} f$.

• Simétrica: Supongamos que $f \simeq_{relA} g$, entonces existe una homotopía $H: X\times I \to Y$ tal que para todo $x \in X$, para todo $t \in I$ y para todo $a \in A$ se cumple lo siguiente:

$H(x, 0) = f(x)$
$H(x, 1) = g(x)$
$H(a, t) = f(a) = g(a)$

Tomemos a $G(x, t) = H(x, 1\text{-}t)$, que es continua, pues es una composición de funciones continuas y además

$G(x, 0) = H(x, 1) = g(x)$
$G(x, 1) = H(x, 0) = f(x)$
$G(a, t) = H(a,1 - t) = g(a) = f(a)$
por ello $g \simeq_{relA} f$.

• Transitiva: Supongamos que $f \simeq_{relA} g$ y $g \simeq_{relA} h$, es decir, existen homotopías $H: X\times I \to Y$ y $G: X\times I \to Y$ tales que para todo $x \in X$, todo $t \in I$ y toda $a \in A$ se realiza lo siguiente:

$$\begin{array}{cc} H(x, 0) = f(x) & G(x, 0) = g(x) \\ H(x, 1) = g(x) & G(x, 1) = h(x) \\ H(a, t) = f(a) = g(a) & G(a, t) = g(a) = h(a) \end{array}$$

Por lo que definimos F como:

$$F(x,t) = \begin{cases} H(x,2t) & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

por el lema 1.5 F es continua y además

$F(x, 0) = H(x, 2(0)) = H(x, 0) = f(x)$
$F(x, 1) = G(x, 2(1)\text{-}1) = G(x, 1) = h(x)$
$F(a, t) = H(a, 2t) = f(a) = g(a)$ cuando $t \le ½$, mientras que $F(a, t) = G(a, 2t\text{-}1) = g(a) = h(a)$ cuando $t \ge ½$, por lo que en cualquier caso $F(a, t) = f(a) = h(a)$

Por eso $f \simeq_{relA} h$. ■

Lema 1.7. *Sean X, Y, Z y W espacios topológicos; entonces las homotopías se comportan bien frente a la composición de funciones; es decir, si f, $g : X \to Y$ son funciones continuas, entonces se tiene:*

1. *Si $f \simeq_{relA} g$, entonces $h \circ f \simeq_{relA} h \circ g$, donde $h: Y \to Z$ es continua.*
2. *Si $f \simeq_{relA} g$, entonces $f \circ l \simeq_{rel\, l^{-1}(A)} g \circ l$, donde $l: W \to X$ es continua.*

Demostración:
Puesto que $f \simeq_{relA} g$, entonces existe una homotopía $H : X\times I \to Y$ tal que

$H(x, 0) = f(x)$
$H(x, 1) = g(x)$
$H(a, t) = f(a) = g(a)$

Primero. Tomemos a $F(x, t) = H(H(x, t)): X\times I \to Z$ que es continua, ya que es una composición de funciones continuas; y además tenemos:

$F(x, 0) = h(H(x, 0)) = h(f(x)) = (h \circ f)(x)$
$F(x, 1) = h(H(x, 1)) = h(g(x)) = (h \circ g)(x)$
$F(a, t) = h(H(a, t)) = h(f(a)) = h(g(a))$

Por lo tanto $h \circ f \simeq_{relA} h \circ g$.

Segundo. Ahora tomemos a $G(x, t) = H(l(x), t): W\times I \to Y$ que es continua, ya que es una composición de funciones continuas, además, tenemos:

$G(w, 0) = H(l(w), 0)) = f(l(w)) = (f \circ l)(x)$
$G(w, 1) = H(l(w), 1)) = g(l(w)) = (g \circ l)(w)$

Sea $b \in l^{-1}(A)$, entonces $l(b) \in A$; es decir, $l(b) = \alpha$ para algún $\alpha \in A$; entonces:

$G(b, t) = H(l(b), t)) = f(l(b)) = f(a) = g(a) = g(l(b))$

Por lo tanto $f \circ l \simeq_{rel\, l^{-1}(A)} g \circ l$.

Observación 1.8 *La relación* $f \simeq g$ *(sin ser homotopía relativa) también es una relación de equivalencia en* $C\ (X, Y)$. *De hecho, el caso* $A = \phi$ *en la definición 1.4 corresponde a la Definición 1.3. El conjunto de todas las clases de equivalencia es denotado como* $[X, Y]$ *y es llamado el conjunto de clases de homotopía.*

2. Multiplicación de caminos y lazos

Definición 2.1. *Dados dos caminos* $\sigma, \lambda : I \to X$ *tales que* $\sigma(1) = \lambda(0)$, *definimos el camino producto* $\sigma \cdot \lambda : I \to X$ *de la siguiente manera*:

$$(\sigma\cdot\lambda)(s)=\begin{cases}\sigma(2s) & 0\le s\le \frac{1}{2}\\ \lambda(2s-1) & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}$$

Notemos que $\sigma \cdot \lambda$ es continua por el lema 1.5. Por otra parte, la función $\bar{\sigma} : I \longrightarrow X$ definida por $\bar{\sigma}(s) = \sigma(1-s)$ es también una camino en X, que esencialmente recorre a σ en sentido contrario.

Ejemplos 2.2

1. Un ejemplo sencillo de camino es el camino constante $c_{x0} : I \to X$, *definido por* $c_{x0}(s) = x_0$ *para toda* $s \in I$, *y donde* $x_0 \in X$.

2. Sea $X=\mathbb{R}$; *consideremos* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 : I \to X$ *definidos por* $\sigma_1(s) = s$, $\sigma_2(s) = 1 + s$ *y* $\sigma_3(s) = 2 + s$; *entonces tenemos que*:

$$((\sigma_1\cdot\sigma_2)\cdot\sigma_3)(s)=\begin{cases}4s & 0\le s\le \frac{1}{2}\\ 2s+1 & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}$$

$$(\sigma_1\cdot(\sigma_2\cdot\sigma_3))(s)=\begin{cases}2s & 0\le s\le \frac{1}{2}\\ 4s-1 & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}$$

donde notamos que

$((\sigma_1 \cdot \sigma_2) \cdot \sigma_3)(½) = 2$
$(\sigma_1 \cdot (\sigma_2 \cdot \sigma_3))(½) = 1$

por lo tanto las funciones no son iguales, es decir, el producto entre caminos no es asociativo.

Notemos que no podemos darle una estructura de grupo a $E\ (X, x_0, x_1)$ con el producto de caminos, puesto que, entre otras razones, éste no es asociativo; sin embargo, con el concepto de homotopía veremos que sí adquiere tal propiedad.

Se dice que dos caminos σ y λ en X son equivalentes si σ y λ son homotópicos relativamente a $\{0, 1\}$, es decir, si los extremos de las caminos permanecen fijos durante la deformación. Por lo tanto, los caminos $\sigma, \lambda : I \to X$ son equivalentes si existe una homotopía $H : I \times I \to X$ tal que

$H(s, 0) = \sigma(s)$
$H(s, 1) = \lambda(s)$
$H(0, t) = \sigma(0) = \lambda(0)$
$H(1, t) = \sigma(1) = \lambda(1)$

Por el Lema 1.6 tenemos que $\simeq_{relA}$ es una relación de equivalencia en $E\ (X, x_0, x_1)$, donde $A = \{0, 1\} \subset I$. De aquí en adelante tomaremos a $A = \{0, 1\}$.

Definición 2.3. *El conjunto de clases de equivalencia en* $E\ (X, x_0, x_1)$ *respecto a la relación de homotopía relativa a* $\{0, 1\}$ *se representa por* $\pi_1\ (X, x_0, x_1)$. *Denotasremos por* $[\sigma]$ *a la clase de homotopía con representante* σ.

Definamos ahora un producto de clases de homotopía de caminos por

$[\sigma][\lambda] = [\sigma \cdot \lambda]$,

el cual veremos que está bien definido.

Lema 2.4 Sean $\sigma, \sigma', \lambda, \lambda' \in C(I, X)$ con $a = \sigma(0) = \sigma'(0)$, $b = \sigma(1) = \sigma'(1) = \lambda(0) = \lambda'(0) =$ y $c = \lambda(1) = = \lambda'(1)$, si además $\sigma \simeq_{relA} \sigma$ y $\lambda \simeq_{relA} \lambda'$, entonces

$\sigma \cdot \lambda \simeq_{relA} \sigma' \cdot \lambda'$.

Demostración:

Por hipótesis tenemos las homotopías H, G: $I \times I \to X$ tales que

$H(s, 0) = \sigma(s)$	$G(s, 0) = \lambda(s)$
$H(s, 1) = \sigma'(s)$	$G(s, 1) = \lambda'(s)$
$H(0, t) = a$	$G(0, t) = b$
$H(1, t) = b$	$G(1, t) = c$.

Considérese la función F: $I \times I \to X$ definida por

$$F(s,t)=\begin{cases}H(2s,t) & 0\le s\le \frac{1}{2}\\ G(2s-1,t) & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}$$

por lo que se tiene:

$$F(s,0)=\begin{cases}H(2s,0)=\sigma(2s) & 0\le s\le \frac{1}{2}\\ G(2s-1,0)=\lambda(2s-1) & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}$$
$$=(\sigma\cdot\lambda)(s)$$

similarmente

$F(s, 1) = (\sigma' \cdot \lambda')(s)$

y además

$F(0, t) = H(0, t) = a$ y $F(1, t) = G(1, t) = c$

por lo tanto

$\sigma \cdot \lambda \simeq_{relA} \sigma' \cdot \lambda'$. ■

La proposición siguiente muestra las principales propiedades de este producto.

Proposición 2.5. *Sean* $\sigma \in E(X, x_0, x_1)$, $\lambda \in E(X, x_1, x_2)$ *y* $\tau \in E(X, x_2, x_3)$ *caminos en X. Entonces*

1. El producto de clases de homotopía es asociativo, es decir

$([\sigma][\lambda])[\tau] = [\sigma]([\lambda] \cdot [\tau])$

2. Sea $x \in X$, *la clase de homotopía del camino constante* c_x *definido en el ejemplo 2.2(1) se comporta como un elemento identidad (por la izquierda y la derecha), esto es,*

$[c_{x_0}][\sigma] = [\sigma]$ y $[\sigma][c_{x_1}] = [\sigma]$.

3. La clase del camino $\bar{\sigma} \in C(X, x_1, x_0)$ *actúa como inverso de la clase de homotopía de* σ, *es decir:*

$[\sigma][\bar{\sigma}] = [c_{x_0}]$ y $[\bar{\sigma}][\sigma] = [c_{x_1}]$.

Demostración:
Primero. Basta demostrar $\sigma \cdot (\lambda \cdot \tau) \simeq_{relA} (\sigma \cdot \lambda) \cdot \tau$, donde $\sigma(1) = \lambda(0) = x_1$ y $\lambda(1) = \tau(0) = x_2$. Queremos encontrar una homotopía relativa a $\{0, 1\}$ entre $\sigma \cdot (\lambda \cdot \tau)$ y $(\sigma \cdot \lambda) \cdot \tau$. La homotopía que funciona es la siguiente (que es continua por el lema 1.5):

$$H(s,t) = \begin{cases} \sigma(\frac{4s}{2-t}) & 0 \le s \le \frac{2-t}{4} \\ \lambda(4s+t-2) & \frac{2-t}{4} \le s \le \frac{3-t}{4} \\ \tau(\frac{4s+t-3}{1+t}) & \frac{3-t}{4} \le s \le 1 \end{cases}$$

pues

$$H(s,0) = \begin{cases} \sigma(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \lambda(4s-2) & \frac{1}{2} \le s \le \frac{3}{4} \\ \tau(4s-3) & \frac{3}{4} \le s \le 1 \end{cases}$$

$$= (\sigma \cdot (\lambda \cdot \tau))(s);$$

$$H(s,1) = \begin{cases} \sigma(4s) & 0 \le s \le \frac{1}{4} \\ \lambda(4s-1) & \frac{1}{4} \le s \le \frac{1}{2} \\ \tau(2s-1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

$$= ((\sigma \cdot \lambda) \cdot \tau)(s).$$

Esto es por la fórmula de la definición 2.1 para el producto de caminos; además,

$$H(0,t) = \sigma(\tfrac{4(0)}{2-t}) = \sigma(0)$$

$$H(1,t) = \tau(\tfrac{4(1)+t-3}{1+t}) = \tau(\tfrac{t+1}{1+t}) = \tau(1).$$

Segundo. Análogamente basta demostrar que $c_{x_0} \cdot \sigma \simeq_{relA} \sigma$ y $\sigma \cdot c_{x_1} \simeq_{relA} \sigma$. La homotopía que funciona para la primera es la siguiente (la cual es continua por el lema 1.5)

$$H(s,t) = \begin{cases} x_0 & 0 \le s \le \frac{t}{2} \\ \sigma(\frac{2s-t}{2-t}) & \frac{t}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

pues

$$H(s,0) = \sigma(\tfrac{2s-(0)}{2-(0)}) = \sigma(s)$$

$$H(s,1) = \begin{cases} x_0 & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \sigma(2s-1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

$$= (c_{x_0} \cdot \sigma)(s)$$

$$H(0,t) = x_0$$

$$H(1,t) = \sigma(\tfrac{2(1)-t}{2-t}) = \sigma(1).$$

La homotopía que funciona para la segunda afirmación es

$$F(s,t) = \begin{cases} \sigma(\frac{2s}{2-t}) & 0 \le s \le \frac{2-t}{2} \\ x_1 & \frac{2-t}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

pues

$$F(s,0) = \sigma(\tfrac{2s}{2-(0)}) = \sigma(s)$$

$$F(s,1) = \begin{cases} \sigma(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ x_1 & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

$$= (\sigma \cdot c_{x_1})(s)$$

$$F(0,t) = \sigma(\tfrac{2(0)}{2-t}) = \sigma(0)$$

$$F(1,t) = x_1$$

Tercero. Analogamente basta demostrar que $\sigma \cdot \bar{\sigma} \simeq_{relA} c_{x_0}$ y $\bar{\sigma} \cdot \sigma \simeq_{relA} c_{x_1}$. La homotopía que funciona para la primera afirmación es la siguiente (que es continua por el lema 1.5)

$$H(s,t) = \begin{cases} \sigma(2s) & 0 \le s \le \frac{1-t}{2} \\ \sigma(1-t) & \frac{1-t}{2} \le s \le \frac{1+t}{2} \\ \sigma(2-2s) & \frac{1+t}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

pues tenemos

$$H(s,0) = \begin{cases} \sigma(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \sigma(2-2s) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sigma(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \bar{\sigma}(2s-1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

$$= (\sigma \cdot \bar{\sigma})(s)$$

puesto que $\sigma(2-2s) = \bar{\sigma}(1-(2-2s)) = \bar{\sigma}(2s-1)$, luego
$H(s, 1) = \sigma(1\text{-}1) = \sigma(0) = x_0$
$H(0, t) = \sigma(2(0)) = \sigma(0) = x_0$
$H(1, t) = \sigma(2\text{-}2(1)) = \sigma(0) = x_0$

por lo que concluimos que $\sigma \cdot \bar{\sigma} \simeq_{relA} c_{x_0}$

Ahora tomamos a $\lambda = \bar{\sigma}$; por lo anterior tenemos $\lambda \cdot \bar{\lambda} \simeq_{relA} c_{\lambda(0)}$. Por otro lado, notemos que para $\sigma \in C(I, X)$:

$$\overline{(\bar{\sigma})}(t) = \bar{\sigma}(1-t) = \sigma(1-(1-t)) = \sigma(t)$$

por lo que $\bar{\lambda} = \bar{\bar{\sigma}} = \sigma$, y además $\lambda(0) = \sigma(1\text{-}0) = \sigma(1) = x_1$. Por lo tanto

$$\lambda \cdot \bar{\lambda} = \bar{\sigma} \cdot \sigma \simeq_{relA} c_{x_1} = c_{\lambda(0)}$$

Tenemos dos problemas que impiden que $\pi_1(X, x_0, x_1)$ sea grupo:

- La multiplicación no siempre está definida para cualesquiera dos clases.
- La identidad no es única.

Para evitar estos problemas, hagamos lo siguiente: Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$, considérese el conjunto siguiente

$$\Omega(X, x_0) = \{\sigma: I \to X \mid \sigma(0) = \sigma(1)\, x_0\} = E(X, x_0, x_1)$$

Llamaremos a los elementos de este conjunto *lazos con punto base* x_0. A este conjunto le damos la relación de equivalencia de homotopía relativa $\{0, 1\}$, por lo que tenemos:

$$\pi_1(X, x_0, x_0) = \Omega(X, x_0)/\simeq_{rel(0,1)}$$

que solamente escribimos $\pi_1(X, x_0)$ en vez de $\pi_1(X, x_0, x_0)$, que es el conjunto de todas las clases de homotopía $[\alpha]$ de lazos $\alpha: I \to X$ con punto base x_0.

Teorema 2.6. $\pi_1(X, x_0)$ *es un grupo respecto al producto* $[\sigma][\lambda] = [\sigma \cdot \lambda]$

Demostración:
Por el lema 2.4 el producto está bien definido, y por la proposición 2.5 se deduce la asociatividad. Por otra parte tenemos que

$$[c_{x_0}][\sigma] = [\sigma], [\sigma][c_{x_0}] = [\sigma]$$

Es decir, el elemento identidad es $[c_{x_0}]$; además tenemos:

$$[\sigma][\bar{\sigma}] = [c_{x_0}], [\bar{\sigma}][\sigma] = [c_{x_0}]$$

donde el inverso viene dado por $[\sigma]^{-1} = [\bar{\sigma}]$. ■
A $\pi_1(X, x_0)$[1] se le llama **grupo fundamental** de X con punto base x_0 o también se le conoce como el primer grupo de homotopía.

Ejemplo 2.7. *Sea* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *convexo, entonces para cada* $x_0 \in C$, $\pi_1(C, x_0) = 0$; *en efecto, debemos ver que cada lazo* σ *basado en* x_0 *es homotópico relativo* $\{0, 1\}$ *a* c_{x_0}.
La homotopía requerida en tal caso es

$H: I \times I \to C$
$H(s, t) = tx_0 + (1\text{-}t)\sigma(s)$

1. Cabe mencionar que Poincaré fue el primero en relacionar el estudio de espacios topológicos con el estudio de los correspondientes grupos fundamentales asociados. Por ello al grupo $\pi_1(X, x_0)$ se le conoce también como "el grupo de Poincaré".

pues

$H(s, 0) = \sigma(s)$
$H(s,1) = x_0 = c_{x_0}(s)$
$H(0, t) = tx_0 + (1\text{-}t)\, x_0 = x_0 = H(1, t)$

debido a que $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$. *En tal caso, se dice que su grupo fundamental es trivial, es decir, cualquier lazo basado se deforma a un punto.*

Por conveniencia nos referimos al par (X, x_0), donde X es un espacio y x_0 es un punto de X, como un *espacio basado*. La notación $f(X, x_0) \to (Y, y_0)$ es para decir que f es una *función basada*, donde f es una función continua de X a Y con $f(x_0) = y_0$.

Proposición 2.8 *Toda función basada* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *induce un homomorfismo de grupos fundamentales*

$f_*: \pi_1 (X, x_0) \to \pi_1 (Y, y_0)$
$[\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$

Además, la asociación $f \rightsquigarrow f_*$ *satisface las siguientes propiedades:*

a) $(1_X)_* = 1_{\pi_1(X,x_0)}$
b) $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$

donde $g :(Y, y_0) \to (Z, z_0)$ *es una función basada.*

Demostración:
Primero observemos que f_* está bien definida, pues si α, β son dos lazos en X basados en x_0 con $\alpha \simeq_{rel(0,1)} \beta$, entonces por el lema 1.7 tenemos $f \circ \alpha \simeq_{rel\{0,1\}} f \circ \beta$.
Por otra parte

$$f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha] \cdot [\beta]) = [f \circ (\alpha \cdot \beta)]$$

$$f_*([\alpha])\, f_*([\beta]) = [f \circ \alpha]\, [f \circ \beta] = [(f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta)]$$

pero $f \circ (\alpha \cdot \beta) = (f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta)$, pues

$$(f \circ (\alpha \cdot \beta))(t) = f((\alpha \cdot \beta)(t)) = \begin{cases} f(\alpha(2t)) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f(\beta(2t-1)) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$((f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta))(t) = \begin{cases} (f \circ \alpha)(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ (f \circ \beta)(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Entonces $[f \circ (\alpha \cdot \beta)] = [(f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta)]$, y por lo tanto $f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha])\, f_*([\beta])$, por ello f_* determina un morfismo de grupo. Enseguida demostraremos las propiedades que satisface este morfismo.

a) $(1_x)_*([\alpha]) = [1_x \circ \alpha] = [\alpha]$
b) $(g_* \circ f_*)([\alpha]) = g_*(f_*([\alpha])) = g_*([f \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] = [(g \circ f) \circ \alpha] = (g \circ f)_*([\alpha])$. ■

Al morfismo de la proposición 2.8 se le llama *homomorfismo inducido por* f. Como consecuencia de tal proposición, tenemos que si X y Y son dos espacios topológicos homeomorfos, entonces $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$ son isomorfos, por lo tanto si $\pi_1(X, x_0)$ es distinto que $\pi_1(Y, y_0)$ implica que X y Y no sean homeomorfos. Por lo que decimos que el grupo fundamental es un invariante topológico de X, es decir, $\pi_1(X, x_0)$ es un modelo algebraico del espacio topológico X.

Proposición 2.9. *Sean* $x, y \in X$, *si existe un camino en* X *de* x *a* y, *entonces los grupos* $\pi_1(X, x)$, $\pi_1(X, y)$ *son isomorfos.*

Demostración:
Sea $\alpha: I \to X$ un camino tal que $\alpha(0) = y$ y $\alpha(1) = x$. Considérese la asociación

$$\beta \mapsto \alpha \cdot (\beta \cdot \bar{\alpha})$$

En la clase de homotopía relativa $\{0, 1\}$ esto determina una función

$$\pi_1(X,x) \xrightarrow{\alpha_\#} \pi_1(X,y)$$

$$[\beta] \mapsto [\alpha \cdot (\beta \cdot \bar{\alpha})]$$

bien definida, pues si $[\beta], [\beta'] \in \pi_1(X, x)$ son tales que $[\beta], [\beta']$, entonces $\beta \simeq_{rel\{0,\ 1\}} \beta \Rightarrow \beta \cdot \bar{\alpha} \simeq_{rel\{0,1\}} \beta \cdot \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha(\beta \cdot \bar{\alpha}) \simeq_{rel\{0,1\}} \alpha(\beta\, \bar{\alpha})$ (ver el lema 2.4), por lo tanto $\alpha_\#([\beta]) = \alpha_\#([\beta'])$.
Luego $\alpha_\#$ es un homomorfismo; en efecto:

$$\begin{aligned} \alpha_\#([\beta][\beta']) &= \alpha_\#([\beta \cdot \beta']) = [\alpha \cdot \beta \cdot \beta' \cdot \bar{\alpha}] \\ &= [\alpha \cdot \beta \cdot (\bar{\alpha} \cdot \alpha) \cdot \beta' \cdot \bar{\alpha}] \\ &= [\alpha \cdot \beta \cdot \bar{\alpha}][\alpha \cdot \beta' \cdot \bar{\alpha}] \\ &= \alpha_\#([\beta])\alpha_\#([\beta']) \end{aligned}$$

Usando el camino $\bar{\alpha}$ de y a x podemos definir:

$$\bar{\alpha}_\# : \pi_1(Y,y) \longrightarrow \pi_1(X,x)$$

$[\beta] \mapsto [\bar{\alpha} \cdot \beta \cdot \alpha]$

por lo que:

$(\bar{\alpha}_\# \circ \alpha_\#)([\beta]) = \bar{\alpha}_\#(\alpha_\#([\beta]))$

$= \bar{\alpha}_\#([\alpha \cdot \beta \cdot \bar{\alpha}])$

$= [\bar{\alpha} \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \bar{\alpha} \cdot \alpha]$

$= [\beta]$

$\therefore (\bar{\alpha}_\# \circ \alpha_\#) = 1_{\pi_1(X,x)}$

Análogamente se demuestra que $(\alpha_\# \circ \bar{\alpha}_\#) = 1_{\pi_1(Y,y)}$. Por lo tanto $\alpha_\#$ es biyectiva y así π_1 (X, x), π_1 (X, y) son isomorfos. ■

Corolario 2.10. *Si x_1, x_2 están en la misma componente arco-conexa de X, entonces π_1 (X, x_1) y π_1 (X, x_2) son isomorfos.*

Observación 2.11 *En vista de la proposición 2.9 y su corolario, podemos emitir el punto base de un espacio conexo por arcos.*

Finalizamos esta sección con una descripción del grupo fundamental de un producto cartesiano.

Proposición 2.12. *Se tiene el siguiente isomorfismo:*

π_1 $(X \times Y$ $(x_0, y_0)) \cong$ π_1 $(X, x_0) \oplus$ π_1 (Y, y_0)

Demostración:
Definamos

$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \xrightarrow{\varphi} \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0)$

por $\varphi([\alpha]) = ([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]) = (p_{1*} [\alpha], p_{2*} [\alpha])$, donde

$I \xrightarrow{\alpha = (\alpha_1, \alpha 2)} X \times Y \xrightarrow{p_1} X$

$I \xrightarrow{\alpha = (\alpha_1, \alpha 2)} X \times Y \xrightarrow{p_2} Y$

donde p_1 y p_2 son las proyecciones.

• φ es un homomorfismo.

$\varphi([\alpha][\beta]) = \varphi([\alpha \cdot \beta]) = (p_{1*} [\alpha \cdot \beta], p_{2*} [\alpha \cdot \beta]) = (p_{1*} [\alpha]\, p_{1*} [\beta], p_{2*} [\alpha]\, p_{2*} [\beta])$
$\varphi([\alpha]\, \varphi[\beta]) = (p_{1*} [\alpha], p_{2*} [\alpha])(p_{1*} [\beta], p_{2*} [\beta]) = (p_{1*} [\alpha]\, p_{1*} [\beta], p_{2*} [\alpha]\, p_{2*} [\beta])$
$\therefore \varphi([\alpha][\beta]) = \varphi([\alpha])\, \varphi([\beta])$

• φ es monomorfismo.
Si $\varphi([\alpha]) = e$ para alguna $[\alpha] \in \pi_1$ $(X \times Y, (x_0, y_0))$ y donde $e = ([c_{x_0}], [c_{y_0}])$ es la identidad en π_1 $(X, x_0) \oplus \pi_1$ (Y, y_0), entonces tenemos que

$(p_{1*}[\alpha], p_{2*}[\alpha]) = ([c_{x_0}], [c_{y_0}])$

$\Rightarrow ([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]) = ([c_{x_0}], [c_{y_0}])$

$\Rightarrow p_1 \circ \alpha \simeq_{rel\{0,1\}} c_{x_0}$ y $p_2 \circ \alpha \simeq_{rel\{0,1\}} c_{y_0}$

es decir, existen homotopías $H: I \times I \to X$ y $G: I \times I \to Y$ tales que

$H(s, 0) = x_0$	$G(s, 0) = y_0$
$H(s, 1) = (p_1 \circ \alpha)(s)$	$G(s, 1) = (p_2 \circ \alpha)(s)$
$H(0, t) = x_0 = H(1, t)$	$G(0, t) = y_0 = G(1, t)$

Por lo que definimos una nueva homotopía $F: I \times I \to X \times Y$ dada por

$F(s, t) = (H(s, t), G(s, t))$

de donde

$F(s, 0) = (H(s, 0), G(s, 0)) = (x_0, y_0)$
$F(s, 1) = (H(s, 1), G(s, 1)) = ((p_1 \circ \alpha)(s), (p_2 \circ \alpha)(s)) = (\alpha_1 (s), \alpha_2 (s)) = \alpha(s)$

$F(0, t) = (H(0, t), G(0, t)) = (x_0, y_0) = F(1, t)$

$\therefore \alpha \simeq_{rel\{0,1\}} c_{(x_0, y_0)}$.

$\therefore [\alpha] = [c_{(x_0, y_0)}]$, es decir $Ker\varphi = 0$.

$\therefore$ φ es un monomorfismo

• φ es un epimorfismo.
Dado $([\beta],[\gamma]) \in \pi_1$ $(X, x_0) \oplus \pi_1$ (Y, y_0); así $\beta: I \to X$, $\gamma: I \to Y$ son lazos basados en x_0, y_0 respectivamente. Considérese

$\alpha: I \to X \times Y$ definida por $\alpha(t) = (\beta(t), \gamma(t))$

por lo que
$\varphi([\alpha]) = (p_{1*} [\alpha], p_{2*} [\alpha]) = ([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha] = ([\beta],[\alpha])$. Por tanto φ es un epimorfismo y, entonces, un isomorfismo. ■

3. Grupo fundamental de algunos espacios topológicos

1. El espacio euclidio de dimensión n es el conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1,...,x_n) : x_1 \in \mathbb{R}$, para cada $i\}$ equipado con la métrica

$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ (llamada métrica euclidia). Notemos que $\mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo y conexo por arcos, entonces aplicando el ejemplo 2.7 y la observación 2.11 $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$, es decir, cualquier lazo basado en cualquier punto en $\mathbb{R}^n$ se deforma a un punto (el punto base). Un espacio conexo por arcos cuyo grupo fundamental es trivial se denomina *simplemente conexo*, en particular $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo.

2. El disco unitario en $\mathbb{R}^n$ está definido y denotado de la siguiente manera:

$$D^n = \{(x_1, \quad, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \quad + x_n^2 \leq 1\}$$

donde observamos que D^n es un conjunto convexo y conexo por arcos. Por lo tanto $\pi_1(D^n) = 0$.

En los siguientes incisos no se demostrará el grupo fundamental del espacio dado, solamente se describirá el espacio y se mencionará su grupo fundamental. Pues se necesita maquinaria más potente de topología algebraica para calcularlos, la cual queda fuera del contexto de este trabajo. Sin embargo, el lector, para una demostración más detallada, puede consultar Kosniowski (1986) o Munkes (1975) para los ejemplos 3, 4, 5 y 6; y Mimura y Toda (1991), Curtis (1984) y Chevalley (1996) para los ejemplos 7 y 8.

3. La circunferencia unitaria compleja. Sea $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$ tal que $i^2 = -1$, este conjunto ilustra los números complejos, donde notamos que $\mathbb{C}$ es isomorfo como espacio vectorial real a $\mathbb{R}^2$ dado por el isomorfismo $a + bi \mapsto (a, b)$, en general $\mathbb{C}^n$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$ como espacio vectorial, dado por el isomorfismo

$$(a_1 + b_1 i,..., a_n + b_n i) \mapsto (a_1,\dots, a_n, b_1,\dots, b_n),\ a_1, b_1 \in \mathbb{R}$$

La circunferencia unitaria compleja está definida por $S^1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$. Sea $p: \mathbb{R} \to S^1$ la aplicación exponencial $p(x) = e^{2\pi i x}$. Todos los enteros se identifican con el punto 1 $\in S^1$ mediante la aplicación exponencial, es decir, $e^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. Elegimos este punto como básico.
Dado un entero $n \in \mathbb{Z}$, sea γ_n el arco $\gamma_n(s) = ns$, $0 \leq s \leq n$, que une a 0 con $n \in \mathbb{R}$. Entonces γ_n se proyecta por p en un lazo de S^1 con base en 1. Además $p \circ \gamma_n$ da n vueltas en torno de la circunferencia en dirección contraria a las manecillas del reloj para cada n positivo, y así tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *La función* $\phi: \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, 1)$ *definida por* $\phi(n) = [p \circ \gamma_n]$ *es un isomorfismo; es decir, el grupo fundamental de* S^1 *basado en* 1 *es un grupo cíclico infinito.*

4. El toro T^2 se puede describir en tres diferentes maneras:
a) Un producto $S^1 \times S^1$.
b) Un subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por:
$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$.
c) Un cuadrado unitario $I^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ con la identificación $(x, 0) \equiv (x, 1)(0, y) \equiv (1, y)$ para todo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

los espacios descritos en (a), (b) y (c) son de hecho homeomorfos. Por lo tanto, aplicando la proposición 2.12, tenemos:

$$\pi_1(Toro) = \pi_1(T^2) = \pi_1(S^1 \times S^1) \cong \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

5. La esfera unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$ está definida por

$$S^n = \{(x_1, \quad, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \quad + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\}$$

Para ver que S^n tiene grupo fundamental trivial para $n \geq 2$, usamos el siguiente resultado.

Teorema 3.2. *Sea X un espacio topológico que puede describirse como la unión de dos conjuntos abiertos U y V simplemente conexos, de forma que* $U \cap V$ *sea conexo por arcos. Entonces X es simplemente conexo.*

Para aplicar este resultado a S^n, tómense puntos distintos $x, y \in S^n$ y hacemos $U = S^n - \{x\}$, $V = S^n - \{y\}$. Tanto U como V son homeomorfos a $\mathbb{R}^n$, por ello U y V son simplemente conexos, y $U \cap V = S^n - \{x, y\}$ es conexo por arcos, ya que $n \geq 2$. Por lo tanto:

$$\pi_1(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

6. El espacio proyectivo real n-dimensional se define como el espacio cociente $\mathbb{R}P^n : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/\sim$, donde ~ es la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ definida por

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{existe } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ tal que } x = \lambda y$$

Podemos restringir a los vectores de longitud uno, así $\mathbb{R}P^n$ es también el espacio cociente $S^n/(x\sim -x)$, la esfera unitaria con los puntos antipodales identificados. En particular $\mathbb{R}P^1$ es homeomorfo a S^1. Entonces:

$$\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 1 \\ \mathbb{Z}/2 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

7. Espacio lente. El grupo S^1 actúa libremente en la esfera $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ por

$$(z_1,\dots, z_n) \mapsto (e^{i\phi} z_1,\dots, e^{i\phi} z_n)$$

El grupo $\mathbb{Z}/m$ puede ser pensado como un subgrupo de S^1:

$$\mathbb{Z}/m = \{e^{2\pi i k/k} : k = 0,\dots, m\text{-}1\} \subset S^1$$

Así $\mathbb{Z}/m$ actúa libremente sobre la esfera S^{2n-1}. El espacio $L^{2n-1}(\mathbb{Z}/m) = S^{2n-1}(\mathbb{Z}/m)$ es llamado el espacio lente. En particular $L^{2n-1}(\mathbb{Z}/2) = \mathbb{R}P^{2n-1}$; luego:

$$\pi_1(L^{2n-1}(\mathbb{Z}/m)) \cong \mathbb{Z}/m$$

8. Grupos de matrices clásicos. Al conjunto $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d, \in \mathbb{R}\}$ sujeto a las identidades

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

se le llama los cuaternios, y además $\mathbb{H}$ es isomorfo como espacio vectorial real a $\mathbb{R}^4$ dado por el isomorfismo

$$(a + bi + cj + dk) \mapsto (a, b, c, d),\ a, b, c, d, \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ (donde $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$) manifiesta al conjunto de las matrices de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{F}$, y tenemos que $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ es isomorfismo a $\mathbb{R}^{n^2}$ vía el isomorfismo siguiente

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto (a_{11},\dots a_{12},\dots a_{1n},\dots a_{n1}, a_{n2},\dots a_{nn})$$

$GL_n(\mathbb{F}) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})\} : \det A \neq 0\} \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ denota al conjunto de matrices invertibles, el cual define un grupo con la multiplicación de matrices y se le llama grupo general lineal (en principio esta construcción sólo aplica para los campos conmutativos $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, donde el determinante está definido). $GL_n(\mathbb{R})$ tiene la topología inducida por la inclusión en $\mathbb{R}^{n^2}$. Análogamente $GL_n(\mathbb{C})$ tiene la topología inducida por la inclusión en $\mathbb{C}^{n^2}(\mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2})$.

Consideremos el subconjunto de $\mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ de las matrices que preservan el producto interior:

$$GO(n, \mathbb{F}) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F}) : \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle\}$$

donde puede demostrarse que $GO(n, \mathbb{F})$ es un grupo. Por lo que definimos la siguientes familias de grupos:

- Para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, escribimos $GO(n, \mathbb{F})$ como $O(n,)$ y lo llamaremos el *grupo ortogonal*.
- Para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, escribimos $GO(n, \mathbb{F})$ como $U(n,)$ y lo llamaremos el *grupo unitario*.
- Para $\mathbb{F} = \mathbb{H}$, escribimos $GO(n, \mathbb{F})$ como $Sp(n,)$ y lo llamaremos el *grupo simpléctico*.

Donde tenemos que:

$$O(1) = S^0,\ U(1) = S^1,\ Sp(1) = S^3$$

Es de hecho interesante que estas son las únicas esferas que pueden ser grupos. Definimos

$$SO(n) = \{A \in O(n): \det A = 1\}$$

al cual llamaremos *el grupo ortogonal especial* o *grupo de rotaciones*. De manera análoga definimos:

$$SU(n) = \{A \in U(n): \det A = 1\}$$

al cual llamaremos *grupo unitario especial*.

El grupo fundamental de los grupos clásicos correspondiente son:

Espacio	**Grupo fundamental**
$U(n)$	$\mathbb{Z}$
$SU(n)$	trivial
$SO(2)$	$\mathbb{Z}$
$SO(n)$	$\mathbb{Z}/2$ para $n \geq 3$
$Sp(n)$	trivial

Por lo anterior concluimos que espacios topológicos con grupo fundamental diferente no son homeomorfos. Por ejemplo: la esfera S^2 no es homeomorfa al toro T^2, pues tienen grupo fundamental diferente. Cabe mencionar que el grupo fundamental es un ejemplo sencillo de un modelo algebraico que puede motivar al lector para que estudie modelos algebraicos mucho más potentes que este, como son los grupos de homotopía, los grupos de homología y los grupos de cohomología, los cuales son aplicables en casi todas las áreas científicas exactas.

Bibliografía

Chevalley, C. (1946). *Theory of Lie Groups*. Princeton University Press.

Curtis, M. L. (1984). *Matrix Groups*. Universitext. Springer-Verlag.

Dugundji, J. (1966). *Topology*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass.

Gitler, S. (1978). *Introducción a la topología algebraica*. Fondo de Cultura Económica, México.

Kosniowski, C. (1986). *Topología algebraica*. Reverté S.A., Lecturer in Mathematics, the University of Newcastle upon Tyne.

McCarty, G. (1988). *Topology. An Introduction with Applications to Topological Groups*. Dover Publications, Inc., New York.

Mimura, M. and H. Toda (1991). *Topology of Lie Groups. I, II*. Translations of Mathematical Monographs, 91. American Mathematical Society, Providence, RI.

Munkres, J. R. (1975). *Topology: A First Ccourse*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.