Eduardo Harada O.

Las matemáticas: ¿descubiertas o inventadas? La respuesta del realismo constructivista

Ciencia Ergo Sum, vol. 12, núm. 2, julio-octubre, 2005, pp. 193-198,
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Ciencia Ergo Sum,
ISSN (Versión impresa): 1405-0269
ciencia.ergosum@yahoo.com.mx
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Espacio del divulgador

Recepción: 19 de octubre de 2004
Aceptación: 20 de enero de 2005

* Escuela Nacional Preparatoria, Universidad Nacional Autónoma de México.
Quiero agradecer a quienes fungieron anónimamente como árbitros de este artículo, por haber señalado algunas deficiencias de la versión original; espero que al corregirlos no haya agregado otras.

Las matemáticas: ¿descubiertas o inventadas?

La respuesta del realismo constructivista

Eduardo Harada O.*

El gran matemático Kronecker decía sobre la matemática: los números naturales los ha creado Dios; todo lo demás es obra humana. En oposición a esto, yo digo: los números naturales son obra humana, son un producto colateral del lenguaje humano, de la invención del contar y del seguir contando (Popper, 1985: 85).

Resumen. Uno de los problemas más importantes de la filosofía de las matemáticas se refiere al estatuto ontológico de los objetos matemáticos: ¿son independientes de la mente humana o solamente son ideas en nuestra mente? La primera postura corresponde al platonismo o al realismo, la segunda al idealismo o subjetivismo (también llamado 'constructivismo'). En este artículo se presenta el realismo constructivista de Karl R. Popper como una alternativa que supera a las otras: los objetos matemáticos son creados por los seres humanos, pero se independizan de nosotros y algunas de sus consecuencias tienen que ser descubiertas.
Palabras clave: platonismo, realismo, subjetivismo, idealismo, ontología, constructivismo, matemáticas.

Mathematics: Discovered or Invented? Constructivist Realism's Answer

Abstract. One of the most important problems of the philosophy of mathematics concerns the ontological status of mathematical objects: are they independent of the human mind or are they solely ideas in the mind? The first position corresponds to Platonism or Realism, the second to Idealism or Subjectivism –so called Constructivism. In this paper Karl R. Popper's Constructivist Realism is presented as an original alternative that surpasses the other positions: mathematical objects are created by human beings, but they become independent from us, and some of their consequences have to be discovered.
Key words: Platonism, Realism, Subjectivism, Idealism, Ontology, Constructivism, Mathematics.

¿De qué tratan las matemáticas? ¿Cuál es su objeto de estudio? Muchos responderían sin dudar: los números, es decir, las matemáticas son "la ciencia de la cantidad". Y, quizá algunos agregarían, también de las 'figuras'.

Sin embargo, el estudio de los números sólo corresponde a una disciplina matemática, a saber, la aritmética y las figuras sólo son el objeto de estudio de la geometría.

La verdad es que las matemáticas también estudian puntos, funciones, conjuntos, etc. En efecto, existen muchas otras disciplinas matemáticas, entre ellas, la topología, el cálculo, la teoría de conjuntos…

Ahora bien, ¿qué son los números, los puntos, las funciones y los conjuntos? ¿Qué tipo de realidad tienen? ¿Existen independientemente de la mente de los seres humanos o sólo dentro de ella? ¿Son algo descubierto o inventado?

Este problema ha preocupado a la filosofía desde la antigüedad, pues tradicionalmente se ha considerado que las matemáticas ofrecen un tipo de conocimiento (infalible y exacto) distinto al resto de las ciencias, principalmente las empíricas (ya sea naturales o sociales). Y muchos han considerado que la diferencia entre ellas radica en la clase de objetos que estudian: ni físicos ni materiales, o que deban ser conocidos a través de los órganos de los sentidos y de los cuales sólo puede tenerse un conocimiento particular y contingente (ya que únicamente podemos percibir sensiblemente objetos concretos, situados en el tiempo y el espacio), sino objetos completamente diferentes.

De manera general, en la filosofía de las matemáticas (la rama de la filosofía que reflexiona sobre ellas) han dominado dos posturas sobre el problema anterior o del estatuto ontológico de las entidades matemáticas (la 'ontología' es la disciplina filosófica que se pregunta por el ser de las cosas o por la realidad en general): *a)* el realismo o platonismo y *b)* el idealismo o subjetivismo.

	Realismo o platonismo	Idealismo o subjetivismo
Objetos matemáticos	Independientes del ser humano: entidades inmateriales que deben ser descubiertas.	Dependientes del ser humano: ideas construidas mentalmente.

La postura realista o platónica (llamada así porque fue planteada por primera vez por el filósofo griego Platón)[1] afirma que los objetos matemáticos existen independientemente de nosotros y de nuestra mente, es decir, que si no existiéramos de todas formas ellos existirían e, incluso, si despareciéramos seguirían existiendo[2] (Bernays, 1988: 258-271).

El realismo platónico sostiene que los enunciados matemáticos deben tomarse literalmente: cuando se dice, por ejemplo, que "para todo número natural *n*, existe un número $m > n$, tal que *m* es un número primo", ese número debe existir. Desde luego, diría esta postura, ese número no existe de la misma manera que los objetos físicos o materiales, sino fuera del tiempo y del espacio. Pero lo importante es que no fue inventado o elaborado por nosotros, sino que tuvo que ser descubierto.

Lo anterior significaría que –a pesar de todo– el trabajo de los matemáticos sería parecido al de los científicos empíricos, en tanto que también buscan descubrir (y no construir o inventar) las propiedades de los objetos que estudian; la única diferencia es que las entidades matemáticas no pueden ser percibidas a través de los sentidos, sino sólo por medio de una 'intuición intelectual', es decir, de algún modo, las 'vemos' con la mente.

La explicación del carácter necesario con el que se nos presentan las matemáticas (como cuando decimos: "Tan cierto como 2 + 2 = 4") se encuentra en que se refieren a objetos que no cambian ni pueden cambiar: los enunciados matemáticos son verdaderos o falsos, según si corresponden o no a dichos objetos y a sus propiedades, incluso lo son aunque no lo sepamos ni podamos saberlo.

Uno de los problemas con el platonismo es que en él, como hemos visto, se supone la existencia de objetos que no son ni físicos ni mentales, lo cual va en contra del naturalismo de la ciencia moderna.

El idealismo o subjetivismo, al que también se le denomina 'constructivismo', sostiene, por el contrario, que los objetos matemáticos dependen totalmente de nosotros, es decir, no existirían si nosotros no existiéramos. En concreto, el idealismo subjetivista plantea que los objetos matemáticos son meras ideas o el resultado de nuestra actividad mental: si pensáramos de forma diferente, serían distintos.[3]

El problema con esta postura es que si fuera correcta, entonces la matemática se reduciría a la psicología y no sería posible dar cuenta de su carácter necesario: a diferencia del resto de nuestras ideas, los objetos matemáticos no varían con los individuos, por ejemplo, cada uno de nosotros puede tener una imagen mental particular del triángulo equilátero (grande o chico, formado por líneas blancas o negras, etc.), pero la definición de esta figura es igual para todos y no cambia ni puede cambiar, por lo que no debe reducírsele a las ideas de nadie.

Es decir, las dos principales posturas dentro de la filosofía de las matemáticas acerca del estatuto ontológico o el modo de existencia de las entidades matemáticas tienen parte de razón, pero también entrañan ciertas dificultades que las vuelven inaceptables.

1. Por ejemplo, en los *Diálogos, La república* y *Teeteto* (Shapiro, 2000: 49-63).

2. Dentro de la filosofía de las matemáticas contemporáneas se puede considerar, por distintas razones, platónicos o realistas a Frege, Gödel y Quine (Shapiro, 2000: 201-225).

3. Dentro de esta postura 'subjetivista' se podría incluir al intuicionismo (L. E. J. Brouwer) y al convencionalismo (Henry Poincaré). El primero sólo acepta la existencia de aquellos objetos matemáticos que pueden ser construidos paso a paso por el pensamiento del matemático individual y aquellas propiedades que pueden ser captadas por la intuición intelectual (Brouwer, 1988: 66-96). El segundo plantea que las matemáticas son el resultado de la aceptación, debido a su comodidad o sencillez, de ciertas reglas o principios, pero que no hay unas reglas o principios más verdaderos que otros (Poincaré, 1984: 151-186).

El formalismo (iniciado por David Hilbert) es otra postura sobre el mismo problema que sostiene que no existen objetos matemáticos, ni mentales ni inteligibles, independientemente del lenguaje matemático. Las matemáticas sólo consisten en un conjunto de símbolos que pueden ser combinados de acuerdo con ciertas reglas. Pero dichas reglas son totalmente arbitrarias, es decir, podían ser completamente diferentes o, por mucho, están limitadas por los valores de la consistencia y la sencillez. Según esto, las matemáticas son como un 'juego' igual que el ajedrez (Hilbert,1993: 23-35).

Se ha dicho que la mayoría de los matemáticos son "platónicos entre semana y formalistas los fines de semana", esto es, cuando hacen matemáticas actúan como si creyeran que están tratando de descubrir las propiedades de ciertos objetos que son independientes de ellos, pero cuando se les pide que justifiquen esta postura, adoptan un punto de vista formalista, para no verse envueltos en problemas filosóficos u ontológicos.

Karl R. Popper, filósofo de la ciencia de origen austriaco (1902-1994), ofrece una respuesta diferente, el *realismo constructivista*, la cual retoma y supera las respuestas antes expuestas.[4]

Popper nos dice que las matemáticas son construidas, concebidas por los seres humanos, gracias a su actividad mental, pero una vez que han sido inventadas se independizan, es decir, constituyen un mundo autónomo con leyes propias, que después tenemos que descubrir y que, a veces, ni siquiera podemos entender del todo.[5]

En efecto, todas nuestras obras tienen consecuencias imprevistas e imprevisibles, pero que siguen necesariamente del punto de partida que se adoptó. Esto es, aunque éste puede ser arbitrario, algunas de sus consecuencias simplemente se nos imponen y no podemos cambiarlas sino que tenemos que descubrirlas, aceptar y tratar de entender.

Realismo constructivista

Objetos matemáticos (Inventados o construidos) (Constructivismo)	$\longrightarrow$	Consecuencias (Descubiertas) (Realismo)

Por ejemplo, aunque los números son una invención humana (no preexistían en un mundo platónico), hasta ahora nadie ha encontrado una prueba para la llamada 'conjetura de Goldbach' (según la cual todo número par mayor que dos es la suma de dos números primos: 4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 5 + 3, 10 = 7 + 3, 12 = 7 + 5, 14 =11 + 3, etc.).[6] Es decir, nadie tiene una idea de cómo resolver este problema que surgió como una consecuencia no intencionada de la invención del sistema numérico.

Otro ejemplo de una consecuencia no intencionada de la invención del sistema numérico y que tuvo que ser descubierta es que, si avanzamos en la serie numérica hacia los números mayores, los números primos aparecen cada vez menos frecuentemente o están situados cada vez menos próximos.

Como se recordará, los números primos positivos son los números naturales mayores que 1 y que solamente son divisibles entre 1 y entre sí mismos (los números pares son aquellos divisibles entre 2). Por ejemplo, los números primos positivos hasta el 100 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 93, 89 y 97.

Y en la anterior serie puede descubrirse fácilmente que mientras que 5 y 7, 11 y 13, 17 y 19, 29 y 31 sólo están separados por un número par (por ello, los griegos les denominaban 'primos gemelos'), 73 y 79 lo están por cinco números pares, y 89 y 97 por seis.

El problema, objetivo y que se nos impone, es que si avanzamos, por ejemplo, hacia el número 10 millones, ¿acaban desapareciendo los números primos positivos, o siempre hay nuevos números primos, aunque sean más escasos?, o, como lo planteó el matemático griego Euclides, ¿existe un número primo máximo, o es la sucesión de los números primos infinita, igual que la sucesión de los números naturales?[7]

De la misma forma, podemos recurrir a otros ejemplos, ahora tomados de la geometría (Popper 1997b: 61-65). Veamos: todos los ángulos inscritos en una semicircunferencia son rectos (miden 90º), ya que el teorema anterior se sigue, como consecuencia inevitable, de otros dos teoremas (la suma de los ángulos en todo triángulo es igual a dos ángulos rectos, es decir 180º, y si un triángulo tiene dos lados iguales, entonces los dos ángulos existentes entre éstos y el tercer lado también son iguales) y de la definición del círculo que dice que todos sus radios son iguales.

La geometría es, evidentemente, un producto humano. De hecho, sabemos que tiene su origen en Babilonia y Egipto; en este último lugar tuvo el propósito instrumental de medir la tierra.[8]

Con el tiempo, ha ido descubriéndose y reconocido que la geometría (pura) no es más que un sistema de axiomas seleccionados de manera arbitraria, y que la aceptación de distintos conjuntos de axiomas puede dar lugar a diferentes tipos de geometrías,

---

4. Véase Popper (1994b: 40-45; 1992: 126-135; 1995b: 83-88; 1994c: 140-143) y Popper y Eccles (1985: 41-54). La filosofía de las matemáticas de Lakatos (1994) es, en parte, un desarrollo de las ideas popperianas. Hersh (1997: 3-23) asume una postura cercana a la de Popper. También es recomendable el libro que David y Hersh (1998: 318-359) (existe una traducción al español). En Bloor (1998) puede encontrarse una crítica, desde la perspectiva de la sociología de la ciencia, a la postura popperiana.
5. A este mundo Popper lo llama Mundo 3 o Mundo del conocimiento objetivo: el Mundo 1 es el mundo físico-material, y el Mundo 2 es el mundo subjetivo o de los estados mentales. La cosmología popperiana es, a la vez, realista (existe una realidad independiente de nosotros), emergentista (las relaciones entre los elementos de cierto nivel a veces hacen que surja otro tipo de realidad sujeta a nuevas leyes) y pluralista (existen diferentes tipos de realidad o mundos).
6. La formulación original de Chistian Goldbach (1690-1764), matemático prusiano, fue: "Considero que el teorema de que todo número mayor de dos es una suma de dos primos es totalmente cierto, a pesar de que no lo puedo probar". La hipótesis fue publicada en Inglaterra en 1770, pero todavía no se ha encontrado una demostración matemática de ella. Uno de los últimos intentos para demostrarla se hizo en 1998 cuando unas computadoras demostraron que era cierto para todo número par hasta los 400 mil millones, pero no hay computadora (por más poderosa que sea) que pueda seguir calculando hasta el infinito. Apóstol Doxiadis publicó una novela sobre este tema que se convirtió en un best-seller: *Uncle Petros and Golbach's Conjeture*.
7. La respuesta que encontró Euclides fue que no existe un "número primo mayor" y que la sucesión de los números primos es infinita, lo cual fue algo que se descubrió y puede demostrarse, pero no puede cambiarse.
8. El historiador griego Herodoto dice que la geometría egipcia se originó en la necesidad, por las inundaciones anuales del Nilo, de volver a trazar los lindes de los terrenos cultivados por los agricultores. Véase Bell (2000: 48-57), Collette (2000:19-63), Kline (1999: 18-46), Rey Pastor y Babini (2000: 21-34) y Wassing (1998:16-26).

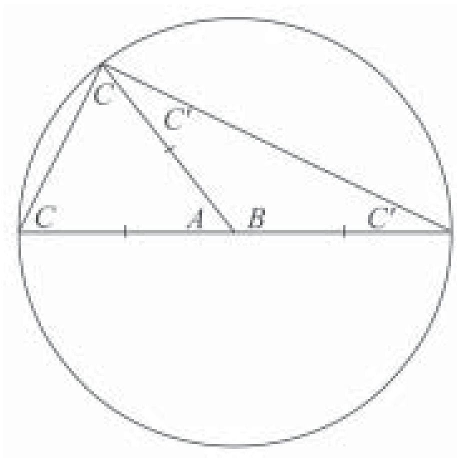

Figura 1. Triángulo rectángulo inscrito en un círculo.

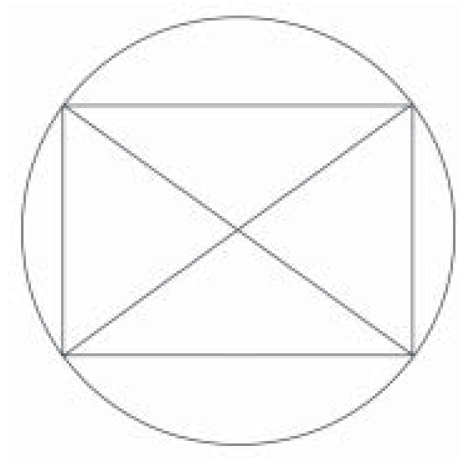

Figura 2. Paralelogramo inscrito en un círculo formado por tríangulos rectángulo.

por ejemplo, las euclídeas, esto es, las que aceptan el quinto postulado de los *Elementos* de Euclides (según el cual por un punto exterior a una línea recta sólo puede pasar una línea paralela, lo que implica, en términos más coloquiales, que dos líneas paralelas nunca se juntan aunque se extiendan al infinito), y las no euclídeas (en las cuales por un punto externo a una línea recta no puede pasar ninguna línea paralela o, por el contrario, puede pasar un número infinito de ellas).[9]

Antes se consideraba que los axiomas eran verdades autoevidentes que, por esta misma evidencia, no requerían ser demostrados, pero con el descubrimiento de las geometrías no euclídeas se ha llegado a la conclusión de que son meras suposiciones que se aceptan como verdaderas o de las que se parte para probar otras (teoremas).

Sin embargo, esa 'arbitrariedad' no es completa pues está limitada por las condiciones a las que se encuentra sometido un sistema axiomático, entre ellas están la consistencia (no debe incluir contradicciones), la sencillez (debe partir del menor número posible de axiomas) y la independencia (sus axiomas deben ser independientes entre sí o no derivables unos de otros). Pero, sobre todo, una vez que se han aceptado los axiomas (además de un vocabulario, reglas de formación y trasformación), cesa la libertad de elección, pues entonces los teoremas se siguen de manera inevitable.

Por ejemplo, el teorema (objetivo, independiente de nosotros y que se nos impone) de que *a)* si se traza un diámetro (segmento de recta que une dos puntos de una circunferencia), *b)* se elige cualquier punto de la circunferencia que no sea uno de los extremos de este diámetro y *c)* se une el punto elegido con los dos extremos mediante líneas rectas, entonces *d)* las líneas forman un ángulo recto en el punto elegido (como lo muestra la figura 1). Es una consecuencia no intencionada ni prevista de la invención de los círculos, las líneas rectas, etc., algo que tuvo que descubrirse y llegar a demostrar[10] (de hecho, en ciertas tradiciones[11] la prueba de este teorema se le atribuye a Tales de Mileto (624?–550?), considerado el padre de la geometría griega).

De lo anterior también resulta que todo triángulo inscrito en una circunferencia es rectángulo (tiene un ángulo de 90º) (figura 2).

Igualmente, se deriva que no es posible circunscribir un círculo a ningún paralelogramo (un cuadrilátero con sus dos pares de lados opuestos paralelos), a menos que éste tenga cuatro ángulos rectos, como puede verse en la figura 3.

De hecho, una propiedad involuntaria de la invención de los sistemas axiomáticos –que fue descubierta hasta los años treinta del siglo XX por el matemático de origen alemán Kurt Gödel (1906-1978)–[12] es que ninguno de ellos (capaz de expresar la aritmética elemental) puede ser a la vez *consistente* y *completo* (todos los teoremas o las proposiciones verdaderas expresables dentro de él son derivables de sus axiomas), pues el intento de volverlo consistente conduce a que algunos de sus teoremas queden sin probar, y la pretensión de volverlo completo hace que surjan inconsistencias en él.[13]

Así, los axiomas de la geometría son arbitrarios, en el sentido de que pueden ser elegidos libremente, pero una vez que lo han sido, de ellos

9. Puede decirse que el origen de las geometrías no euclídeas se encuentra en los trabajos de Saccheri, pero sus inventores propiamente dichos fueron Gauss, Bolyai y Lobachevski, quienes desarrollaron lo que después se conoció como el primer tipo de geometrías euclídeas o hiperbólicas. Riemann elaboró el segundo tipo de geometrías no euclideas (las elípticas).

10. La prueba es la siguiente: $A + B = 2R$, $A + 2C = 2R$. Por tanto, $B = 2C$ y $C = B/2$.

11. En concreto, en los *Comentarios* de Proclo a los *Elementos de Euclides*.

12. Primer teorema de la incompletud.

13. La consistencia de un sistema puede probarse en otro superior, pero en éste surge exactamente el mismo problema que en el anterior. Así , la consistencia de una teoría aritmética no puede probarse con sus propios medios (segundo teorema de incompletud).

se deducen consecuencias necesarias, algunas de ellas resultan mejores que las que se buscaban cuando las seleccionamos, otras son intrigantes, decepcionantes y hasta desesperantes (pues no logramos ni siquiera entrever cuál puede ser la solución a algunos problemas en los que, de algún modo, nosotros mismos nos metimos).

En suma, la solución a un problema hace que surjan nuevos, a veces más difíciles de resolver que el original. Por ejemplo, el teorema de Gödel, arriba mencionado, surgió como resultado del intento por solucionar uno de los problemas del 'programa de Hilbert' o formalista, a saber, encontrar 'pruebas de consistencia absolutas' (sin dar por supuesta la consistencia de otro sistema) (Nagel y Newman, 1981: 43-52).

Ahora bien, podría decirse (con los platónicos) que desde la primera vez que se construyó o inventó un sistema axiomático estos problemas ya estaban ahí, escondidos entre sus consecuencias, sólo que nadie los había descubierto. Pero, esto, más bien, apoya la tesis popperiana (más compleja y completa que la realista platónica y la idealista subjetivista) de que una vez que los objetos matemáticos son concebidos, se liberan de sus creadores y pasan a formar parte de un mundo objetivo (independiente de nosotros), real (tal real como el de los objetos físicos o el de los pensamientos), autónomo (con leyes propias) y con el que podemos interactuar: el mundo de la cultura.

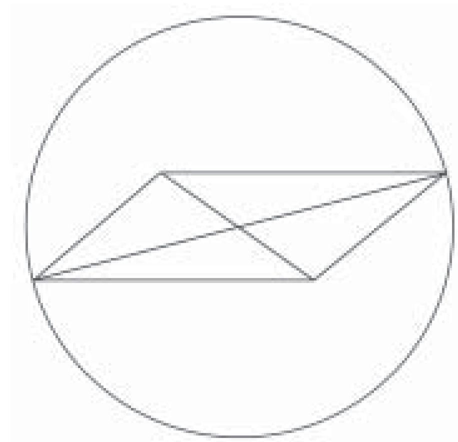

Figura 3. Imposibilidad de inscribir un paralelogramo sin ángulos rectos en un círculo.

De hecho, nunca se crea o inventa en el vacío o a partir de la nada, sino siempre partiendo de los problemas y soluciones ya existentes (lo que Popper denomina "situaciones problemáticas"), lo cual también establece límites a lo creado o inventado.

Por ello, podemos concluir con Popper: *las matemáticas son a la vez construidas y descubiertas* o, lo que es lo mismo*, los objetos matemáticos son una invención o creación nuestra, pero también existen independientemente de nosotros debido a lo cual deben ser descubiertos.* Pero su modo de existencia no es físico o material ni tampoco meramente psicológico o mental, sino que es el mismo que tienen otras producciones humanas que constituyen el mundo de la cultura: una escultura tampoco se reduce al mármol o a las ideas que tenemos sobre ella.[14]

14. En *El cuerpo y la mente*, Popper cuenta una hermosa anécdota sobre el compositor Joseph Haydn: en su senectud compuso *La creación*, que fue interpretada por primera vez en Viena –en el aula de la antigua Universidad de Viena, un edificio que fue destruido durante la Segunda Guerra Mundial. Después de haber escuchado el maravilloso coro de la introducción, Haydn rompió a llorar y dijo: ''No he sido yo quien ha escrito esto. No podría haberlo hecho''. Popper comenta "cada gran obra de arte trasciende al artista. Al crearla, éste interactúa con su obra: recibe constantemente sugerencias de su obra, sugerencias que señalan más allá de lo que él pretendía originalmente. Si posee la humildad y la autocrítica para prestar oído a estas indicaciones y aprender de ellas, creará una obra que trascenderá sus propias facultades personales" (Popper, 1997b: 68)

Bibliografía

Baker, S. F. (1964). *Philosophy of Mathematics*. Prentice Hall, Nueva Jersey.

Bell, E. T. (2000). *Historia de las matemáticas*. Fondo de Cultura Económica, México.

Benacerraf, P. y H. Putnam (edits.) (1988). *Philosophy of Mathematics. Selected readings*. 2a. edición, Cambridge University Press.

Bernays, P. (1988). "On Platonism in Mathematics", en Benacerraf, P. y H. Putnam (edits.) *Philosophy of Mathematics. Selected readings*. 2a. edición, Cambridge University Press.

Bloor, D. (1998). *Conocimiento e imaginario social*. Gedisa, Barcelona.

Brouwer, L. E. J. (1988). "Intutionism and Formalism" y "Consciousness, Philosophy and Mathematics", en Benacerraf, P. y H. Putnam (edits.). *Philosophy of Mathematics. Selected readings*. 2a. edición, Cambridge University Press.

Collette, J. P. (2000). *Historia de las matemáticas*. I. Siglo XXI, México.

Davis, P. J. y R. Hersh (1998). *The Mathematical Experience*. Houghton Mifflin Company, Nueva York.

Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. State of University of New York Press, New York.

Euclides (2000). *Elementos. Libros I-IV*. Gredos, Madrid.

George, A. y D. J. Velleman (2002). *Philosophies of Mathematics.* Blackwell Publishers, Oxford.

Gödel, K. (1989). *Obras completas.* Alianza Editorial, Madrid.

Körner, S. (1967). *Introducción a la filosofía de las Matemáticas*. Siglo XXI, México.

Nagel, E. y J. R. Newman (1981). *El teorema de Gödel*. Conacyt, México.

Hersh, R. (1997). *What is Mathematics, Really?*, Oxford University Press, Nueva York.

________ (1988). "Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics", en Tymoczko, T. (1988). *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Princeton University Press, Nueva Jersey.

Hilbert, D. (1993). *Fundamentos de las matemáticas*. UNAM, México.

Kline, M. (1999). *El pensamiento matemático desde la antigüedad a nuestros días*. *1*. Alianza Editorial, Madrid.

Lakatos, I. (1994). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Alianza, Madrid.

Levi, B. (2001). *Leyendo a Euclides*. Zorzal, Buenos Aires.

Poincaré, H. (1984). *Filosofía de la ciencia.* Conacyt, México.

Popper, K. R.

________ (1974). "Reply to my Critics", *The philosophy of Karl Popper*, 2. Open Court, La Salle, Illinios.

________ (1990). *La lógica de la investigación científica*. REI-Tecnos, México.

________ (1991). *Conjeturas y refutaciones*. Paidós, Barcelona.

________ (1992). *Conocimiento objetivo.* Tecnos, Madrid.

________ (1994a). *Búsqueda sin término. Una autobiografía intelectual*. Tecnos, Madrid.

________ (1994b). *En busca de un mundo mejor*. Paidós, Barcelona.

________(1994c). *El universo abierto. Un argumento a favor del indeterminismo.* Tecnos, Madrid,

________(1995a). *Realismo y el objetivo de la ciencia. Post-Scriptum a La lógica de la investigación científica*. V.I. Tecnos, Madrid.

________ (1995b). *La responsabilidad de vivir. Escritos sobre política, historia y conocimiento.* Paidós, Barcelona.

________ (1996). *Hacia una teoría evolutiva del conocimiento*. *Un mundo de propensiones.* Tecnos, Madrid.

________ (1997a). *El mito del marco común*. Paidós, Barcelona.

________ (1997b). *El cuerpo y la mente.* Paidós, Barcelona.

________ (1997c). "La selección natural y el surgimiento de la mente", en Olivé León y Martínez (comps.). *Epistemología evolucionista.* UNAM-Paidós, México.

________ (1998). *Los dos problemas fundamentales de la epistemología. Basado en Manuscritos de los años 1930-1933*. Tecnos, Madrid.

________ y J. Eccles (1985). *El yo y su cerebro.* Labor, Barcelona.

Rey Pastor, J. y J. Babini (2000). *Historia de las matemáticas*. Volumen 1. Gedisa, Barcelona.

Shanker, S. (edit.) (1996). *Philosophy of Science, Logic and Mathematics in the Twentieth Century*. Routledge, Nueva York.

Shapiro, S. (2000). *Thinking about Mathematics. The Philosophy of Mathematics.* Oxford University Press.

Tymoczko, T. (1988). *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Princeton University Press, Nueva Jersey.

Wassing, H. (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas.* Siglo XXI, Madrid.