Fernando Orozco Zitli

Conexidad en pequeño y conexidad local en C¿(X)

Ciencia Ergo Sum, vol. 13, núm. 1, marzo-junio, 2006, pp. 75-80,
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Ciencia Ergo Sum,
ISSN (Versión impresa): 1405-0269
ciencia.ergosum@yahoo.com.mx
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Conexidad en pequeño y conexidad local en $C_\infty(X)$

Fernando Orozco Zitli*

Recepción: 30 de marzo de 2005
Aceptación: 13 de octubre de 2005

*** Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México.**
Correo electrónico: forozco@uaemex.mx

El autor agradece a los árbitros por sus observaciones, que contribuyeran a mejorar el artículo.

Resumen. Sean X un continuo y $C_\infty(X)$ el conjunto de los subconjuntos no vacíos y cerrados de X que tienen un número finito de componentes. En este trabajo demostraremos que, para $A \in C_\infty(X)$:
1. $C_\infty(X)$ es localmente conexo en A si y sólo si $C_\infty(X)$ es localmente conexo en cada una de sus componentes.
2. $C_\infty(X)$ es conexo en pequeño en A si y sólo si $C_\infty(X)$ es conexo en pequeño en cada una de sus componentes.

Palabras clave: continuo, conexidad local, conexidad en pequeño, hiperespacios.

Connectedness in Kleinen and Local Connectedness in $C_\infty(X)$
Abstract. This paper investigates the relationships between the continuum X and the hyperspace $C_\infty(X)$ with respect to local and im kleinen point-wise connectivity properties. This work, particularly, proves that $C_\infty(X)$ is locally connected (connected im kleinen) at a component of A and A in $C_\infty(X)$ if and only if $C_\infty(X)$ is locally connected (connected im kleinen) at each component of A.

This article is part of the research project: “Continuum Hyperspaces and Graphic theory”. Key 1829/2004.
Key words: Continuum, Connectedness im Kleinen, local connectedness and hyperspace.

Introducción

Un continuo es un espacio métrico, no vacío, no degenerado, compacto y conexo. Para un continuo X, consideremos 2^X el hiperespacio de los subconjuntos no vacíos y cerrados de X, $C(X)$ el hiperespacio de los subconjuntos no vacíos, cerrados y conexos de X, para cada número natural n, $C_n(X)$ el hiperespacio de los subconjuntos no vacíos y cerrados que tienen a lo más n componentes de X y el hiperespacio $C_\infty(X) = \{A \in 2^X$: A tiene un número finito de componentes$\}$, cada uno con la métrica de Hausdorff. Uno de los primeros resultados acerca de propiedades locales de hiperespacios de un continuo se debe a Wojdyslawski (1939), quien probó que: $2^X(C(X))$ es localmente conexo si y sólo si X es localmente conexo. Goodykoontz (1974, 1977 y 1978) investigó la conexidad local puntual en los hiperespacios 2^X y $C(X)$ con X un continuo. Para más información al respecto de propiedades locales de hiperespacios de espacios más generales que un continuo consultar Dorset (1982a, 1982b, 1984), Goodykoontz y Rhee (1998), Michael (1951), Makuchowski (1999), Tashmetov (1974) y Charatonik e Illanes (1999). Para temas relacionados con los hiperespacios, véase Nadler (1978), Illanes y Nadler (1999) y Macías (1999, 2000 y 2001).

El propósito de este artículo es investigar las relaciones entre un continuo X y el hiperespacio $C_\infty(X)$ concernientes a la conexidad local y la conexidad en pequeño como propiedades puntuales.

1. Preliminares

Sean (Z,d) un espacio métrico, $x \in Z$ y $\varepsilon > 0$, denotamos a la bola abierta con centro en x y de radio ε como: $B_\varepsilon^d(x) = \{y \in Z : d(x,y) < \varepsilon\}$; y para $A \subset Z$, la vecindad de A de radio ε por N $(\varepsilon, A) = \{x \in z$: existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \varepsilon\}$. Denotamos la cerradura (el interior) de un conjunto $A \subset Z$ como $Cl_z(A)$ $(Int_z(A))$. La letra N denota el conjunto de los números naturales.

Sean X un continuo y $A_1,\dots,A_n$ subconjuntos de X, definamos:

$\langle A_1,\dots,A_n \rangle = \{E \in 2^x$: para cada $i \in \{1,\dots, n\}$, $E \cap A_i \neq \emptyset$ y $E\ C^n_{i=1} A_i\}$.

La métrica de Hausdorff para 2^x (Illanes y Nadler, 1999:11), la cual es denotada por H, se define como sigue: para cada $A,B \in 2^x$.

$$H(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B)\ y\ B \subset N(\varepsilon, A)\}$$

La colección de todos los conjuntos de la forma $\langle U_1,\dots, U_n\rangle$, con $U_1,\dots, U_n$ abiertos en X, es una base para una toplogía τ_V para 2^x (Illanes y Nadler, 1999:3). A esta topología se le llama la topología de Vietoris}. Es conocido que la topología inducida por la métrica de Hausdorff coincide con la topología de Vietoris (Nadler, 1978:10). Los hiperespacios 2^x, $C(X)$ y $C_n(X)$ resultan ser continuos con la métrica de Hausdorff (Nadler, 1978:7, 63,65).

Sea $\mathsf{H} \in \{2^x, C(X), C_m(X), C_\infty(X)\}$. Un arco ordenado en H es un arco $\propto$ en H tal que si $A, B \in _\infty$, entonces $A \subset B$ o $B \subset A$.

Si A, B $\in \mathsf{H}$ con $A \neq B$, entonces existe un arco ordenado de A a B en H si y sólo si $A \subset B$ y cada componente de B intersecta a A, ver Teorema 1.8 de (Nadler, 1978:59).

Sean X un continuo y $U_1,\dots,U_n$ subconjuntos de X. Hagamos:

$\langle U_1,\dots,U_n\rangle_\infty = \langle U_1,\dots,U_n\rangle \cap C_\infty(X)$ y

$\langle U_1,\dots,U_n\rangle_m = \langle U_1,\dots,U_n\rangle \cap C_m(X)$.

Es fácil probar que, si son abiertos en X, entonces:

$\langle C1_x(U_1),\dots, C1_x(U_n)\rangle_\infty = Cl\, c_\infty(x)\, (\langle U_1,\dots,U_n\rangle_\infty)$.

Si A es un conexo en 2^x y $\mathsf{A} \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\cup\mathsf{A}$ es un conexo en X, ver Lema 1.2 de Kelley (1942:23).

Se puede probar que, si V es un conexo en un continuo X y $m \in N$, entonces el conjunto $\{A \subset V : A \neq \emptyset$ y A tiene a lo más m elementos$\}$ es conexo en $C_m(X)$.

Sea Z un espacio topológico. Decimos que Z es localmente conexo en p (con $p \in Z$) si para cada abierto U en Z tal que $p \in U$, existe un abierto y conexo V en Z tal que $p \in V \subset U$. El espacio Z es conexo en pequeño en un punto p (con $p \in Z$) si para cada conjunto abierto U tal que $p \in U$, existe una vecindad conexa V de p en Z contenida en U.

En lo sucesivo la letra X denotará un continuo, la letra d una métrica para X y la letra H la métrica de Hausdorff para el hiperespacio 2^x.

Proposición 1. Si A es un abierto en $C_\infty(X)$ entonces $\bigcup\mathsf{A}$ es un abierto en X.

Demostración. Sea $x \in \bigcup\mathsf{A}$. Entonces existe $M \in \mathsf{A}$ tal que $x \in M$. Como A es un abierto en $C_\infty(X)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon^H(M) \cap C_\infty(X) \subset \mathsf{A}$. Demostraremos que $B_\varepsilon^d(x) \subset \cup\, \mathsf{A}$. Tomemos $y \in B_\varepsilon^d(x)$. Hagamos $J = M \cup \{y\}$. Notemos que $J \in C_\infty(X)$. Dado que $d(x, y) < \varepsilon$, se tiene que $J \subset N(\varepsilon, M)$. Ahora bien, usando $M \subset N(\varepsilon, J)$ se sigue que $H(M, J) < \varepsilon$. Así que $J \in A$. Esto indica que $y \in \mathsf{A}$ y que $\bigcup A$ es un abierto en X. Termina la prueba de la proposición. ¥

Proposición 2. Si $V_{1,\dots,}V_k$ son abiertos y conexos en X tales que cada $V_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} U_j^i$, donde $U_1^i,\dots,U_m^i$ son abiertos en X, entonces: $\langle U_1^1,\dots,U_{m1}^1,\dots,U_1^k,\dots,U_{mk}^k\rangle_\infty$ es conexo en $C_\infty(X)$.

Demostración. La prueba de este teorema se obtiene de una modificación del último párrafo de la demostración de la suficiencia del Teorema 5 de (Goodykoontz, 1974:395). ¥

2. Conexidad local

Teorema 3. Sea $M \in C(X)$. Entonces $C_\infty(X)$ es localmente conexo en M si y sólo si para cada abierto U en X que contenga a M, existe un abierto y conexo V en X tal que $M \subset V \subset U$.

Demostración. Sea $M \in C(X)$. Para la necesidad, tomemos un abierto U en X que contenga a M. Dado que $M \in \langle U\rangle_\infty$, por la conexidad local de $C_\infty(X)$ en M, existe un abierto y conexo $\mathcal{V}$ de $C_\infty(X)$ tal que $M \in \mathcal{V} \subset \langle U\rangle_\infty$. Entonces $\bigcup\mathcal{V}$ es conexo en X y $M \subset \bigcup\mathcal{V} \subset U$. Por la Proposición 1, se sigue que $\bigcup\mathcal{V}$ es abierto. Esto muestra la necesidad.

Ahora, para la suficiencia, sea $\langle U_{1,\dots,}U_n\rangle_\infty$ un abierto en $C_\infty(X)$ tal que $M \in \langle U_{1,\dots,}U_n\rangle_\infty$. Consideremos $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Como $M \subset U$, por hipótesis, existe un abierto y conexo V tal que $M \subset V \subset U$. Por cada $i \in \{1,\dots,n\}$, hagamos $V_i = U_i \cap V$. Observemos que $M \in \langle V_{1,\dots,}V_n\rangle_\infty \subset \langle U_{1,\dots,}U_n\rangle_\infty$. Dado que $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ y cada V_i es abierto en X, por la Proposición 2, tenemos que $\langle V_{1,\dots,}V_n\rangle_\infty$ es conexo en $C_\infty(X)$. Esto termina la demostración de la suficiencia y la del teorema. ¥

Corolario 4. Sea $x \in X$. Entonces $C_\infty(X)$ es localmente conexo en $\{x\}$ si y sólo si X es localmente conexo en x.

Corolario 5. Sean $x \in X$ y $m \in N$. Si X es localmente conexo en x, entonces $C_m(X)$ es localmente conexo en $\{x\}$.

Demostración. Sean $x \in X$ y $\langle U_1,\dots, U_n\rangle_m$ un abierto en $C_m(X)$ tales que $\{x\} \in \langle U_1,\dots, U_n\rangle_m$. Dado que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, por hipótesis, existe un abierto y conexo V tal que $x \in V \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Notemos que $\{x\} \in \langle V\rangle_m$. Probaremos que $\langle V\rangle_m$ es conexo en $C_m(X)$. Hagamos $\mathcal{A} = \{A \subset V : A \neq \emptyset$ y $\mathcal{A}$ tiene a lo más m elementos$\}$.

Tomemos $E \in \langle V\rangle_m \setminus \mathcal{A}$. Es fácil probar que existe un arco ordenado $\propto$ en $C_m(X)$ de $\{e_1,\dots,e_r\}$ a E para algún $\{e_1,\dots,e_r\} \in \mathcal{A}$. Dado que $\propto \subset \langle V\rangle_m$ y $\mathcal{A}$ es conexo en $C_m(X)$, entonces se tiene que $\langle V\rangle_m$ es conexo en $C_m(X)$.

Dado que $V \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, se deduce que $\langle V\rangle_m \subset \langle U_1,\dots, U_n\rangle_m$ Por lo tanto $C_m(X)$ es localmente conexo en $\{x\}$. ¥

El regreso del corolario 5 no es cierto. El ejemplo que muestra esto es el Ejemplo 1 de Goodykoontz (1974:392).

Teorema 6. Sea $A \in C_\infty(X)$. Entonces $C_\infty(X)$ es localmente conexo en A si y sólo si $C_\infty(X)$ es localmente conexo en cada una de las componentes de A.

Demostración. Sean $A_1,\dots, A_n$ las componentes de A. Sólo probaremos que $C_\infty(X)$ es localmente conexo en A_1, la demostración para las demás componentes es similar. Consideremos un abierto W en X que contenga A_1. Tomemos abiertos $U_1,\dots,U_n$ en X tales que $A_i \subset U_i$ para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, $U_i \cap U_j = \emptyset$, si $i \neq j$ y $A_1 \subset U_1 \subset W$. De donde $A \in \langle U_1,\dots,U_n\rangle_\infty$. Por la conexidad local de $C_\infty(X)$ en A, existe un abierto y conexo C en $C_\infty(X)$ tal que $A \in C \subset \langle U_1,\dots,U_n\rangle_\infty$. Definimos $f: \langle U_1,\dots, U_n\rangle_\infty \to \langle U_1\rangle_\infty$ como $f(B) = B \cap U_1$. La función f está bien definida. Si $\langle W_1,\dots,W_p\rangle_\infty \subset \langle U_1\rangle_\infty$, con $W_1,\dots,W_p$ abiertos en X, entonces:

$$f^{-1}(\langle W_1,\dots,W_p\rangle_\infty) = \langle W_1,\dots,W_p, U_2,\dots, U_n\rangle_\infty \cap \langle U_1,\dots, U_n\rangle_\infty$$

Así que f es continua. Por lo que $f(C)$ es conexo en $\langle U_1\rangle_\infty$. Notemos que $f(A) = A_1 \in f(C)$. Entonces $\bigcup f(C)$ es conexo en X.

Necesitamos probar que $f(C)$ es abierto en $C_\infty(X)$. Sean $E \in C$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B_\varepsilon^H(E) \cap C_\infty(X) \subset C$. Hagamos $\mathcal{U} = B_\varepsilon^H(f(E)) \cap \langle U_1\rangle_\infty$. Elegimos $D \in \mathcal{U}$. Denotemos $K = D \cup (E \setminus f(E))$. Es claro que $K \in C_\infty(X)$. Debido a que $E = f(E) \cup (E \setminus f(E))$ y $H(D, f(E)) < \varepsilon$, se deduce que $H(E, K) < \varepsilon$. Así que $K \in C$. Como $(E \setminus f(E)) \cap U_1 = \emptyset$ y $D \subset U_1$, deducimos que $K \cap U_1 = D$. Se concluye que $f(K) = D \in f(C)$. Esto prueba que $\mathcal{U} \subset f(C)$ y $f(C)$ es abierto en $\langle U_1\rangle_\infty$. De donde $f(C)$ es abierto en $C_\infty(X)$.

Por la Proposición 1, $\bigcup f(C)$ es abierto en X. Dado que $A_1 \subset \bigcup f(C) \subset U_1 \subset W$, por el Teorema 3, $C_\infty(X)$ es localmente conexo en A_1.

Supongamos ahora que $C_\infty(X)$ es localmente conexo en cada A_i. Probaremos que $C_\infty(X)$ es localmente conexo en A. Consideremos $\varepsilon > 0$. Usando la compacidad de cada A_i, podemos elegir $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ y puntos $a_1^i,\dots a_{m_i}^i \in A_i$ tales que $A_i \subset \bigcup_{j=1}^{m_i} B_\delta(a_j^i)$ para cada $i \in \{1,\dots, n\}$ y

$(\bigcup_{j=1}^{m_i} B_\delta(a_j^i)) \cap (\bigcup_{j=1}^{m_s} B_\delta(a_j^s)) = \emptyset$, si $i \neq s$. Como $C_\infty(X)$ es localmente conexo en cada A_i, por el Teorema 3, se tiene que, por cada $i \in \{1,\dots, n\}$, existe un abierto y conexo V_i tal que $A_i \subset V_i \subset \bigcup_{j=1}^{m_i} B_\delta(a_j^i)$.

Por cada $i\in \{1,\ldots, n\}$ y por cada $j\in \{1,\ldots, m_i\}$, hagamos $V_j^i = B_\delta(a_j^i)\cap V_i$. Notemos que $V_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} V_j^i$ para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$. Por la Proposición 2, se tiene que $\left\langle V_1^1,\ldots, V_{m1}^1,\ldots,V_1^n,\ldots,V_{m_n}^n \right\rangle_\infty$ es conexo en $C_\infty(X)$. Claramente $A\in \left\langle V_1^1, \ldots,V_{m1}^1,\ldots,V_1^n,\ldots,V_{m_n}^n \right\rangle$. Veamos que $\left\langle V_1^1,\ldots,V_{m1}^1,\ldots,V_1^n,\ldots,V_{m_n}^n \right\rangle \subset B_\varepsilon^H(A)$. Tomemos $G\in \left\langle V_1^1,\ldots,V_{m1}^1,\ldots,V_1^n,\ldots,V_{m_n}^n \right\rangle$ y $g\in G$. Entonces $g \in V_j^i$ para algún $i \in \{1,\ldots,n\}$ y para algún $j \in \{1,\ldots,m_i\}$. De donde $d(g, a_j^i) < \delta$. Así que $G\subset N(\varepsilon, A)$. Ahora, consideremos $x\in A$. Por lo que $d(x, a_j^i) < \delta$ para algún $j\in \{1,\ldots,m_i\}$ y para algún $i\in \{1,\ldots,n\}$. Como $G \cap V_j^i \neq \emptyset$ elegimos $y\in G\cap V_j^i$. Entonces $d(x, y) \le d(y, a_j^i) + d(x, a_j^i) < \varepsilon$. Con esto, $A\subset N(\varepsilon,G)$. Se sigue que $H(A, G) < \varepsilon$. Concluimos que $\left\langle V_1^1,\ldots,V_{m1}^1,\ldots,V_1^n,\ldots,V_{m_n}^n \right\rangle \subset B_\varepsilon^H(A)$. Esto demuestra que $C_\infty(X)$ es localmente conexo en A. ¥

3. Conexidad en pequeño

Teorema 7. Sea $M \in C(X)$. Entonces $C_\infty(X)$ es conexo en pequeño en M si y sólo si para cada abierto U que contenga a M, existe una componente de U que contiene a M en su interior.

Demostración. Para la necesidad, sean U un abierto en X tal que $M\subset U$ y C la componente de U tal que $M\subset C$. Demostraremos que $M\subset \mathrm{Int}_x(C)$. Como $M\in \langle U\rangle_\infty$ y $C_\infty(X)$ es conexo en pequeño en M, existe una vecindad conexa $\mathcal{V}$ de M en $C_\infty(X)$ tal que $\mathcal{V}\subset \langle U\rangle_\infty$. Dado que $\mathcal{V}$ es un conexo de $C_\infty(X)$ y $M\in \mathcal{V}\cap C(X)$, se deduce que $\bigcup\mathcal{V}$ es un conexo en X. Ahora bien, debido a que C es la componente de U que contiene a M y $M\in \mathcal{V}\subset\langle U\rangle_\infty$, obtenemos que $M\subset \bigcup\mathcal{V}\subset C$. Como $\mathcal{V}$ es una vecindad de M en $C_\infty(X)$, usando la Proposición 1, se tiene que $M\subset \mathrm{Int}_x(C)$. Esto demuestra la necesidad del teorema.

Ahora, para la suficiencia, sea $\langle U_1,\ldots,U_n\rangle_\infty$ un abierto en $C_\infty(X)$ tal que $M\in \langle U_1,\ldots,U_n\rangle_\infty$. Consideremos abiertos $V_1,\ldots,V_m$ en X tales que:

$$M\in \left\langle V_1,\ldots,V_m\right\rangle_\infty \subset Cl_{C_\infty(x)}\left(\left\langle V_1,\ldots,V_m\right\rangle_\infty\right)\subset \left\langle U_1,\ldots,U_n\right\rangle_\infty .$$

Hagamos $V=\bigcup_{i=1}^{m} V_i$. Por hipótesis existe una componente C de V tal que $M\subset \mathrm{Int}_x(C)$. Por cada $i\in\{1,\ldots,m\}$ denotemos $W_i = V_i\cap \mathrm{Int}_x(C)$. Observemos que $M\in \langle W_1,\ldots,W_m\rangle_\infty$ y que si, $A\in \langle W_1,\ldots,W_m\rangle_\infty$, entonces A es un subconjunto de $\mathrm{Cl}_X(C)$ y A, $\mathrm{Cl}_X(C) \in \langle \mathrm{Cl}_X(V_1),\ldots,\mathrm{Cl}_X(V_m)\rangle_\infty$. De donde, por cada $A\in\langle W_1,\ldots,W_m\rangle_\infty$, existe un arco ordenado α_A en $C_\infty(X)$ que une a A con $\mathrm{Cl}_X(C)$. Sea $\mathcal{V}=\bigcup\left\{\alpha_A : A\in \left\langle W_1,\ldots,W_m\right\rangle_\infty\right\}$. Entonces $\mathcal{V}$ es una vecindad conexa de M. De que $\langle \mathrm{Cl}_X(V_1),\ldots,\mathrm{Cl}_X(V_m)\rangle_\infty = \mathrm{Cl}_{C_\infty(X)}(\langle V_1,\ldots,V_m\rangle_\infty)\subset \langle U_1,\ldots,U_n\rangle_\infty$, se sigue que $\mathcal{V}\subset \langle U_1,\ldots,U_n\rangle_\infty$. Esto termina la prueba de la suficiencia. ¥

Corolario 8. Sea $x\in X$. Entonces $C_\infty(X)$ es conexo en pequeño en $\{x\}$ si y sólo si X es conexo en pequeño en x.

Teorema 9. Sea $A\in C_\infty(X)$. Entonces $C_\infty(X)$ es conexo en pequeño en cada componente de A si y sólo si $C_\infty(X)$ es conexo en pequeño en A.

Demostración. Consideremos $A_1,\ldots,A_n$ las componentes de A y que $C_\infty(X)$ es conexo en pequeño en A. Sea W un abierto en X que contenga a A_1. Tomemos abiertos $U_1,\ldots,U_n$ en X tales que $A_i\subset U_i$ para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$, $U_1\cap U_j=\emptyset$ si $i\neq j$, y $A_1\subset U_1\subset W$. Entonces $A\in\langle U_1,\ldots,U_n\rangle_\infty$. Sea $\mathcal{C}$ una vecindad conexa de A en $C_\infty(X)$ tal que $\mathcal{C}\subset\langle U_1,\ldots,U_n\rangle_\infty$. Definimos $f\colon \mathcal{C}\to\langle U_1\rangle_\infty$ como $f(B) = B\cap U_1$. Elegimos $\langle V_1,\ldots,V_p\rangle_\infty$ un abierto en $\langle U_1\rangle_\infty$. Es fácil ver que:

$$f^{-1}\left(\left\langle V_1,\ldots,V_p\right\rangle_\infty\right)=\left\langle V_1,\ldots,V_p,U_2,\ldots,U_n\right\rangle_\infty \cap\mathcal{C}$$

Con esto, f es continua.

Así que $f(\mathcal{C})$ es un conexo en $\langle U_1\rangle_\infty$. Notemos que $f(A) = A_1\in f(\mathcal{C})$. De donde $\bigcup f(\mathcal{C})$ es un conexo en X. Es claro que $A_1\subset \bigcup f(\mathcal{C})\subset U_1\subset W$. Sea $U = f(\mathcal{C})$. Mostraremos que $A_1\subset \mathrm{Int}_x(U)$. Tomemos $x\in A_1$ y $\varepsilon>0$ tales que $B_\varepsilon^d(x)\subset U_1$ y $B_\varepsilon^H(A)\subset\mathcal{C}$. Probaremos que $B_\varepsilon^d(x)\subset U$. Consideremos $y\in B_\varepsilon^d(x)$. Entonces $A\cup\{y\}\subset N(\varepsilon, A)$. Dado que $A\subset N(\varepsilon, A\cup\{y\})$ se tiene: $A\cup\{y\}\in B_\varepsilon^H(A)$. Esto significa que $A\cup\{y\}\in\mathcal{C}$ y $f(A\cup\{y\})\in f(\mathcal{C})$. Como $B_\varepsilon^d(x)\subset U_1$, se concluye que $y\in U_1$. Por lo que $y\in f(A\cup\{y\})$ y $y\in U$. Concluimos que $B_\varepsilon^d(x)\subset U$ y $A_1\subset \mathrm{Int}_x(U)$.

Por lo tanto, por el Teorema 7, $C_\infty(X)$ es conexo en pequeño en A_1.

Supongamos ahora que $C_\infty(X)$ es conexo en pequeño en cada A_i. Probaremos que $C_\infty(X)$ es conexo en pequeño en A. Consideremos $\varepsilon>0$. Por cada $i\in\{1,\ldots,n\}$, hagamos $V_i=\bigcup(B_\varepsilon^H(A_i)\cap C_\infty(X))$. Entonces cada V_i es abierto en

X. Elegimos, para cada $i \in \{1,...,n\}$, un abierto V_i' en X tal que $A_i \subset V_i$' y $\mathrm{Cl}_x(V_i') \subset V_i$. Como $C_\infty(X)$ es conexo en pequeño en cada A_i, por el Teorema 7, existe una componente C_i de V_i' tal que $A_i \subset \mathrm{Int}_x(C_i)$ por cada $i \in \{1,...,n\}$. Notemos que $\mathrm{Cl}_x(C_i) \subset V_i$ por cada $i \in \{1,...,n\}$. Denotemos G = $\bigcup_{i=1}^{n} Cl_X(C_i)$. Observemos que $A \subset$ G. Veamos que G $\in B_\varepsilon^H(A) \cap C_\infty(X)$. Tomemos g $\in$ G. De donde g $\in \mathrm{Cl}_x(C_i)$ para algún $i \in \{1,...,n\}$. Consideremos K $\in B_\varepsilon^H(A_i) \cap C_\infty(X)$ tal que g $\in$ K. Dado que K $\subset N(\varepsilon, A_i)$, existe $\alpha \in A_i$ tal que d (a, g) < ε. De donde g $\in N(\varepsilon, A)$. Así que G $\subset N(\varepsilon, A)$. Ahora, debido a que $A \subset$ G, se sigue que $A \subset N(\varepsilon, G)$. Por lo que H(G, A)< ε. Esto muestra que G $\in B_\varepsilon^H(A) \cap C_\infty(X)$.

Por cada $i \in \{1,...,n\}$, hagamos $U_i = \mathrm{Int}_x(C_i)$. Necesitamos demostrar que: si E $\in \langle U_1,...,U_n\rangle_\infty$, entonces cada componente de G intersecta a E. Sean E $\in \langle U_1,...,U_n\rangle_\infty$ y K una componente de G. Entonces existe $i \in \{1,...,n\}$ tal que $C_i \subset$ K. Dado que E $\in \langle U_1,...,U_n\rangle_\infty$, se sigue que E $\bigcap U_i \neq \emptyset$. Así, como $U_i \subset C_i$, se obtiene que E$\bigcap$K$\neq \emptyset$.

Sea $\mathcal{W} = B_\varepsilon^H(A) \cap \langle U_1,...,U_n\rangle_\infty$. Observemos que $A \in \mathcal{W}$. Por cada $E \in \mathcal{W}$, existe un arco ordenado α_E de E a G en $C_\infty(X)$. Hagamos $\mathcal{V} = \bigcup\{\alpha_E: E \in \mathcal{W}\}$. De esto, $\mathcal{V}$ es un vecindad conexa de A. Probaremos que $\mathcal{V} \subset B_\varepsilon^H(A) \cap C_\infty(X)$. Sea $L \in \mathcal{V}$. Entonces $E \subset L \subset$ G para algún $E \in \mathcal{W}$. Ahora bien, debido a que H(E, A) < ε y H(G, A) < ε, se tiene que $A \subset N(\varepsilon, L)$ y $L \subset N(\varepsilon, A)$. Se concluye que H($L$, A) < ε y $L \in B_\varepsilon^H(A) \cap C_\infty(X)$. Con esto, $\mathcal{V} \subset B_\varepsilon^H(A) \cap C_\infty(X)$.

Concluimos que $\mathcal{V}$ es una vecindad conexa de A contenida en $B_\varepsilon^H(A) \cap C_\infty(X)$. Por lo tanto $C_\infty(X)$ es conexo en pequeño en A. Termina la prueba del teorema. ¥

Teorema 10. Sea M $\in C_m(X)$. Si $C_\infty(X)$ es conexo en pequeño en M, entonces $C_m(X)$ es conexo en pequeño en M.

Demostración. Sean M $\in C_m(X)$ y $\langle U_1,...,U_n\rangle_m$ un abierto en $C_m(X)$ tales que M $\in \langle U_1,...,U_n\rangle_m$. Consideremos $\langle V_{1,...,}V_k\rangle_\infty$ un abierto en $C_\infty(X)$ tal que M $\in \langle V_{1,...,}V_k\rangle_\infty$ y $\mathrm{Cl}_{C_\infty(X)}(\langle V_1,...,V_k\rangle_\infty) \subset \langle U_1,...,U_n\rangle_\infty$. Dado que $C_\infty(X)$ es conexo en pequeño en M, existe una vecindad conexa C de M tal que $C \subset \langle V_1,...,V_m\rangle_\infty$. Entonces $\mathrm{Cl}_{C_\infty(X)}(C)$ es un subcontinuo de $C_\infty(X)$ con tenido en $\langle U_1,...,U_n\rangle_\infty$. Hagamos G = $\bigcup \mathrm{Cl}_{C_\infty(X)}(C)$. Como M $\in \mathrm{Cl}_{C_\infty(X)}(C)$, por el Lema 3.1 de Hosokawa (1997), se sigue que cada componente de G intersecta a M. Deducimos que G tiene a lo más m componentes y G $\in C_m(X)$. Como $\mathrm{Cl}_{C_\infty(X)}(C) \subset \langle U_1,...,U_n\rangle_\infty$, resulta que G $\in \langle U_1,...,U_n\rangle_m$. Consideremos un abierto A en $C_\infty(X)$ tal que M $\in \mathcal{A} \subset C$. Dado que $\mathcal{A}$ es abierto en X (ver Proposición 1) contenido en G, se deduce que, si F $\in \mathcal{A}$, entonces F es un subconjunto propio de G.

Sea $\mathcal{U} = \mathcal{A} \cap C_m(X)$. Por el Lema 3.1 de Hosokawa (1997), si E $\in \mathrm{Cl}_{C_\infty(X)}(C)$, entonces, cada componente de G intersecta a E. Así que, por cada E $\in \mathcal{U}$, existe un arco ordenado α_E de E a G en $C_m(X)$. Hagamos $\mathcal{V} = \bigcup\{\alpha_E$: E $\in \mathcal{U}\}$. Observemos que M $\in \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ y que $\mathcal{V}$ es conexo en $C_m(X)$. Probaremos que $\mathcal{V} \subset \langle U_1,...,U_n\rangle_m$. Tomemos $L \in \mathcal{V}$. Entonces existe E $\in \mathcal{U}$ tal que $E \subset L \subset$ G. Dado que E $\in C$ y $C \subset \langle U_1,...,U_n\rangle_\infty$, se tiene que E $\cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1,...,n\}$. De donde $L \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1,...,n\}$. Como G$\in \langle U_1,...,U_n\rangle_m$, se deduce que $L \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Así que $L \in \langle U_1,...,U_n\rangle_m$. Concluimos que $\mathcal{V} \subset \langle U_1,...,U_n\rangle_m$. Por lo tanto $C_m(X)$ es conexo en pequeño en M.¥

El regreso de este teorema no es cierto, ver el Ejemplo posterior al Teorema 6 de Rogers (1972).

Corolario 11. Si $C_\infty(X)$ es conexo en pequeño en A y A tiene n componentes, entonces $C_m(X)$ es conexo en pequeño en cada componente de A para cada m ¸ n.

Demostración. Supongamos que $C_\infty(X)$ es conexo en pequeño en A. Por el Teorema 9, $C_\infty(X)$ es conexo en pequeño en cada componente de A. Dado que cada componente de A pertenece a $C_m(X)$, por el Teorema 10, $C_m(X)$ es conexo en pequeño en cada componente de A. ¥

Corolario 12. Sea M $\in C(X)$. Si para cada abierto U que contenga a M, existe una vecindad conexa V de M tal que V $\subset$ U, entonces $C_m(X)$ es conexo en pequeño en M.

Preguntas:

¿Son ciertos los análogos al Teorema 10 y al Corolario 11 para conexidad local?

¿Es cierto el regreso del Corolario 12?

Bibliografía

Charatonik, J. J. y A. Illanes (1999). "Local connectedness in hyperspaces", *Rocky Mountain J. Math*.

Dorsett, C.

______ (1982a). "Connectedness im Kleinen in Hyperspaces", *Math Chronicle*, 11:31-36.

______ (1982b). "Local Connectedness in Hyperspaces", *Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo*. Palermo, Italia.

______ (1984). "Connectivity Properties in Hyperspaces and Product Spaces", *Fund. Math*.

Goodykoontz, J. T., Jr. (1974). "Connectedness im Kleinen and Local Connectedness in 2^X and $C(X)$", *Pacif. J. Math*.

Goodykoontz, J. T., Jr.

______ (1977). "More on Connectedness im Kleinen and Local Connectedness in $C(X)$", *Proc. Amer. Math. Soc*.

——— (1978). "Local Arcwise Connectedness in 2^X and $C(X)$", *Houston J. Math*.

Goodykoontz, J. T. Jr.y C. J. Rhee (1998). "Local Properties of Hyperspaces", *Topology Proc*.

Hosokawa, H. (1997). "Induced Mappings on Hyperspaces", *Tsukuba J. Math*.

Illanes, A. y S. B. Nadler Jr. (1999). *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*. Marcel Dekker, New York.

Kelley, J. L. (1942). "Hyperspaces of Continuum", *Trans. Amer. Math. Soc*.

Macías, S. (1999). "On Symmetric Products of Continua", *Topology Appl*.

Macías, S. (2000). "On the Hyperspace $C_n(X)$ of a Continuum X, II", *Topology Appl*.

Macías, S. (2001). "On the Hyperspace $C_n(X)$ of a Continuum X", *Topology Appl*.

Makuchowski, W. (1999). "On Local Connectedness in Hyperspaces", *Bull. Polish Acad. Sci. Math*.

Michael, E. (1951). "Topologies on Spaces of Subsets", *Trans, Amer. Math. Soc*.

Nadler, S. B., Jr. (1978). *Hyperspaces of Sets*. Marcel Dekker, New York.

Rogers, J. T., Jr. (1972). "The Cone = Hyperspace Property ", *Canad. J. Math*.

Tashmetov, U. (1974). "On the Connectedness and Local Connectedness of Some Hyperspaces", *Siberian Math. J*.

Wojdyslawski, M. (1939). "Rétractes Absolus et Hyperespaces des Continus", *Fund. Math*.