

Armando Sánchez Vargas, Orlando Reyes Martínez  
Regularidades probabilísticas de las series financieras y la familia de modelos GARCH  
Ciencia Ergo Sum, vol. 13, núm. 2, julio-octubre, 2006, pp. 149-156,  
Universidad Autónoma del Estado de México  
México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=10413205>



*Ciencia Ergo Sum*,  
ISSN (Versión impresa): 1405-0269  
[ciencia.ergosum@yahoo.com.mx](mailto:ciencia.ergosum@yahoo.com.mx)  
Universidad Autónoma del Estado de México  
México

¿Cómo citar?

Fascículo completo

Más información del artículo

Página de la revista

[www.redalyc.org](http://www.redalyc.org)

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

# Regularidades probabilísticas de las series financieras y la familia de modelos GARCH

Armando Sánchez Vargas\* y Orlando Reyes Martínez\*\*

Recepción: 17 de abril de 2006  
Aceptación: 15 de junio de 2006

\* Profesor de licenciatura y posgrado, Facultad de Economía, UNAM. Miembro del Centro de Modelística y Pronósticos Económicos (CEMPE). Correo electrónico: asanchez@vt.edu

\*\* Estudiante de maestría en el campo de conocimiento Teoría Económica. División de Estudios de Posgrado, Facultad de Economía, UNAM.

Correo electrónico: oreyemar@hotmail.com  
Los autores agradecen los comentarios de los árbitros y el apoyo de Uberto Salgado Nieto.

**Resumen:** Este artículo tiene como objetivo discutir brevemente acerca de algunos modelos de volatilidad de la familia GARCH. Nuestro trabajo enfatiza el papel que han jugado las regularidades empíricas ('hechos estilizados') en el desarrollo de nuevos y más complejos modelos de volatilidad. Se argumenta que los modelos GARCH han sido exitosos porque han permitido capturar regularidades empíricas como la dependencia de segundo orden (*Volatility Clustering*) y las colas pesadas (*Thick Tails*) que caracterizan a las series de los retornos financieros. Sin embargo, se concluye que existe una gran veta para investigación sobre el tema de la modelación de la volatilidad, ya que la familia GARCH enfrenta varios problemas para capturar otras regularidades probabilísticas tales como la leptokurtosis de los datos, asimismo presentan problemas de especificación y estimación parsimoniosa de los parámetros.

**Palabras clave:** Modelos GARCH, hechos estilizados.

**Stylised Facts of the Financial Series and the Family of GARCH Models**

**Abstract.** The main objective of this paper is to survey some of the most known volatility models, specifically the GARCH family. Our review emphasizes the role played by the empirical regularities ('Stylised facts') in the development of new and more complex volatility models. It is argued that GARCH models have been successful because they capture empirical regularities like volatility clustering (second order dependence) and thick tails in returns data reasonably well. However, there is still room for further research on volatility modelling since the GARCH family faces some problems to capture other "stylized facts", shown by speculative price data, such as leptokurtosis and they also have some specification and estimation problems.

**Key words:** GARCH models, stylised facts.

## Introducción

La discusión en torno a la volatilidad de los retornos de los activos financieros se remonta a los primeros años del siglo pasado (Andreou, Pittis y Spanos; 2001). Las investigaciones empíricas sobre el tema surgieron con los trabajos de Working (1934), Cowles (1933) y Cowles y Jones (1937). Las principales conclusiones de dichos estudios son, entre otras, que los retornos se comportan de manera completamente aleatoria y que es imposible que los analistas financieros puedan predecir los retornos en el corto plazo.

Los hallazgos anteriores fortalecieron la hipótesis de que los precios financieros siguen una caminata aleatoria (*random*

*walk*) y, por ende, que sus tasas de crecimiento son eventos independientes.<sup>1</sup> Estas ideas estimularon nuevas líneas de investigación que condujeron a que Fama, en 1965, desarrollara la hipótesis de los mercados financieros eficientes

1. Cabe destacar que en realidad el primero en postular el modelo de caminata aleatoria para precios de activos financieros fue Bachelier en su tesis doctoral en 1900. El modelo estadístico de una caminata aleatoria normal está dada por el siguiente mecanismo:  $P_t = P_{t-1} + r_t$ ,  $r_t \sim N(0, h_t^2)$   $t \in T$  donde  $P_t$  es el precio del activo en el periodo  $t$ . La estructura probabilística de este modelo está dada por:

$$\begin{pmatrix} P_t \\ P_{t-1} \end{pmatrix} \sim N \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2 t & \sigma^2 (t-1) \\ \sigma^2 (t-1) & \sigma^2 (t-1) \end{pmatrix} \right]$$

(*Efficient Market Hypothesis*). Esta tesis justifica la imposibilidad de predecir los retornos de los activos financieros y sostiene que el proceso estocástico subyacente a los retornos es una martingala.<sup>2</sup>

Sin embargo, artículos posteriores arrojaron evidencia de que los precios especulativos no pueden ser modelados adecuadamente utilizando los modelos de caminata aleatoria y de martingala. Específicamente, se ha encontrado que los supuestos estadísticos asociados a esos dos modelos, tales como la independencia, idéntica distribución y normalidad no son apropiados para todos los precios especulativos.

Por ejemplo, Kendall (1953) comprobó que las distribuciones de probabilidad de los retornos de algunas series financieras son simétricas, pero tienen colas más pesadas y son más leptokurticas que la normal. Además detectó que el supuesto de idéntica distribución no es válido para dichas series, dado que su varianza no es constante en el tiempo. Finalmente, corroboró la existencia de correlación serial entre las observaciones de algunas series de retornos.

Kendall no fue el único que percibió que los modelos de caminata aleatoria eran inapropiados para capturar las regularidades empíricas presentes en las series financieras. En 1963, Mandelbrot confirmó que el supuesto de normalidad no es adecuado para la distribución de los retornos de varios activos. Este último autor fue más allá y propuso salvar este obstáculo reemplazando el supuesto de distribución normal de los retornos con las distribuciones de la familia Pareto-Levy. Esta propuesta se debe a que tal familia de distribuciones es más flexible para capturar regularidades empíricas tales como la leptocurtosis y las colas pesadas que caracterizan a una gran variedad de series financieras.

Sin embargo, años más adelante las distribuciones de la familia Pareto-Levy demostraron no ser tan adecuadas para la modelación de la dinámica de los precios financieros. La razón es que esta familia no captura de manera adecuada el hecho ‘estilizado’ de que cambios grandes (grandes variaciones) en las series de retornos van, generalmente, seguidos por otros cambios grandes (de cualquier signo) mientras que cambios pequeños tienden a ser seguidos por cam-

2. La definición de martingala implica que en un mercado eficiente el valor esperado de los retornos, en el período  $t$ , debe ser cero. En términos estadísticos:  $E(r_t | \sigma(r_{-1}, \dots, r_t)) = 0 \quad t \in T$ , donde  $r_t$  son los retornos del activo. De manera equivalente la definición estadística de martingala implica que la mejor predicción del precio de un activo el día de hoy es el precio del mismo el día de ayer:  $E(P_t | \sigma(P_{-1}, \dots, P_t)) = P_{-1} \quad t \in T$ .

3. Las cifras fueron tomadas de la página del *Board of Governors of the Federal Reserve System* de los Estados Unidos.

bios pequeños en las series, a esta regularidad empírica se le conoce como *Volatility Clustering*

En 1982, Robert Engle introdujo el primer intento de capturar el fenómeno de *Volatility Clustering* por medio de un modelo de varianza condicional al que denominó ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity). El gran éxito de este modelo se tradujo en el desarrollo de una amplia literatura que propone formas funcionales alternativas de la varianza condicional de las series. Dichas especificaciones de la varianza se conocen como la familia GARCH de modelos de volatilidad. Una gran variedad de formas funcionales de esta familia se discuten de manera breve en este artículo, destacando algunas de las limitaciones de cada modelo que han conducido al surgimiento de otros modelos GARCH.

Este artículo se estructura como sigue: en la primera sección se discuten, mediante un ejemplo ilustrativo, los ‘hechos estilizados’ propios de los retornos de las series financieras que han propiciado el surgimiento de los modelos estadísticos como los de la familia GARCH. En la segunda sección se presenta un breve panorama sobre varias versiones de modelos GARCH univariados y multivariados, enfatizando algunos de los problemas de cada modelo que derivaron en la especificación de otros modelos ‘mejorados’ de la misma familia. En la tercera sección se discuten algunas de las principales críticas que pueden hacerse a la familia de modelos GARCH y que abren el camino al desarrollo de nuevos modelos paramétricos que puedan capturar de mejor manera los ‘hechos estilizados’.

## 1. Características probabilísticas de las series de precios especulativos

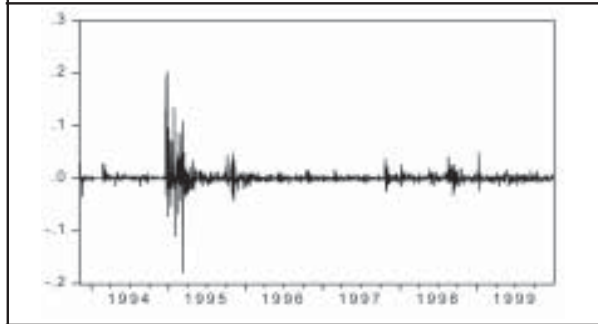
Con la finalidad de ilustrar las principales características probabilísticas de las series financieras (‘hechos estilizados’) que han conducido al desarrollo de nuevos modelos como los de la familia GARCH, presentamos un análisis gráfico de dichas regularidades presentes en las variaciones semanales del tipo de cambio peso/dólar para el periodo 1993-2005.<sup>3</sup>

Para tal efecto presentamos las gráficas de las ganancias y pérdidas cambiarias del tipo de cambio peso/dólar, de la distribución empírica de dichas variaciones (Silverman, 1986) y, finalmente, de la varianza recursiva de dichos retornos.

El análisis de las gráficas anteriores nos permite verificar la existencia de ciertas regularidades probabilísticas que se describen a continuación:

a) *Colas pesadas*. Las gráficas 1 y 2 revelan que los datos tienen una distribución leptokurtica con una gran concentración de puntos alrededor de la media, y la serie parece

**Gráfica 1.** Variaciones estandarizadas del tipo de cambio peso/dólar semanal (1993:11:08-2005:04:29).



tener más 'outliers' o valores extremos que los asociados a una distribución normal.

*b) Volatility clustering* Frecuentemente las series de retornos se caracterizan por cambios grandes que van seguidos por cambios grandes y por cambios pequeños seguidos por cambios pequeños como es posible verificar en la gráfica 1.

*c) Distribución simétrica en forma de campana.* La distribución de las ganancias y pérdidas cambiarias es similar a una campana simétrica (gráfica 2).

*d) El segundo momento recursivo no es convergente:* Mandelbrot detectó que si se estimaba el segundo momento de manera recursiva éste no converge hacia un valor específico (ver gráfica 3). Esto se asocia con la heterogeneidad de la varianza que está fuertemente asociado con los fenómenos de *volatility clustering* y las colas pesadas.

Existen otros hechos estilizados que no se pueden verificar en las gráficas anteriores, pero que son recurrentes en las variaciones de series financieras.

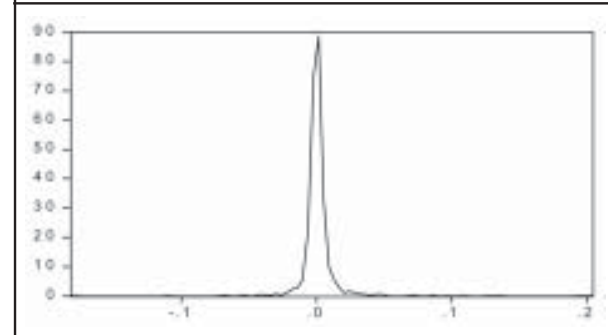
*e) Existe una tendencia a que los retornos están negativamente correlacionados con las variaciones en la volatilidad de los mismos.*

*f) Existen comovimientos en las volatilidades de diferentes activos.* Existe evidencia de que cuando las volatilidades de los precios se mueven en una dirección, entonces las volatilidades de otros activos se mueven en la misma dirección.

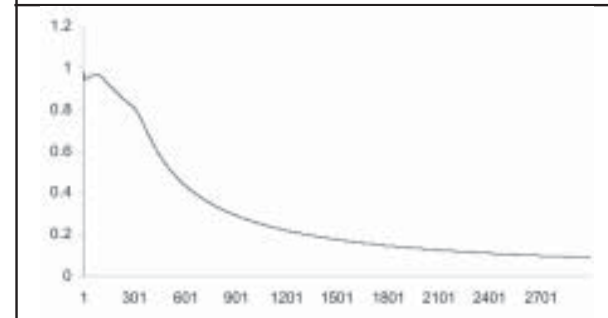
Estas mismas características se pueden observar en los gráficos 4, 5 y 6, que corresponde al Índice Promedio Industrial Down Jones semanal.

El análisis gráfico nos permite concluir que los modelos GARCH han sido más apropiados que los propuestos por Mandelbrot y otros autores debido a que capturan de manera adecuada las características probabilísticas discutidas en los incisos *a*, *b*, *c*, *d* y *e*. Mientras que los modelos GARCH multivariados capturan todas las características anteriores más la regularidad descrita en el inciso *f*. En la siguiente sección se presenta un breve recuento de los modelos de

**Gráfica 2.** Distribución empírica de los retornos cambiarios semanales peso/dólar (1993:11:08-2005:04:29)



**Gráfica 3.** Varianza recursiva muestral de los retornos cambiarios peso/dólar semanales (1993:11:08-2005:04:29).



tipo GARCH más sobresalientes, incluyendo el modelo ARCH de Robert Engle.

## 2. La familia de modelos GARCH

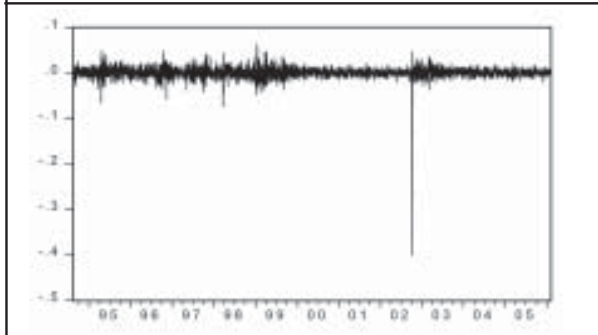
Los modelos GARCH fueron desarrollados para tomar en cuenta regularidades empíricas como el llamado *Volatility clustering* presente en las series de precios especulativos. La evolución de los modelos GARCH ha estado determinada no sólo por el afán de capturar las regularidades empíricas de los datos (descritas en la sección anterior), sino también por la necesidad de resarcir las carencias y defectos de los primeros modelos GARCH. Así que podríamos decir que cada nueva especificación GARCH resuelve problemas de modelos precedentes. En esta sección se presenta una muy breve descripción de la evolución de los diferentes modelos GARCH univariados y multivariados haciendo énfasis en sus mecanismos generadores de información y en las insuficiencias que motivaron el desarrollo de cada modelo.

### 2.1. Modelos GARCH univariados

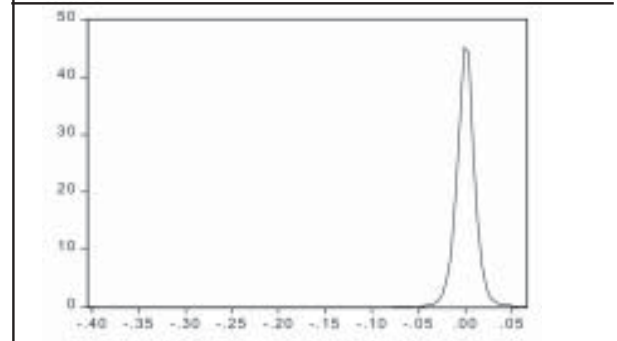
#### Modelo ARCH

Este modelo fue el primer intento de capturar el fenómeno de *volatility clustering* a través de la especificación de una

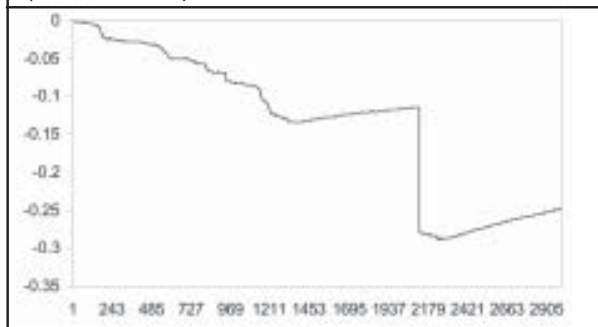
**Gráfica 4.** Variaciones estandarizadas del índice Down Jones semanal (1994:08:15-2005:02:16).



**Gráfica 5.** Distribución empírica del índice Down Jones semanal (1994:08:15-2005:02:16).



**Gráfica 6.** Varianza recursiva muestral del índice Down Jones semanal (1994:08:15-2005:02:16).



ecuación para la varianza condicional (Engle, 1982). El modelo propone una ecuación de regresión con errores que siguen un proceso ARCH para modelar la media y la varianza condicional de la serie de interés. La forma de la media condicional está dada por:

$$y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i y_{t-i} + u_t, \quad 1 > 0, \quad \frac{u_t}{F_{t-1}} \sim N(0, h_t^2) \quad [1]$$

donde  $F_{t-1}$  representa la historia pasada de la variable dependiente. La ecuación de la varianza condicional toma la forma:

$$h_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i u_{t-i}^2, \quad m \geq 1, \quad \frac{u_t}{F_{t-1}} \sim N(0, h_t^2) \quad [2]$$

donde las restricciones  $a_0 > 0$  y  $a_i \geq 0$  se requieren para asegurar que la varianza condicional sea positiva y se requiere que  $\sum_{i=1}^m a_i < 1$  para que la varianza condicional sea convergente.

#### Modelo GARCH

Posteriormente, se descubrió que el modelo ARCH necesitaba con frecuencia una estructura de rezagos muy larga de la varianza condicional para modelar la memoria de los datos. Para resolver este problema Bollerslev (1986) pro-

puso el modelo GARCH que permite capturar la memoria larga y se caracteriza por tener una estructura de rezagos más flexible. La varianza condicional en este modelo está especificada como sigue:

$$h_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \gamma_j u_{t-j}^2 \quad p \geq 1, \quad q \geq 1 \quad [3]$$

donde las restricciones  $a_0 > 0$ ,  $a_i \geq 0$ ,  $\gamma_j \geq 0$ , se requieren para asegurar que la varianza condicional sea positiva y se requiere que  $\sum_{i=1}^p a_i + \sum_{j=1}^q \gamma_j < 1$   $p \geq 1$ ,  $q \geq 1$  para que la varianza condicional sea convergente.

#### Modelo con distribución condicional t de student

Este modelo fue propuesto por Bollerslev en 1987 para capturar la leptocurtosis presente en los retornos de los activos financieros. El modelo propone reemplazar el supuesto de distribución normal de los errores por la distribución t de student. En este modelo la distribución de los errores es como sigue:

$$f\left(\frac{u_t}{y_{t-1}^p}\right) = \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(v+1)\right]}{\pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}v\right)} \left[(v-2)h_t^2\right]^{-1/2} \left[\frac{1+u_t^2}{(v-2)h_t^2}\right]^{-1/2(v+1)} \quad [4]$$

Este supuesto distributivo se incluyó con la finalidad de distinguir entre leptocurtosis condicional y heterocedasticidad condicional que posiblemente causan la kurtosis no condicional de los datos.

#### Modelo EGARCH

Los modelos ARCH y GARCH no capturan el hecho de que con frecuencia los retornos están negativamente correlacionados con las variaciones en la volatilidad de los mismos. Esto sucede porque en dichos modelos la varianza condicional se especifica sólo en términos de la magni-

tud de los residuales rezagados y se ignoran los signos. En respuesta a este problema surgieron los modelos asimétricos. Nelson (1991) introdujo el modelo EGARCH, el cual depende tanto de la magnitud como del signo de los residuales rezagados. La varianza condicional en este modelo es:

$$\ln(h_t) = a_0 + \sum_{i=1}^q \beta_i (\varphi y_t + \gamma[\eta_{t-i} - E|\eta_{t-i}]) + \sum_{i=1}^q \delta_i \ln(h_{t-1}) \quad [5]$$

donde  $\beta_i=1$ ,  $\eta_t = y_t/h_t$  y  $\varphi y_t$  representan la magnitud del efecto mientras que el término  $\gamma[\eta_{t-i} - E|\eta_{t-i}]$  representa el efecto del signo. Este modelo tiene dos características relevantes, la primera es que la positividad de la varianza condicional está asegurada dada la especificación logarítmica del modelo y que, además, esta especificación constituye una aproximación de algunos modelos continuos muy comunes en finanzas.

**2.2 Modelos GARCH multivariados**

*Vector GARCH*

En 1988, Bollerslev extendió la especificación del modelo GARCH univariado hacia una representación vectorial de la varianza condicional. El modelo GARCH multivariado fue propuesto como una solución al problema de que muchas variables económicas y financieras reaccionan a la misma información y por lo tanto tienen covarianzas distintas de cero. Esto es, la extensión al modelo multivariado es apropiada para capturar la dependencia temporal en las varianzas o covarianzas condicionales de las series. La especificación vectorial de la matriz de varianzas condicionales es la siguiente:

$$Vech(H_t) = vech(\Sigma) + \sum_{i=1}^q A_i (\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-i}') + \sum_{i=1}^p B_j (H_{t-j}) \quad [6]$$

donde Vech(.) es el operador que convierte matrices de (mxm) en vectores de  $\left( \binom{m(m+1)}{2} \times 1 \right)$  con los elementos debajo de la diagonal de la matriz  $\Sigma$  es una matriz positiva definida de (mxm) y  $A_i$  y  $B_j$  son matrices de  $\left( \binom{m(m+1)}{2} \right) \times \left( \binom{m(m+1)}{2} \right)$  que incluyen los parámetros del modelo.

*Diagonal GARCH*

El modelo GARCH multivariado, al igual que los modelos univariados, enfrenta serias limitaciones prácticas. En primer lugar, la matriz de varianzas condicionales H debe ser

positiva definida y, en consecuencia, deben imponerse al modelo un conjunto de condiciones complejas (restricciones) y difíciles de probar. Además la estimación de los modelos vectoriales implica la estimación de un enorme número de parámetros. Para corregir este último problema, Bollerslev, Engle y Wooldridge (1988) propusieron una especificación diagonal de la matriz de la varianza condicional. Esta especificación se resume en que cada elemento de la matriz puede escribirse como sigue:

$$h_{ijt} = \sigma_{ij} \varepsilon_{i(t-1)} \varepsilon_{j(t-1)} + b_{ij} h_{ijt(t-1)} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, m \quad [7]$$

La ganancia obtenida en esta especificación es que el número de parámetros se reduce obteniendo un modelo más parsimonioso.

*Especificación BEKK*

El modelo GARCH diagonal reduce el número de parámetros a estimar, pero impone restricciones muy complejas sobre los coeficientes y que la mayoría de las veces son difíciles de verificar. Además, dicha especificación no permite que la matriz de varianzas condicionales sea positiva definida como se requiere. Con la finalidad de asegurar que dicha matriz sea positiva definida, Engle y Kroner (1995) desarrollaron una forma cuadrática general para la ecuación de la varianza a la que llamaron BEEK. Esta especificación para el modelo GARCH multivariado es como sigue:

$$H_t = V' V \sum_{k=1}^q A_{ki} \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-i}' A_{ki}' + \sum_{k=1}^p B_{kj} H_{t-j} B_{kj}' \quad [8]$$

donde,  $V, A_{ik}$   $i=1,2,3,\dots,q$  y  $B_{jk}$   $j=1,2,3,\dots,q$  son todas matrices de (mxm). En esta formulación  $H_t$  es positiva definida si  $V'V$  también es positiva definida.

Los autores demostraron que esta representación es tan general que incluye todas las especificaciones diagonales y positivas definidas de la matriz de varianzas condicionales.

*Modelo de Correlaciones Condicionales Constantes (CCC)*

En 1990 Bollerslev introdujo el modelo GARCH multivariado de correlaciones condicionales constantes para resolver el problema del exceso de parámetros de los modelos previos. Para ello, esta especificación se construyó bajo el supuesto de que las correlaciones condicionales no dependen del tiempo y cualquier variación de la matriz H se puede atribuir exclusivamente a la naturaleza cambiante de las varianzas condicionales. La especificación CCC redujo la sobreparametrización de los modelos previos y facilitó y simplificó las condiciones para que la matriz H



fuera definida positiva. La matriz de covarianzas en este caso puede representarse como sigue:

$$H_t = D_t \Gamma D_t \quad [9]$$

donde  $\Gamma$  es la matriz de correlaciones constantes en el tiempo y  $D_t$  es una matriz de (mxm) con las varianzas condicionales en la diagonal.

Esta especificación tiene el problema de que el supuesto de correlaciones constantes no se cumple para varias series financieras. Incluso existe evidencia de que las correlaciones cambian con el tiempo.

#### *Modelo de Correlaciones Condicionales Dinámico (DCC)*

Dado el problema de que las correlaciones varían en el tiempo, Engle (2002) introdujo un nuevo tipo de modelos GARCH multivariados que son capaces de estimar covarianzas que cambian en el tiempo, el cual es llamado Modelo de Correlaciones Condicionales Dinámico (DCC). Este modelo es una generalización del modelo CCC de Bollerslev (1990). La especificación de la matriz de varianzas es como sigue:

$$H_t = D_t \Gamma_t D_t \quad [10]$$

La diferencia con la especificación CCC es que la matriz de correlaciones varía en el tiempo.

### **3. La evidencia empírica y la familia de modelos GARCH**

La evidencia empírica disponible sobre los modelos GARCH en México y en América Latina es aún preliminar e incompleta. Sin embargo, existen varios elementos que permiten cuestionar o alertar sobre algunos problemas potenciales que presenta este tipo de modelos GARCH. En particular, en el análisis de los modelos GARCH es necesario identificar al menos los siguientes aspectos: en primer lugar, ¿cuál es el papel que han jugado las regularidades empíricas de las series financieras en el desarrollo de nuevos y más complejos modelos de volatilidad?; en segundo lugar, existen algunos problemas para capturar otras regularidades probabilísticas tales como la leptocurtosis de los datos, así como los problemas de especificación y estimación parsimoniosa de los parámetros; bajo estas consideraciones, ¿es posible que estas regularidades se puedan aproximar con la familia de los modelos GARCH?

La evidencia empírica analizada para el caso de la economía mexicana, confirma la dependencia de segundo

orden *Volatility clustering* en el proceso de inflación; es decir, la varianza de la inflación cambia en el tiempo, ésta sigue un proceso de tipo ARCH y otro proceso de tipo ARCH-M. También, existen comovimientos en la inflación, se pueden observar variables como el tipo de cambio y la oferta monetaria (M1) que son significativas para explicar los cambios en la serie inflacionaria, debido a que se mueven en la misma dirección (Hernández y Robins, 2002).

Así, el trabajo de Hernández, Reina y Allier (2003) realizan una prueba de eficiencia en forma débil a una muestra de series de tiempo de los precios de acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), utilizando un modelo ARMA-GARCH; encuentran que las series accionarias presentan ineficiencia y heteroscedasticidad. Por su parte Ramírez y Sandoval (2002) prueban la hipótesis de caminata aleatoria para los rendimientos nominales de una cartera de activos de alta bursatilidad con pesos iguales, asociada a una cadena de Markov de segundo orden. Los resultados señalan que la estructura de las probabilidades de transición de la cadena revelan la existencia de una fuerte correlación positiva en las probabilidades de transición, como causa de que es un patrón que se repite en el estado estacionario.

Asimismo, aplicaciones econométricas, utilizando modelos de volatilidad del tipo GARCH en el mercado bursátil chileno, describen modelos con distribución simétrica y en forma de campana que suelen ser relevantes al momento de evaluar el riesgo de activos financieros como bonos y acciones (Johnson, 2001).

Alonso y Arcos (2005), emplean series de la tasa cambio representativa del mercado y el índice general de la Bolsa de Valores de Colombia para ilustrar cuatro hechos estilizados: las series de precios siguen un camino aleatorio; la distribución de los rendimientos es leptocúrtica y exhibe colas pesadas; a medida que se calculan los rendimientos para periodos más amplios su distribución se acerca más a la distribución normal y los rendimientos presentan volatilidad agrupada. Estos hechos estilizados asombrosamente se encuentran presentes en la mayoría de las series de rendimientos (y precios) sin importar qué tipo de modelo o supuestos paramétricos se efectúen. Así, estos hechos estilizados deben ser entendidos como una restricción para cualquier modelo empírico y teórico que se emplee para explicar el comportamiento de los precios de los activos o medidas de volatilidad; sin embargo, concluyen señalando que estos hechos empíricos pueden ser empleados o no, para ratificar o descartar aproximaciones de la teoría económica a la explicación de la realidad.

En respuesta a la interrogante, Alonso y Arcos (2005) emplean diferentes métodos (paramétricos, no paramétricos y semiparamétricos) para estimar el VAR de un portafolio representativo de siete países latinoamericanos incluyendo a México. El resultado señala la inexistencia de un método que se comporte mejor que los demás. Este resultado muestra evidencia sobre la presencia de eventos extremos, ya que al momento de considerar acontecimientos al final de las colas (VAR con nivel de significancia del 1%) los métodos convencionales no tienen un correcto desempeño; debido a que, en general estos métodos tienden a sobrestimar la proporción de excepciones. Este hecho implica que es necesario estudiar con detalle los valores extremos de los rendimientos para estimar el VAR con una cobertura condicional y no-condicional adecuada.

En este mismo orden, De Jesús y Ortiz (2004) argumentan que los ingresos accionarios en los países desarrollados son sensibles a los movimientos en los niveles de los precios y las tasas de cambio. En tal investigación se presenta una relación positiva entre la inflación y los movimientos de los ingresos. Sin embargo, esta relación se atribuye a las propiedades estadísticas de las series que son conocidas como comovimientos en las volatilidades de los activos, cuando las volatilidades de los precios se mueven en una dirección, las volatilidades de otros activos se mueven en la misma dirección. En efecto, lo que se busca es que el comportamiento del mercado se vea reflejado en la medida de volatilidad utilizada y que ésta capte rápidamente los cambios producidos en los precios. De esta manera se puede estructurar el portafolio de la manera más conveniente con los objetivos de rentabilidad y riesgo establecidos; tal como señalan Gómez y Beltrán (2004) y Quintero (2003) en sus respectivas investigaciones sobre la selección óptima de portafolios en el mercado bursátil de Colombia.

Los resultados empíricos indican, que la familia de los modelos GARCH parecen tener problemas en seguir la marcha de la volatilidad 'realizada'; en cambio, los modelos de volatilidad estocástica a pesar de que presentan grandes complicaciones al realizar la estimación comparándolos con los modelos GARCH, permiten captar mejor la evolución de la dinámica de la volatilidad a lo largo del tiempo (García, Calvo y Meri, 2005). No obstante, la familia de los modelos GARCH permiten captar mejor en la mayoría de los casos la evolución dinámica de la volatilidad a lo largo del tiempo (Engle y Rangel, 2004).

Por último, las futuras investigaciones relacionadas con la modelación de la volatilidad de las series económicas o financieras implicarán el uso de una metodología que postule

un modelo adecuado tanto en términos estadísticos como teóricos (Spanos, 1986).

### **Consideraciones y comentarios generales en torno a los modelos de la familia GARCH**

En las secciones previas se discutió la evolución de los modelos de volatilidad haciendo énfasis en las especificaciones de la familia GARCH. Se argumentó que este tipo de modelos han sido exitosos por el hecho de que han logrado capturar una gran parte de las regularidades empíricas de las series de retornos financieros.

Sin embargo, existen algunos problemas que persisten en casi todas las especificaciones de los modelos GARCH. En primer lugar, no existe, hasta ahora, una justificación de teoría económica asociada a los modelos, por lo que las estimaciones son difíciles de interpretar.

En segundo lugar, la especificación de dichos modelos está basada en los rezagos de los residuos al cuadrado más que en las variables observables que componen el modelo. Además, para asegurar que la varianza condicional sea positiva definida se requiere imponer restricciones muy complejas a los coeficientes del modelo, las cuales son muy difíciles de verificar cuando el número de rezagos de la varianza condicional es muy grande.

En tercer lugar, aunque se supone que los dos primeros momentos condicionales provienen de la misma distribución conjunta, su modelación se hace por separado. Esto último es problemático ya que se ignora la interrelación que debe existir entre los dos conjuntos de parámetros de la distribución conjunta.

Finalmente, existe una contradicción cuando se asume normalidad de los residuales, pero se acepta que la varianza condicional es heterocedástica y se modela mediante un GARCH normal.

Debemos concluir que existe actualmente un gran espacio para realizar investigación en la modelación de la volatilidad financiera, económica o de cualquier otro tipo. Lo anterior se debe a que los modelos existentes todavía enfrentan dificultades serias como la falta de parsimonia, supuestos distributivos no claros, etcétera.

Para ello, se requiere contar con una metodología ordenada que sea capaz de guiar a los econometristas en el proceso de modelación empírica, y que permita llegar al mejor modelo tanto en términos estadísticos como teóricos (Spanos, 1986). Dicha metodología debe contemplar el importante papel que juegan las regularidades empíricas para capturar y reproducir el comportamiento de las series en cuestión.



- Alonso, J. y A. Arcos  
 \_\_\_\_\_ (2005a). *Hechos estilizados de las series de rendimientos: una ilustración para Colombia*. Universidad Icesi. <http://www.icesi.edu.co/~jcalonso/Contact/4Hechos.pdf>
- \_\_\_\_\_ (2005b). *Valor en riesgo: evaluación del desempeño de diferentes metodologías para 7 países latinoamericanos*. Universidad Icesi. <http://www.icesi.edu.co/~jcalonso/Contact/VaRevaLat.pdf>
- Andreou, E.; N. Pittis & A. Spanos (2001). "On Modeling Speculative Prices: The Empirical Literature", *Journal of Economic Surveys*. Vol. 15. April.
- Bachelier, L. (1900). "Théorie de la Spéculation", *Annales de l'École Normale Supérieure* Series 3, 17.
- Bollerslev, T.  
 \_\_\_\_\_ (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 31.
- \_\_\_\_\_ (1987). "A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return", *Review of Economics and Statistics*, 69.
- \_\_\_\_\_ (1988). "On the Correlation Structure for the Generalized Conditional Heteroskedastic Process", *Journal of Time Series Analysis*, 9.
- \_\_\_\_\_ (1990). "Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model", *Review of Economics and Statistics*, 72.
- \_\_\_\_\_ and J. M. Wooldridge (1992). "Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances", *Econometric Reviews*, 11.
- Cabello, A.; R. De Jesús y E. Ortíz (2004). "Inflation, Exchange Rates and Stock Returns in the Emerging Capital Markets from Brazil and Mexico 1968-2002", *Memoria del IX Foro de Investigación: Congreso Internacional de Contaduría, Administración e Informática*. Universidad Nacional Autónoma de México, México.
- Cowles, A.  
 \_\_\_\_\_ (1933). "Can Stock Market Forecasters Forecast?", *Econometrica*. Vol. 1, No. 3.
- \_\_\_\_\_ & H. E. Jones (1937). "Some a Posteriori Probabilities in Stock Market Action", *Econometrica*. Vol. 5, No. 3.
- Engle, R. F.  
 \_\_\_\_\_ (1982). "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica*. Vol. 50, No. 4.
- \_\_\_\_\_ (2002a). "Dynamic Conditional Correlation-A Simple Class of Multivariate GARCH Models", *Journal of Business and Economic Statistics*, No. 20.
- \_\_\_\_\_ (2002b). "New Frontiers for ARCH Models", *Journal of Applied Econometrics*, 17.
- \_\_\_\_\_ & K. F. Kroner (1995). "Multivariate Simultaneous Generalized ARCH", *Econometric Theory*, No. 11.
- Fama, E. F. (1965). "The Behaviour of Stock-Market Prices", *Journal of Business*, No. 38.
- García, M. C.; M. Calvo y E. Meri (2005). *Estimación de modelos de volatilidad estocástica en series de rendimientos bursátiles*. Universidad Complutense de Madrid. España.
- Gómez, F. y F. Beltrán (2004). *Control de riesgo en portafolios mediante el uso de opciones sobre modelos de volatilidad estocástica*. Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.
- Hernández, A.; F. Reina y H. Allier (2003). "La eficiencia en forma débil y el poder predictivo de los modelos ARMA-GARCH", *Mexican Journal of Economic and Finance*
- Hernández, N. & R. Russell (2002). "An Application of ARCH and ARCH-M models to Study Inflation in México from 1976 to 1999", *Mexican Journal of Economic and Finance*
- Johnson, C. (2001). "Value at Risk: Teoría y Aplicaciones", *Estudios de Economía*. Gerencia de Investigación Económica. Banco Central de Chile, Santiago, Chile.
- Kendall, M.J. (1953). "The Analysis of Economic Time Series, Part I: Prices", *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, No. 96.
- Lanteri, L. (2005). *Efectos asimétricos de la incertidumbre en la inflación y en la actividad económica real: el caso argentino*. Banco Central de la República Argentina.
- Mandelbrot, B. (1963). "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, 36.
- Nelson, D. B. (1991). "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach", *Econometrica*, 59.
- Quintero, A. (2003). *La importancia de la volatilidad en la selección óptima de portafolios*, Bogotá, Colombia.
- Ramírez, J. y R. Sandoval (2002). "¿Existen componentes pronósticables en las series de los rendimientos de las acciones?", *Mexican Journal of Economic and Finance*
- Engle, R. & G. Rangel (2004). *The Spline GARCH Model for Unconditional Volatility and its Global Macroeconomic Causes*. [http://www.cnb.cz/en/research/research\\_publications/cnb\\_wp/download/cnbwp\\_2005\\_13.pdf](http://www.cnb.cz/en/research/research_publications/cnb_wp/download/cnbwp_2005_13.pdf)
- Sandmann, G. & S. J. Koopman (1998). "Estimation of Stochastic Volatility Models via Monte Carlo Maximum Likelihood", *Journal of Econometrics*. Vol. 87. September.
- Spanos, A. (1986). *Statistical Foundations of Econometric Modeling*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Taylor, S. (1994). "Modeling Stochastic Volatility: a Review and Comparative Study", *Mathematical Finance*. Vol. 4. No. 2.
- Working, H. (1934). "A Random-Differences Series for Use in the Analysis of Times Series", *Journal of American Statistical Association*, No. 26.