Juan E. Nápoles Valdes, Arturo González Thomas

La mecánica clásica, ¿es cierto o es probable?

Ciencia Ergo Sum, vol. 12, núm. 2, julio-octubre, 2005, pp. 175-185,
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Ciencia Ergo Sum,
ISSN (Versión impresa): 1405-0269
ciencia.ergosum@yahoo.com.mx
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Ensayo

La mecánica clásica, ¿es cierto o es probable?

Juan E. Nápoles Valdes* y Arturo González Thomas**

Prefiero que mi mente se abra movida por la curiosidad,
a que se cierre movida por la convicción
G. Spence

Recepción: 22 de septiembre de 2004
Aceptación: 12 de diciembre de 2004

***Universidad de la Cuenca del Plata.**
Lavalle 50, (3400) Corrientes, Argentina y Universidad Tecnológica Nacional. French 414 (3500). Resistencia, Chaco, Argentina.
Correo electrónico: idic@ucp.edu.ar y jnapoles@utn.edu.ar
**** Universidad Tecnológica Nacional.**
French 414 (3500). Resistencia, Chaco, Argentina.
Correo electrónico: gthomas@frre.utn.edu.ar
Los autores agradecen los comentarios y sugerencias de los árbitros, que permitieron mejorar la versión original.

Resumen. Este trabajo presenta un análisis histórico-lógico de la noción de caos en relación con el problema del determinismo, y su entrecruzamiento a lo largo del desarrollo del pensamiento científico del hombre. Para ello, se presentarán los fundamentos teóricos generales de la Teoría del Caos, desde un punto de vista histórico, pero siguiendo un enfoque problémico, y se elucidarán los distintos sentidos que ha adoptado el predicado 'determinista' en la historia de la ciencia en general, y de la matemática en particular.
Palabras clave: teoría del caos, determinismo, historia de la ciencia, historia de las matemáticas.

Classical Mechanics: Certainty or Probability?

Abstract. This work presents an historical-logical analysis of the notion of Chaos in relation to the problem of Determinism, and examines their interweaving throughout the development of human scientific thought. The article begins with the theoretical foundations of the Theory of Chaos from an historical point of view, then follows a problematic approach, and next elucidates the distinct significations that Determinism has adopted throughout the History of Science in general and of Mathematics in particular.
Key words: Chaos theory, Determinism, History of Science, History of Mathematics

Introducción

De la misma manera que puede decirse hoy que las dos ideas centrales del paradigma científico del siglo XIX fueron 'evolución' y 'entropía', así también puede decirse que las dos ideas centrales del paradigma científico del siglo XX han sido 'relatividad' e 'incertidumbre'. Sin embargo, la proximidad de estos conceptos científicos a nociones corrientes del lenguaje ordinario, de la teoría del conocimiento en general y de la filosofía moral en particular, ha ocasionado no pocos malentendidos que conviene aclarar. Para ello nos remontaremos a los orígenes del término 'incertidumbre' y, en particular, a los de 'caos' y 'orden', para plantear el problema de este conocimiento científico en el siglo XXI, en particular la acepción 'caos determinístico', tan en boga hoy.

Desde sus inicios, el pensamiento griego se preguntó por el origen de las cosas. El mundo visible, a través de su permanencia y a pesar de su multiplicidad, manifestó una unidad matemática y una belleza y grandeza tal, que el paso del mito al logos fue inevi-

Durante mucho tiempo, la ciencia ha hecho suyo el credo de que detrás de los desórdenes aparentes de la naturaleza siempre existe un orden escondido.

table. Durante el siglo V a. C. el pensamiento mítico dejó su sitio a las causas naturales.

Durante mucho tiempo, la ciencia ha hecho suyo el credo de que detrás de los desórdenes aparentes de la naturaleza siempre existe un orden escondido. Predecesores de esta filosofía son los pitagóricos y Platón.[1] Para este último, el estado ideal del cosmos (ver la nota 3 para una mejor comprensión de las palabras de Platón) es cuando cada cosa está en su lugar. Interpreta la racionalidad del cosmos como el resultado de una operación efectuada por un poder ordenador, una figura semimística a la que llama Demiurgo, especie de obrero que ordena el desorden al crear el cosmos, palabra que significa en primer lugar ''belleza, arreglo, orden'' y, en segunda instancia, ''mundo'', es decir, ''orden del mundo''. Dice Platón:

> Con todo aquello en desorden, el Dios insertó proporciones en cada cosa respecto de sí y respecto de los demás, esas simetrías eran tan abundantes como fue posible y se encontraban en las cosas ajustadas según proporción y medida común [...] todas esas partes primero fueron ordenadas y luego se constituyó con ellas ese todo, viviente único que contiene en sí mismo a todos los vivientes mortales e inmortales (Platón, 1996).

Podemos afirmar que la ciencia ha estado influida durante muchos siglos por los conceptos de Platón, quien delinea tres niveles principales de jerarquización. En el nivel superior se encuentran las ideas y formas matemáticas que constituyen los modelos ideales de todas las cosas. Es el dominio del orden. Al otro extremo se encuentra el caos, estado primordial carente de orden, que escapa a toda descripción.

Entre esos dos niveles está nuestro mundo, resultado del trabajo del Demiurgo, que tiene un poco de orden y desorden. Aunque idealmente es ordenado y obedece a leyes deterministas, no está exento de carácter aleatorio. Uno de los postulados que ha regido la ciencia afirma que existen regularidades en la sucesión temporal de los eventos que ocurren en el universo material y en algunas características mensurables de los sistemas materiales relativamente aislados, cuando están en equilibrio.

El mundo era entonces un enorme sistema, magnífico organismo en el que sus partes se entretejían hacia la totalidad. Los principios de las cosas, las normas que las regían, fueron preocupación de la filosofía griega. Eran los tiempos de las grandes concepciones, las leyes que abarcaban al ser y al suceder, eran los días en que una idea vendría a dar coherencia al mundo. Dicha idea, el orden, tuvo en Anaximandro[2] su principal expositor.

Para este pensador, el principio de todas las cosas está en el *apeirón*, lo indeterminado; de él surge el mundo, al que por primera vez llama cosmos,[3] término que hasta entonces había tenido un sentido social o, como en Homero, referido a la formación de hermandades en la lucha armada. Esta noción de orden había surgido después que varias generaciones en todo el mundo antiguo habían presenciado el carácter cíclico de los movimientos celestes. Todo esto despertó en el hombre antiguo la creencia de una certeza en los

---

1. Filósofo griego, hacia 428 a. C. al 347 a. C.), uno de los pensadores más originales e influyentes en toda la historia de la filosofía occidental. La figura de Platón resulta indispensable para la comprensión de la historia del pensamiento occidental. Funda en el año 387 a. C. la Academia, pensada según el modelo de las sedes pitagóricas de las cuales es heredera. La dialéctica constituyó uno de los principales campos de investigación. Otro campo de investigación lo constituyó la construcción matemática–astronómica del cosmos. La Academia se convirtió en la sede de la matemática griega donde brillaron hombres como Teeteto y Eudoxio de Cnidos (400-347 a. C.). En su frontispicio figuraba la siguiente inscripción: "Nadie entre aquí sin saber geometría". El estudio de las diferentes partes de las matemáticas (geometría, aritmética y teoría de los números) conformaba la propedéutica necesaria a la dialéctica.
2. Anaximandro de Mileto, hijo de Praxíades, compañero y discípulo de Tales, según las *Crónicas* de Apolodoro (Laercio, 1985), tenía 74 años en el segundo año de la Olimpíada 58 (547–46 a. C.) y murió poco después. Desarrolló, como crítica a la filosofía de Tales, las ideas filosóficas siguientes: *a*) El *ápeiron*. Según las fuentes procedentes de Teofrasto, Anaximandro habría afirmado que el principio de todas las cosas existentes no es ninguno de los denominados elementos (agua, aire, tierra, fuego), sino alguna otra naturaleza ápeiron (indefinido o infinito) (Simplicio, 1940); *b*) El cosmos. Del seno del ápeiron eterno se segrega un *gónimos*, germen de los elementos opuestos (Ps. Plutarco, *Strom*. 2). El *ápeiron* se determina en un orden de elementos contrarios (*cosmos enantiológico*). Este cosmos es un cosmos dinámico y temporal que tiene su origen y su fin en el ápeiron, y *c*) La pluralidad de mundos.
3. Pudiera suscitar algunas dudas el uso del término cosmos en Anaximandro; dado que los textos a él atribuidos proceden de comentadores muy posteriores, a partir de Aristóteles, sin embargo, lo mantenemos apoyándonos en los helenistas, quienes suelen suponer que este término ha pasado por la siguiente evolución en filosofía: *a*) orden y disposición, ornamento (siglo VI a. C.); *b*) el orden en el mundo; *c*)

acontecimientos de los cielos y la búsqueda de un lenguaje que la describa y dé principios que la expliquen.

De la naturaleza de las cosas, obra cumbre de Lucrecio (1968),[4] se presenta como un tratado de física atomista. Usualmente hemos visto en él un texto donde prima lo absurdo y, por tanto, sólo es posible una lectura metafórica, interpretarlo como un poema filosófico. Hoy esta conclusión no es tan categórica, se trata de suspender la oposición entre ciencia y poesía.

El universo lucreciano se inicia en el caos, un estado donde sólo existe el desorden en la materia y la energía, un paisaje donde sólo existen elementos sólidos que se desplazan en un medio fluido. Dos modelos coexisten: la catarata de átomos que caen libremente en el vacío, fluyendo a lo largo de trayectorias paralelas, y la nube caótica, masa desordenada, fluctuante, de disimilitudes y oposiciones, de intervalos sin eventos, de colisiones al azar (véase Serres, 1997: 9-83).

El modelo lucreciano de turbulencias habla no sólo del espacio y la materia, sino también del tiempo. Aquí y allá, aleatoriamente, surge un vórtice en tanto que otro desaparece. Es como si la física atomista se asomara a los principios fundamentales de la termodinámica moderna: por una parte la entropía o degradación irreversible de la energía (información) y, por el otro, la invarianza de fuerzas o energías. La de Lucrecio es una física nueva, en lo que lo global tiene en cuenta lo local, lo previsible asume lo imprevisible; es un discurso que asume cierto equilibrio general en un universo estocástico.

La experiencia enseña que rara vez flujos paralelos, también llamados laminares, mantienen dicha condición; siempre se alcanza un estado de mayor o menor turbulencia siguiendo líneas que se enredan, lo que genera formas que giran una y otra vez, y plasman imágenes de vórtices o remolinos. Desde Epicuro hasta Lucrecio, el movimiento turbulento constituye el instrumento primitivo de construcción, y la cuestión esencial del atomismo es revelar cómo surge la rotación, cómo se forman los vórtices. El vórtice conduce al aumento de la entropía, revela la irreversibilidad del tiempo y, sin embargo, en el universo hay una permanencia: a la degradación de una cosa corresponde el nacimiento de otra, una declinación anuncia el surgir de una turbulencia.

En los inicios del siglo XVI, las concepciones galileanas iniciaban la ruta victoriosa que culminaría en Newton. En particular, muchas de las cuestiones que apelaban a criterios cualitativos, o a argumentos relacionados con el esclarecimiento de las causas aristotélicas, fueron sustituidas por la filosofía mecanicista. Explicarían la constitución del mundo y sus fenómenos en términos de partículas y las colisiones entre ellas. Lo único que existía eran átomos y el vacío, y lo que ocurría derivaba única y exclusivamente de los movimientos de los átomos en el vacío. Este enfoque tuvo su triunfo.

El objetivo de este trabajo es brindar un análisis histórico-lógico de la noción de caos en relación con el problema del determinismo, y su entrecruzamiento a lo largo del desarrollo del pensamiento científico. Para ello, se presentarán los fundamentos teóricos generales de la Teoría del Caos, desde un punto de vista histórico, pero siguiendo un enfoque problémico, y se elucidarán los distintos sentidos que ha adoptado el predicado ‘‘determinista’’ en la historia de la ciencia en general, y de la matemática en particular.

1. El comienzo

Durante la mayor parte de la historia de la ciencia fue común representar los procesos mediante aproximaciones lineales (es decir por ecuaciones de primer grado o líneas rectas), cuya simplicidad las hace de resolución relativamente fácil. De hecho, antes de la era de la computadora, la linealización de los modelos era, en la mayoría de los casos, la única posibilidad de obtener soluciones explícitas. La difusión de la computadora como instrumento cotidiano del trabajo científico permitió afrontar problemas para los cuales la linealización resulta una simplificación excesiva, y ocasionó, como consecuencia lógica, que el mundo científico –en particular los físicos– comenzara a investigar fenómenos no lineales, a menudo con comportamientos muy distintos de los lineales.

Los sistemas dinámicos (es decir, que evolucionan en el tiempo) lineales habían sido estudiados con mucho detalle por los matemáticos, pero los no lineales comenzaron a serlo –con un número rápidamente creciente de cultores– desde hace no más de unos treinta años.

---

el mundo con un orden (siglo V a. C.); *d*) el mundo o el universo en general (segunda mitad del siglo V a. C.), de modo que el lenguaje de la época de Anaximandro más bien consideraría el *a*), mientras que los otros sentidos irían apareciendo posteriormente, *e. g.* a partir de Heráclito y de Anaxágoras.

4. Tito Lucrecio Caro fue un poeta y filósofo romano (hacia 98 a. C. al 55 a. C.), contemporáneo de Julio César y Cicerón. Fue un seguidor de Epicuro y de los atomistas griegos. En su poema “De rerum natura” (“De la naturaleza...”) expuso una visión mecánica del universo recogiendo y embelleciendo las ideas de ellos. Aunque el interés de Lucrecio no era el problema físico, sino la exposición de una filosofía determinada, en su obra describe la naturaleza y expone sus teorías sobre el comportamiento de la materia: el viento, el calor, el frío, el fuego, el color de las cosas, el trueno y los relámpagos, los volcanes, etc. Brevemente, para Lucrecio, toda la naturaleza se compone de dos cosas: “los cuerpos y el vacío en el que éstos están situados y en cuyo seno se mueven”.

Son especialmente atractivos para los especialistas los sistemas no lineales inestables, en los cuales pequeños cambios del estado inicial producen grandes alteraciones de los resultados, tan grandes que, a partir de cierto punto, se pierde el control de las trayectorias de las variables y no puede predecirse su comportamiento, aunque las ecuaciones diferenciales que lo rigen estén perfectamente especificadas.

Estos sistemas se denominan, usualmente, sistemas caóticos, y se ha acuñado la expresión *caos determinístico* para reflejar concretamente la situación que describe el párrafo anterior. Comentemos que las condiciones iniciales nunca están suficientemente especificadas: o provienen de cálculos más o menos razonables, como muchas veces sucede en economía; o son medidas con instrumentos cuya precisión, por alta que fuese, siempre tiene un límite. Nunca pueden introducirse en la computadora datos de mayor precisión que la suya cuando representa números reales: si la sensibilidad del modelo supera la precisión de la computadora o de los instrumentos de medición, la trayectoria de las variables será indeterminada.

¿Qué clase de indeterminación es ésta? En algún sentido, se está en una situación parecida a la de los números seudoaleatorios, aunque en el segundo caso se sabe que la serie es determinística y fue construida para que parezca aleatoria, mientras que con los sistemas dinámicos no lineales inestables, debido al tipo de modelo, va perdiéndose información; en realidad el efecto de la indeterminación en los valores iniciales se magnifica a medida que el sistema evoluciona y se llega a un alto grado de desorden. La situación es análoga a la de otros modelos inestables pero no necesariamente dinámicos; la diferencia es que en ellos se conoce que la inestabilidad proviene del modelo, mientras que en el caos determinístico se ignora si la inestabilidad se origina en el modelo o en el método numérico.

La mecánica es la más antigua de las ciencias físicas. Los escritos más antiguos que se registran acerca de esta materia son los de Arquímedes (287-221 a. C.), referentes al principio de la palanca y al del empuje.[5] A la formulación de las leyes de la composición vectorial de fuerzas planteada por Stevin (1548-1620) aguardaba un progreso sustancial, y el mismo autor enunció la mayoría de los principios de la estática. El primer tratado de un problema dinámico se debe a Galileo (1564-1642), se refiere a los experimentos sobre la caída de los cuerpos, aunque debemos considerar un precursor importante: Copérnico (1473-1543), quien con su sistema heliocéntrico sentó las bases de una nueva ciencia, la mecánica celeste.[6]

Hacia finales del siglo XVII y principios del XVIII, la concepción del universo cambia, debido en gran medida a los aportes tanto matemáticos como metodológicos de ese genio singular que fue Isaac Newton (1642-1727). Se ve que la naturaleza tiene ciertas regularidades que pueden analizarse y predecirse. De hecho, la ciencia en el siglo XVIII estableció tantas leyes que gobiernan fenómenos naturales, que muchos pensaron que era poco lo que quedaba por descubrir. La tarea de los científicos era dilucidar las repercusiones de estas leyes en el ámbito de los fenómenos particulares.

Uno de los principales logros de este siglo fue establecer ecuaciones para modelar fenómenos físicos, aun cuando no hubo grandes éxitos al tratar de resolverlas. Basta como ejemplo citar a Euler (1707-1783):

> Si no nos está permitido alcanzar el entendimiento completo del movimiento de un fluido o de la mecánica o los principios conocidos del movimiento, no es a ellos a los que debemos culpar. Es el análisis que nos muestra su debilidad en este respecto (Euler, 2001: 113).

Por otra parte, los notables avances en la solución de las ecuaciones diferenciales (en los cuales Euler tuvo no-

---

5. Puede que un rigorista alegue que Arquímedes trata más bien con la estática matemática, y puede que si se tomara "mecánica" en un sentido genérico, serían anteriores algunas ideas de Aristóteles y quizá un escrito de la escuela aristotélica sobre Problemas –o cuestiones– físicos o mecánicos. Nuestra afirmación se basa en que Arquímedes es el principal sistematizador de estos estudios en la antigüedad y el que los aplica a problemas geométricos y estáticos (mecánicos); puede consultarse al respecto Arquímedes (1986). Por otra parte, no somos los únicos en proclamar la existencia de un mecánico en los tiempos griegos. Pastor y Babini (1986: I, 62) afirman: "[...] Arquitas de Taras (Tarento), estadista científico que se ocupó de Mecánica Teórica y práctica (autómatas), de aritmética (progresiones y proporciones) y de geometría[...]". Si faltaran otras razones para clasificar a Arquímedes como el primer mecánico, pueden consultarse detalles adicionales en Pastor y Babini (1986: 89-97).
6. Sir Arthur Eddington observaba que uno de los grandes misterios del universo consiste en que todo en él rota. En la época del astrónomo polaco, la astronomía geocéntrica llevaba reinando más de mil años, cierto es que prelados instruidos advertían que la Semana Santa llegaba demasiado pronto en el calendario anual y unos pocos astrólogos sabían que la posición de los planetas divergía a veces, en varios grados, de la que podía preverse con las tablas de Ptolomeo. El sistema heliocéntrico (que se remonta a Aristarco de Samos en el siglo III a. C.) resolvió estas y otras dificultades, y la publicación de la obra de Copérnico De *revolutionibus orbium coelestium* (1543) abrió el camino de la verdad celeste por la que transitarían más adelante Kepler, Galileo, Newton, Poincaré y muchos más.

table incidencia) hacían pensar que los problemas no resueltos, tales como el movimiento de los tres cuerpos bajo la influencia de la gravedad, eran excepciones.

En 1750 Lagrange[7] tomó las ideas dinámicas de Euler y reformuló la dinámica. Dos ideas importantes se desprenden de su trabajo: la primera fue el principio de conservación de la energía y la segunda, introducir coordenadas generalizadas en el formalismo de la mecánica, que le permitió interpretarla desde diversos puntos de vista de la matemática y le posibilitó obtener sus famosas ecuaciones diferenciales para describir la evolución de los sistemas mecánicos. Más tarde, William Rowan Hamilton (1805-1865) replanteó la dinámica de un sistema, lo cual logró una mayor generalidad; para ello, utilizó los principios del cálculo variacional y dotó a la mecánica teórica de una concepción intrínseca que superaba la desarrollada antes por Lagrange. La formulación hamiltoniana de la mecánica tiene como referente la anterior formulación lagrangiana, que consideraba como variables independientes no solamente las coordenadas generalizadas, sino también los momentos o ímpetus asociados; este es lo que Hamilton llamó el ''espacio de las fases''.

Se pensó entonces que era posible describir la naturaleza con un conjunto pequeño de leyes. Ellas, como regla general, eran establecidas en términos de ecuaciones diferenciales. Dado un estado natural del sistema en un tiempo determinado y las leyes que lo describen, se consideraba que en principio podía determinarse con toda precisión todo estado futuro.

Por desgracia, estas consideraciones de carácter general pronto mostraron su debilidad al intentar reducir las divergencias entre la teoría y la práctica. El uso de la teoría newtoniana para calcular las órbitas planetarias requirió mucho trabajo y esfuerzo por parte de los más grandes científicos de los siglos XVIII y XIX, desde Euler a Lagrange, pasando por Laplace y Hamilton, y culminando con Poincaré. Todos estos aportes vinieron a conformar lo que se conoció con el nombre de mecánica celeste y que, como decíamos antes, fue anticipada por Copérnico. Esta disciplina tendría como objetivo estudiar uno de los problemas más difíciles de la física y las matemáticas, el llamado problema de los *N* cuerpos (en nuestro caso el Sol y los planetas) que interactúan gravitacionalmente.

Retornemos a Newton. Él presentó sus leyes en forma matemática, las llamadas Leyes (más bien ecuaciones) de Newton que, junto con la ley de la gravitación universal, fueron suficientes para describir el movimiento de los cuerpos del sistema solar.

Después de Newton, un buen número de científicos se ocupó en deducir otras consecuencias de sus ecuaciones. Sin embargo, lo que efectivamente hizo el científico inglés fue considerar solamente el sistema compuesto por el Sol y un solo planeta. Así obtuvo, al resolver las ecuaciones que había propuesto, las tres leyes de Kepler. De esta manera, demostró que cada planeta gira alrededor del Sol siguiendo indefinidamente una trayectoria elíptica.

De hecho, lo que Newton suponía es que el efecto de los demás planetas sobre el que estaba estudiando era ínfimo. Puede pensarse que esta suposición es adecuada, ya que la masa de cualquier planeta es muchísimo menor que la del Sol, cuya influencia es preponderante sobre cualquiera. Por tanto, resolvió lo que se llama el sistema de los cuerpos: el Sol y un planeta, y demostró que este sistema es estable.

Si se añade un segundo planeta al sistema en estudio tendremos un sistema de tres cuerpos atrayéndose mutuamente. En este caso, cada planeta ya no sigue rigurosamente una órbita elíptica. Es cierto que el efecto de un planeta sobre el otro es mucho más pequeño que el del Sol, apenas una pequeña perturbación. Cada planeta continúa girando alrededor del Sol siguiendo su órbita muy parecida a una elipse. Su trayectoria exacta depende de su distancia del otro planeta, pues resulta afectado en distintos instantes por una fuerza gravitacional distinta. Estas perturbaciones distorsionan la trayectoria elíptica que tendría si sólo existiera el Sol.

Las ecuaciones de Newton, al tomar en cuenta las fuerzas gravitacionales entre tres cuerpos, no han podido ser resueltas en forma exacta hasta el día de hoy. Por tanto, no puede describirse y precisarse la trayectoria que seguirá cada cuerpo durante todo el tiempo.

El problema se vuelve mucho más complicado si se añade otro planeta más; y cada vez que se añade otro, el asunto se complica todavía más. Lo más que se ha logrado es prever, en primer lugar, los efectos más importantes, como el de la influencia preponderante del Sol, y luego, paso a paso, ir tomando en cuenta las influencias, menos importantes, de los demás planetas. Existe la esperanza de que este tipo de aproximaciones vaya llevando gradualmente a la solución exacta. Sin embargo, al aplicar este procedimiento al sistema solar, resulta que se requieren cantidades extraordinarias de cálculos, lo que limita su utilidad como instrumento matemático; por ejemplo, si se desea saber qué ocurriría con el sistema solar dentro de algunos miles de millones de años, o mirar hacia atrás para tratar de descubrir sus orígenes.

7. Detalles de la vida y obra de Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), matemático francés, considerado uno de los dos matemáticos más grande del siglo XVIII, pueden revisarse en la página http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Lagrange.html

No obstante, para fines del siglo XIX se había alcanzado un grado tal de precisión en estos estudios, que el descubrimiento de una discrepancia de menos de un minuto, a lo largo del siglo, en el movimiento aparente de Mercurio, causó una crisis de tal magnitud, que sólo se dilucidó completamente, a los pocos años, con la t*eoría especial de la relatividad*.[8]

A fines del siglo XIX la ciencia se movía entre dos distintos paradigmas para la modelación matemática. Uno, el ya conocido análisis por medio de las ecuaciones diferenciales que en un principio determinan la evolución del universo, pero que en la práctica sólo se aplica a problemas simples y bien estructurados. El segundo, el análisis estadístico que representaba una aproximación burda del movimiento de sistemas complejos. Estos dos paradigmas habían alcanzado respetabilidad en el mundo científico de la época.

Por otra parte, en el estudio de ciertos sistemas físicos, resulta interesante, y casi siempre necesario, conocer propiedades (de las soluciones de la ecuación o sistema que modela tal sistema) tales como acotamiento, estabilidad, periodicidad, etc., sin tener que recurrir a la ardua y laboriosa tarea, que en muchos casos es impracticable, de encontrar expresiones analíticas para las soluciones. De este modo, surgió el problema de investigar las propiedades de las soluciones de una ecuación diferencial a partir de su propia 'expresión'. Esto dio lugar a la t*eoría cualitativa* de las ecuaciones diferenciales, teoría que surge asociada a los trabajos de Poincaré y Liapunov.

En sus inicios, Poincaré y Bendixon demostraron que para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de dos dimensiones, el comportamiento de las soluciones puede clasificarse geométricamente en cuatro casos relativamente sencillos. En nuestros días, y gracias al uso de las computadoras, al intentar clasificar y entender las representaciones gráficas de la dinámica de un sistema que se mueve en tres dimensiones, aparece ante nosotros una fuente de formas exóticas que se han denominado *fractales*, entes con dimensión fraccionaria, no entera.[9]

2. La ascensión de la mecánica clásica

Galileo según prevalecía en el Medioevo no consideraba que el movimiento posee la facultad de generar calor, su mecánica de sólidos sólo tenía en cuenta el desplazamiento en el vacío.

De Heráclito es rescatable un fragmento (Verneaux, 1982: 9) célebre donde señala que "el conflicto es el padre de todas las cosas". De aquí puede entreverse la idea de que en ocasiones no existe una única causa de los fenómenos, visión que no era compartida por Galileo y sus sucesores, lo que procedía era buscar una única razón.

Más incomprendido aún que los anteriores pensadores, Lucrecio, en su *De rerum natura* ya citada, presenta una fenomenología del acontecer natural que lo pone fuera de toda comparación o conmensurabilidad, como dirían algunos metodólogos modernos como Drago (1986), con la propuesta galilea y la newtoniana. La física de Lucrecio es una física de lo acuoso y del equilibrio –y del alejamiento o caída hacia él–, en la que con algo de imaginación y buen oficio podríamos retomar a los átomos lucrecianos como los vórtices en el agua, y al clinamen, la supuesta desviación fortuita e infinitesimal de la línea recta, como la derivada. Sin embargo, para los propósitos de Lucrecio, esto no resulta necesario; su enfoque explicativo se remite a las formas y su generación y desaparición, y el peso de su discurso está del lado de lo cualitativo.

Los fenómenos en que se ocupa Lucrecio son el trueno, el relámpago, las nubes, el arco iris, los terremotos, las aguas de los ríos y mares, las fuentes de las calamidades. Hoy, al referirse a estos eventos se les remitiría a la meteorología o la geofísica, ramas consideradas sin *glamour* hasta hace sólo un par de décadas. La razón es evidente: aquellos eran los fenómenos que poblaban el reino de lo desconocido, de lo impredecible, de lo casual, de la forma no significante. Lucrecio distingue entre la caída en el agua y en el aire que es más rápida en la medida que el cuerpo sea más pesado, y la que sucede en el vacío, donde todos los cuerpos caen con la misma velocidad (Lucrecio, 1968: II, 230-239), mas no reduce la primera a la segunda por suponer ley universal.

Esta concepción del mundo le parecería absurda a los galileanos y a cualquier científico que haya surgido en el paradigma del mecanicismo, o en la del positivismo y sus derivados, no así a quienes en nuestros días han caído presa de la fascinación de las ciencias de la complejidad. El clinamen estaría emparentado con lo que hoy se llama sensibilidad a las condiciones iniciales, ca-

8. Por todo loque hemos señalado, mantenemos esta posición a pesar que hay historiadores que piensan que la anomalía del perihelio de Mercurio sólo alcanzó a tener cierta significación crucial a la luz de la teoría de la relatividad, *i. e.*, como confirmación predictiva empírica de esta teoría frente a la mecánica celeste clásica, sin tener en cuenta que fue uno de los tantos hechos acumulados que reflejaban el ''indeterminismo'' de la mecánica determinística en boga.

9. En 1975, Benoit B. Mandelbrot publicó un ensayo titulado *Les Objets fractales: Forme, hasard et dimension*. En la introducción puede leerse: "El concepto que hace de hilo conductor será designado por uno de los dos neologismos sinónimos 'objeto fractal' y 'fractal', términos que he inventado, (...) a partir del adjetivo latino 'fractus'".

racterística de los sistemas con fricción y en los problemas planteados en el contexto de la mecánica de fluidos.

En un manuscrito de Leonardo que se conserva en la biblioteca del Institut de France[10] se lee:

> Universalmente todas las cosas desean mantener su propia naturaleza, de donde el curso del agua busca mantener su curso según la potencia de su causa y, si enfrenta oposición, da fin al susodicho curso en un movimiento circular y retorcido.

En el lenguaje de los sistemas dinámicos, se diría que, ante la perturbación, el sistema evoluciona hacia el atractor. Si pensamos a la inversa, es decir, si sometemos la terminología moderna a las imágenes leonardinas, encontramos que la disciplina que se ocupa de los atractores es una física del agua, y que la primera ley correcta que se planteó de los vórtices se debe a Leonardo: "La velocidad con que se mueve un punto en el vórtice es inversamente proporcional a la distancia al centro del vórtice" (en los años 1504-1506).

Al igual que la de Lucrecio, la visión de Leonardo recurre a lo que se observa, a lo genérico, a lo estructuralmente estable –matemáticamente hablando– no hace distinción alguna entre el mundo material mecánico y el mundo natural orgánico o mundo humano. De aquí resulta el papel de la analogía en el pensamiento renacentista:

> El vuelo del hombre deberá imitar al del pájaro, el sonido se trasmite en el aire como una perturbación en el agua al caer una piedra, el vuelo de un pájaro es como el de una barca sobre las olas (Koenisberg, 1979).

La información visual que surge de ilustrar los movimientos de la onda sugiere que formas similares corresponden a comportamientos análogos, de ahí que el estudio de ciertas formas de comportamiento caótico se generaban sin ninguna referencia a los mecanismos específicos que los cansaban, es decir, algunos movimientos caóticos seguían trayectorias similares independientemente de procesos descritos por las ecuaciones de la mecánica cuántica, de la cinética molecular, del electromagnetismo o de la morfogénesis.

Descartes, en 1629, escribió *El mundo o tratado de la luz*, sin embargo, la condena de Galileo lo decidió a guardar el manuscrito, que se publicó hasta 1677. El texto no se reduce a una propuesta cosmológica del mundo, es, además, una propuesta de génesis y organización del universo *la teoría de los vórtices* (véase Hamelin, 1949 y Kenny 1968).

La teoría de los vórtices (o torbellinos) como primer ejemplo de una explicación matemática universal de los fenómenos es de valor incalculable; y aunque fuera enteramente errónea, su valor sería el mismo. Lo que más llama la atención es sin duda la propuesta cosmológica cartesiana, que intenta dar cuenta de la génesis del universo en tanto cosmos o naturaleza regulada.

De alguna manera, el origen del mundo puede entenderse en Descartes como el paso del caos al cosmos; señala:

> Pues Dios ha establecido tan maravillosamente estas leyes, que aunque supongamos que Él no cree nada más de lo que he dicho, e incluso que no ponga en esto ningún orden ni proporción, sino que componga con ello un caos, el más confuso y embrollado que los poetas puedan describir; ellas (las leyes) son suficientes para hacer que las partes de este caos se desembrollen por sí mismas y se dispongan en buen orden que tendrán la forma de un mundo muy perfecto, en el cual podremos ver no solamente la luz sino también todas las otras cosas tanto generales como particulares que aparecen en este verdadero mundo (Descartes, 1997: 82).

Como se ha repetido tantas veces, para Galileo el libro de la naturaleza está escrito en lenguaje matemático, y para explicar un fenómeno es necesario leer sus caracteres: puntos, líneas. Esto significa que más que atribuir el movimiento de los objetos "graves" –los que se dirigen al centro de la Tierra– a una *causa*, lo que debe hacerse es descubrir el principio que lo regula. Por eso Galileo enuncia su solución al problema de la caída libre así: cualquier cuerpo, grande o pequeño, ligero o pesado, cae libremente con una aceleración constante.

Con Newton el problema se resuelve suponiendo la existencia de una relación lineal entre la aceleración en cada punto de la trayectoria y la fuerza que en cada punto actúa sobre el cuerpo. Una vez conocida la expresión de la fuerza actuante y las condiciones iniciales, la trayectoria puede calcularse, y para sistemas que tengan sentido físico, esto significa que dado un estado del sistema, los estados futuros quedan unívocamente determinados; este es el sentido del determinismo que Laplace consideró que la mecánica de su tiempo había puesto al descubierto. La ciencia, se decía, mostraba que el mundo funcionaba como un mecanismo de relojería.

3. El programa de Boltzmann y la solución de Gibbs

En 1860 Maxwell,[11] con su famosa ley de distribución de velocidades, brindó una interpretación microscópica al estado de equilibrio termodinámico de un

10. Manuscrito A del Instituto de Francia, según la versión de Ravaisson, folio 60.

11. Físico británico, nacido en Edimburgo, 1831, y fallecido en Glenlair, Reino Unido, 1879. Una biografía completa se encuentra en la página www.silas. psfc.mit.edu/ Maxwell/maxwell.html.

gas, como el estado macroscópico en el cual las incesantes colisiones, que modifican las velocidades individuales de las moléculas, ya no producen variación alguna en la distribución de tales velocidades. Pero esto aún no explicaba la evolución hacia el equilibrio, esto es, cómo a partir de cualquier distribución de velocidades arbitraria el movimiento mecánico de las moléculas debía conducir a la distribución de Maxwell.

Precisamente en estos términos puede expresarse el programa de Boltzmann,[12] cuyo objetivo principal consistía en brindar una interpretación microscópica al concepto de entropía y, con ello, obtener una explicación del segundo principio en términos mecánicos. En su famoso Teorema H obtuvo una función –la función H– monótonamente decreciente con el tiempo hasta alcanzar su valor mínimo en el estado de equilibrio; naturalmente, el paso siguiente fue asimilar la función H cambiada de signo con la entropía del sistema. Sin embargo, el programa de Boltzmann se vio frustrado ante diversas críticas que pusieron de manifiesto, desde diferentes perspectivas, la necesidad de incorporar hipótesis extramecánicas para la derivación del Teorema H. Particularmente relevante respecto al problema de la irreversibilidad fue la objeción presentada por Loschmidt en 1876: si la entropía es una función de las posiciones y velocidades de las partículas de un sistema,

En 1896, como resultado de la segunda ley de la termodinámica, aparece la Paradoja de Loschmidt y el *Demonio* de Maxwell.

que aumenta a lo largo de una evolución particular, entonces al invertir el signo de *t* en las ecuaciones, quedará definida otra evolución a lo largo de la cual la entropía debe disminuir; en consecuencia, por cada evolución mecánicamente posible que conduce al equilibrio existe otra, igualmente posible, que conduce en sentido contrario y que, por tanto, es incompatible con el segundo principio. Así, el modelo de Boltzmann resulta inadecuado para ciertas condiciones iniciales, en particular las resultantes de una inversión de velocidades.

En 1900 Gibbs, con su mecánica estadística, ofreció un nuevo enfoque al ya por entonces muy debatido problema de la irreversibilidad. Su estrategia consistió en abandonar el intento de describir la evolución de un sistema particular, para estudiar el comportamiento de un ensemble de sistemas, cada uno de los cuales se encuentra en un microestado diferente pero siempre compatible con el macroestado del sistema de interés.[13] En el espacio de las fases, el ensemble queda descrito por una nube de puntos, cada uno de ellos representa el microestado de un sistema del ensemble; matemáticamente, esto se expresa mediante una función r, densidad de distribución de los puntos representativos en el espacio de las fases, función que, normalizada a la unidad, muestra la distribución de probabilidad de que el sistema se encuentre en cada uno de los microestados del *ensemble*. En este contexto cobra importancia el Teorema de Liouville, según el cual cualquier región del espacio de las fases que posea una densidad de distribución uniforme evoluciona manteniendo su volumen constante con el tiempo.

Así, desde la perspectiva de Gibbs, el aumento de la entropía en un sistema aislado no describe la evolución del propio sistema, sino únicamente nuestro conocimiento acerca de él, lo que aumenta de un modo constante es nuestra ignorancia respecto del microestado en el que se encuentra el sistema. En el instante inicial podemos disponer de muchos datos del sistema y localizarlo con bastante precisión en una región limitada del espacio de las fases; pero, a medida que el tiempo transcurre, los puntos correspondientes a las condiciones iniciales dan lugar a trayectorias que se alejan más y más de la región inicial. La información relacionada con las condiciones iniciales va perdiendo progresivamente su relevancia hasta que, finalmente, en el equilibrio todo lo que se conoce acerca del sistema son las magnitudes que han permanecido invariantes durante toda la evolución. Dado que el crecimiento de la entropía determina el sentido temporal privilegiado, según esta interpretación gnoseológica, los limitados poderes de discriminación del observador son el factor responsable de la flecha del tiempo.

En 1896, como resultado de la segunda ley de la termodinámica, aparece la Paradoja de Loschmidt y el *Demonio* de Maxwell. Por ejemplo, si hay un gas dentro de una caja y suponemos que todas las moléculas se mueven en la misma dirección con la misma velocidad y perpendiculares a una de las paredes de la caja con la que van a chocar con el paso del tiempo, no convergían en la distribución de Maxwell. Boltzman calificaba este tipo de consideración de excepcional; sin embargo, su colega y profesor J. Loschmidt le hizo ver que la segunda ley podía ser violada, si habiendo ob-

12. Físico austriaco, nacido en Viena, el 20 de febrero de 1844 y fallecido trágicamente en Duino, Trieste, Italia el 5 de septiembre de 1906.

13. Debe recordarse que el término ensemble refiere a un concepto abstracto, y no a un conjunto de sistemas físicos reales. Por lo tanto, no debe suponerse que los sistemas que componen un ensemble interactúan entre sí; por el contrario, cada uno de ellos desarrolla su propia evolución de acuerdo con las leyes de la mecánica.

servado el movimiento libre de las partículas procedemos a tomar la velocidad contraria para cada una de las encerradas en la caja, lo cual ante nuestros ojos significaría que el tiempo fluye hacia el pasado. Esto resulta así en tanto que todo se movería como al invertir el sentido en que se proyecta una película del movimiento original. Boltzman de inmediato reconoció que estaba frente a una paradoja: el problema de reconciliar el flujo del calor, que depende de la dirección del tiempo, con las leyes de la mecánica, que no dependen del sentido en que fluye el tiempo. Esta paradoja es la mencionada "paradoja de la inversibilidad o de Loschmidt", un golpe a los sólidos cimientos del determinismo.

Formular una respuesta satisfactoria a este rompecabezas intelectual le tomó aproximadamente un decenio. Así, en 1898, Boltzman reformuló lo que se conoce como el Teorema H: *no importa cuál sea la distribución inicial de la energía cinética; para intervalos de tiempo ésta siempre se aproxima a la distribución de Maxwell*.

4. Las ecuaciones diferenciales como el ejemplo clásico

J. H. Poincaré (1854-1912)[14] identifica los problemas que originan la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales: estudia las propiedades de las trayectorias sin apelar a la solución analítica, la cual en las ecuaciones no lineales es difícil de obtener, si no imposible. Usa para ello el espacio de fases que es el conjunto de puntos que representa los estados posibles del sistema. Una solución de éste puede contemplarse como una curva en dicho espacio que, al ser recorrida, marca la evolución del estado de un sistema.

Esta presentación de los problemas permitía una clasificación de los comportamientos que a la vista resultaba muy atractiva: curvas abiertas, trayectorias cerradas (que representaban movimientos periódicos), trayectorias que asintóticamente convergen una en las otras, etc. En este contexto resultó que los obstáculos y complicaciones que surgen en el estudio de sistemas compuestos por varias partículas son de la misma clase que los enfrentados por Poincaré.

Fue precisamente el problema de los tres cuerpos lo que lo llevó a pensar en la complejidad de un sistema (véase Delgado y Vela, 1992). En 1887, Poincaré demostró que dicho problema no tenía solución en el sentido que había sido planteado, es decir, el problema estaba planteado de modo incorrecto. Sus dudas lo llevarían a estudiar una idealización del problema de los tres cuerpos, llamado modelo reducido de Hill, que se ocupa del caso en que uno de los tres cuerpos tiene una masa tan pequeña que no afecta a los otros dos, aunque éste sí se ve afectado por ellos.

Los resultados de Poincaré no invalidaban los cálculos aproximados hechos por Laplace y Leverrier en el campo de la astronomía, pero imponía restricciones a la predictibilidad, en tanto que mostraba que errores arbitrariamente pequeños en las soluciones no permanecerían necesariamente como tales por intervalos temporales arbitrariamente largos. Más importante aún, aunque poco apreciable en su momento, fue su demostración de las órbitas llamadas inestables en los problemas que trataban tres o más cuerpos. La inestabilidad de las órbitas se traducía en que un cambio minúsculo en las condiciones iniciales producía notables cambios claramente desproporcionados en las órbitas.

Está claro que un hecho cualquiera puede generalizarse de muchas maneras, y si se trata de elegir, la simplicidad debe ser el criterio guía. Tomemos el caso más trivial, el de la interpolación. Hacemos pasar un trazo continuo, lo más regular posible, entre los puntos dados por la observación. ¿Por qué evitamos los puntos angulosos, las inflexiones bruscas? ¿Por qué no hacemos describir a nuestra curva zigzag más caprichosos? Porque sabemos de antemano, o creemos saber, que la ley para obtenerse no puede ser tan complicada como ello.

Así, Kepler señala que las posiciones observadas por Tycho están sobre una misma elipse. No ha pensado que por un juego singular del azar, Tycho ha mirado solamente el cielo en el momento en que la trayectoria verdadera del planeta cortaba esta elipse.

En los años cincuenta y sesenta comienza a aparecer todo tipo de comportamientos extraños y desordenados en las computadoras, comportamientos que poco a poco fueron cediendo a ser clasificados de alguna manera, gracias en gran medida a los trabajos de Kolmogórov, Arnold y Smale.[15]

Smale retomó el trabajo de Poincaré y lo enjuició aportando mayor claridad a lo que sucedía durante el seguimiento de dos trayectorias localizadas en la región del espacio de fases considerada caótica. Si ambas trayectorias sólo difieren por establecer una escala a partir de la sexta cifra decimal, y se sigue la sucesión de estados que ambos van recorriendo, resulta que después de unos centenares de puntos de las sucesiones, aparentemente se han mezclado de una forma caótica, aleatoria, en ocasiones estando cercanas una de otra y, después de unos cuantos pasos en su evolución, vuelven a separarse. Uno podría pensar que este resultado es producto de la inexactitud con que se consideran las condiciones iniciales. En realidad, como lo muestra el teorema de Smale, aun

14. Para mayores detalles biográficos de Poincaré puede consultar, por ejemplo, G. Darboux (1913).

15. Para consultar los artículos originales de estos científicos, ver Abraham (1967).

cuando se hayan agregado más cifras decimales –digamos otras seis– a las condiciones iniciales, el tiempo en que puede hablarse de predictibilidad aumenta sólo en un factor de dos. La única conclusión es que, en la práctica, el comportamiento de este tipo de sistema no es predecible (Smale, 1870).

5. Más problemas

Algunas propiedades fractales surgen del intento de clasificar las representaciones gráficas de comportamientos tan complicados,[16] que hacían que resultaran inútiles las formas tradicionales que enfrentan este tipo de problema. Uno de los primeros usos de las nociones de fractalidad se presentó en un problema que por tradición ha sido considerado arquetipo de lo aleatorio: la turbulencia.

En 1930, A. N. Kolmogórov aprobó una descripción matemática que ayuda a entender parcialmente cómo se mueven los vórtices; sin embargo, ante esta presentación surgen algunas preguntas: si un flujo se mueve suavemente, todas sus partículas siguiendo líneas paralelas, ¿cómo es que se torna turbulento? Y antes de que la turbulencia se desarrolle, ¿qué estados intermedios existen? Este problema fue planteado por L. D. Landau, científico ruso cuyo texto sobre la dinámica de fluidos sigue siendo fundamental. A mediados del decenio de los años cuarentas, Landau propuso una recta hacia el estado turbulento en la que a medida en que variaban los parámetros del sistema se producían bifurcaciones. Este tipo de concepto matemático permite describir el paso al estado caótico del movimiento suave de un líquido o de una columna de humo, que al aumentar su velocidad, da lugar a giros violentos, superposiciones y entrecruzamientos, unidos y zigzagueos de líneas de flujo. Tales imágenes nos llevan al formalismo, que habla de la superposición de varios movimientos oscilatorios que provocan pérdida aparente del orden en el sistema.

Sin embargo, aún no se ha probado experimentalmente la validez de la teoría de Landau en la transición a la turbulencia, y de hecho en la actualidad nadie espera que este sea el camino que sigue la naturaleza.

Hace un poco más de 20 años, D. Ruelle concluyó: "No hay una teoría de la turbulencia" (ver Ruelle, 1991), es decir, la turbulencia se resistía al análisis. Sus estudios están en el marco alternativo de Landau, ayudados por los análisis de Smale que dieron paso a la *herradura de Smale*, que describe una forma general de complejidad. Junto con F. Takens, a principios del decenio de los años setenta, estudian qué clase de comportamiento, en el espacio de fases, podría asociársele a un fluido turbulento, con el fin de ofrecer un sustituto a la forma tradicional de ver la transición a la turbulencia. Esto equivaldría a preguntarse qué tipo de atractor (una región en el espacio de fases a la cual tienden las trayectorias después de un lapso amplio) definía la turbulencia. No podría ser un punto fijo, pues significaría que el flujo tendería hacia el estado de reposo; tampoco podría ser un ciclo límite (una trayectoria cerrada, el único otro tipo de atractor que se pensaba existía), ya que esto implicaría alcanzar a la larga un estado de movimiento regular, es decir, periódico y por tanto predecible.

Ruelle y Takens se preguntaban si podría existir otro tipo de atractor que tuviera las cualidades deseadas: *a*) estabilidad ya que representaría el estado final de un sistema inmerso en un universo con 'ruido' de fondo; *b*) dimensión baja, es decir, una órbita que se moviera en una región acotada del espacio de fase con pocos grados de libertad, y *c*) falta de periodicidad o, lo que es lo mismo, que nunca cayera en un ritmo iterativo. Geométricamente estos requerimientos representaban que en un área finita nunca se repetiría ni se cruzará consigo misma, lo cual equivaldría a pedirle que fuera una línea de longitud infinita contenida en un espacio finito. Dadas las características tan fuera de lo común, a un atractor de este tipo, que corresponde a un estado de turbulencia, se le calificó de atractor extraño. Resulta interesante señalar que ya existían ejemplos con estos requerimientos, pero estaban perdidos en la literatura matemática al considerárseles casos patológicos y sin ningún uso inmediato. De hecho, Birkhoff (1950) afirmaba que debía reconocerse la posibilidad de que causas arbitrariamente pequeñas produzcan efectos finitos, a lo que denominó paradoja asintótica.

Conclusiones

El paradigma de la ciencia clásica era la mecánica de Newton; para esta concepción del mundo, las leyes de la naturaleza eran inmutables e independientes del tiempo. Este criterio ha sobrevivido incluso en algunos innovadores del siglo XX; entre ellos Bohr y Einstein. Para todos ellos los procesos físicos son reversibles, pasado y futuro son intercambiables; es decir: conociendo las condiciones iniciales de un sistema, podemos predecir su futuro; también podemos remontar un estado evolucionado, ver cómo ha llegado hasta ahí, conocer su pasado. El tiempo, por tanto, era una mera ilusión.

Un nuevo paradigma ha transformado esta concepción determinista: la ciencia del calor, la termodinámica. Puso de manifiesto ya en el siglo XIX la posibilidad de procesos irreversibles, la existencia de una flecha en el tiempo por la función de la entropía. Desarro-

16. Algunos ejemplos se presentan en Stewart (1989), Stewart y Golubilski (1992) y Stoop (1991).

llando estas ideas, investigadores de la dinámica del no equilibrio demuestran algo escandaloso a ojos del ideal clásico de la ciencia: el azar y la irreversibilidad pueden dar lugar al orden y a la organización. Ilya Prigogine es el representante más conocido de esta revolución de la historia de la ciencia, la del redescubrimiento del tiempo.

El uso de técnicas computacionales ha permitido simular fenómenos aleatorios mediante comportamientos determinísticos imposibles de advertir con las técnicas estadísticas actuales. Todo hace pensar que pruebas estadísticas más potentes no harán variar la situación. De todos modos, estos ejemplos de determinismo indetectable no alteran las características de la ciencia como disciplina descriptiva, explicativa y predictiva.

En primer lugar, a todo efecto práctico, muchos sistemas pueden considerarse determinísticos, aunque estrictamente no lo sean; a pesar de ello, el progreso del conocimiento científico y tecnológico que han ocasionado es extraordinario. En segundo lugar, en muchos sistemas el componente aleatorio (intrínseco o encuadrado en cualquiera de las otras interpretaciones del azar mencionadas) es poco importante, aunque no sea totalmente despreciable: la aleatoriedad se refleja en una perturbación o ruido en el modelo, tal vez algo molesto, pero que no impide, de todos modos, predecir el comportamiento del sistema. Y en tercer lugar, incluso en los sistemas afectados por el caos determinístico, en muchos casos, las trayectorias van descontrolándose paulatinamente pero pueden predecirse, si bien con precisión cada vez menor a medida que transcurre el tiempo. Ello no quita importancia a las predicciones: que no pueda hacerse un pronóstico meteorológico para dentro de seis meses no es razón para pensar que el realizado para mañana sea incorrecto.

Como último comentario, es interesante observar que la evolución del conocimiento científico hizo variar los modelos matemáticos deterministas. Pasaron del tipo ideal de Laplace, en que el conocimiento del sistema en un instante permitiría conocer todo el futuro y todo el pasado (o modelos simétricos con respecto a la variable temporal, que puede ser indistintamente t o $-t$), al tipo irreversible, que permitiría conocer el futuro pero no el pasado, y finalmente, a aquellos que no proporcionan conocimiento de un futuro suficientemente lejano, como son los modelos dinámicos inestables no lineales. Con el avance del conocimiento en las ciencias exactas y naturales, sin perder su carácter determinista, los modelos matemáticos reflejan cada vez más nuestra ignorancia, primero del pasado y luego del futuro. Interesante contradicción. ¿Pero será esto *ad infinitum*?

Bibliografía

Abraham, R. (1967). *Foundations of Mechanics*. Benjamin, Nueva York-Amsderdam.

Arquimedes (1986). *El método*. Alianza Editorial 1151, Madrid.

Birkhoff, G. (1950). *Hydrodynamics: a Study in Logic, Fact and Similitude*. Princeton University Press.

Darboux, G. (1913). *Eloge historique d'Henri Poincaré lu Dans la Séance Publique Annuelle du 15 Décembre 1913*, Gauthier -Villars, París.

Delgado, J. y L. Vela (1992). "El problema restringido plano y circular de tres cuerpos", *Memorias XXV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana*, Xalapa, Veracruz. Vol II. 15-62.

Descartes, R. (1997). "Discurso del Método", 18a ed. Editorial Losada S. A., Buenos Aires.

Drago, A. (1986). "Una definizion precisa de inconmensurabilitá", en Bevilacqua, F. (ed.). *Tai del VII Congresso Nazionale di Store della Fisica*, Padova.

Euler (2001). "Introducción al análisis de los infinitos", en Durán, A. J. (ed.), J. J. Arántegui (trad.). Soc. Andaluza de Ed. Mat. Thales/ Real Soc. Mat Española, Sevilla.

Hamelin, O. (1949). *El sistema de Descartes*. Losada, Buenos Aires.

Kenny, A. (1968). *Descartes. A History of his Philosophy*. Radom House, Nueva York.

Koenisberg, D. (1979). *Renaissane Man and Creative Thinking*, *A History of Concepts of Harmony 1400-1700*. Harvester, Gran Bretaña.

Loercio, D. (1985). *Vidas de los filósofos más ilustres*. Orbis, Barcelona.

Lucrecio, K. (1968). *Sobre la naturaleza de las cosas*. Trad. de José Marchena. Nueva Ciencia, Madrid.

Mandelbrot, B. B. (1975). *Los Objetos Fractales: Forme, Hasard et Dimensión*. Flannmarion, París.

Platón (1996) "Timeo", en *Diálogos*, Porrúa, México.

Pastor, J. R. y J. Babini (1986). *Historia de la matemática*. Gredisa, Barcelona.

Ruelle, D. (1991). *Hasard et Chaos*. Ed. Odile Jacob, París.

Sarres, M. (1977). *La Naissance de la Physique Dans le Texte de Lucréce*. Minuit, París.

Simplicio (1940). *Comentarios a la física de Aristóteles*. J. G. (trad.), México.

Smale, S. (1970). "Differentiable Dynamical Systems", *Bull Amer. Math Soc*. Vol. 73, 747-817.

Stewart, I.

______ (1989). *Does God Play Dice? The New Mathematics of Chaos*. Penguin, Londres.

______ y M. Golubitsky (1991). *Fearful Symmetry. Is God a Geometer?* Blackwell, Oxford.

Stoop, R. R. (1991). *Scaling Behavior in Dissipative Dynamical Systems*. Tesis de doctorado, Universidad Zurich.

Verneaux, R. (1982). Textos de los grandes filósofos: edad antigua. 5a ed. Herder, Barcelona.