Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal
Sistema de Información Científica

Emilio Lluis-Puebla

Teorías matemáticas, matemática aplicada y computación

Ciencia Ergo Sum, vol. 13, núm. 1, marzo-junio, 2006, pp. 91-98,
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=10413112

Ciencia Ergo Sum,
ISSN (Versión impresa): 1405-0269
ciencia.ergosum@yahoo.com.mx
Universidad Autónoma del Estado de México
México

¿Cómo citar? | Fascículo completo | Más información del artículo | Página de la revista

www.redalyc.org
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

Recepción: 17 de noviembre de 2005.
Aceptación: 9 de enero de 2006.

* Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México.
Correo electrónico:
lluisp@servidor.unam.mx

Texto correspondiente a la conferencia invitada para conmemorar el Día del Matemático. Facultad de Ciencias. Universidad Autónoma del Estado de México (1 de julio de 2005).

Teorías matemáticas, matemática aplicada y computación

Emilio Lluis-Puebla*

Al Dr. Guillermo Moreno en su L aniversario

La matemática es una de las Bellas Artes,
la más pura de ellas,
que tiene el don de ser
la más precisa
y la precisión de las Ciencias.

Introducción

Muchas personas, colegas, estudiantes y en especial mis propios alumnos, me han solicitado que escriba acerca de la matemática y los matemáticos. Correspondo a esta petición esperando que esta información ayude a comprender esta ciencia y a quienes la practican.

Algunas de las ideas expresadas en este artículo son mías y otras, provienen de las fuentes mencionadas en la bibliografía. En particular, he tomado muchas del matemático Michael Atiyah. Desde mis años de estudio profesional y de posgrado he leído sus artículos de divulgación, las entrevistas que le han realizado, escuchado sus conferencias, estudiado sus textos y artículos de investigación, en particular los de K-teoría. Sin duda es uno de los más destacados matemáticos de la segunda mitad del siglo XX y uno de los pensadores más acertados de la matemática, por esto deseo transmitirles un poco de su pensamiento y visión de nuestra disciplina.

La matemática posee una enorme aplicabilidad y constituye un lenguaje y marco indispensable, para todas las ciencias. Ésta es la razón por la cual no solamente unos cuantos individuos dedican su vida a ella sino que es materia de estudio en el sistema educativo y parte de la escena social.

La investigación matemática es la disciplina científica más alejada del hombre de la calle quien no posee absolutamente ninguna idea acerca de ella, porque generalmente identifica la matemática con las ideas que pudo absorber –a menudo sin éxito– en la escuela primaria o secundaria. La matemática o lo que cree que es, le parece fría y cruda, sin vida (incluso habla de la frialdad de los números). Difícilmente se imagina que la matemática fue creada en el pasado y sigue creándose en el presente. Le es difícil comprender el hecho de que sea una disciplina intelectual abstracta y que posea una existencia independiente y floreciente.

El egresado de una licenciatura generalmente no se dedica al estudio de su profesión, más bien la utiliza o la aplica, por eso para dedicarse realmente a la matemática es necesario realizar estudios de posgrado a vivir el maravilloso mundo de esta ciencia. Los egresados de una licenciatura de matemática pueden y deben encontrar trabajo como cualquier otro egresado de una licenciatura, es cosa de hacerles ver, a quienes contratan personal, las enormes ventajas que tiene contratar matemáticos. Muchos licenciados en matemática se dedican a la docencia, sobretodo en los niveles de primaria, secundaria o preparatoria. Las escuelas les exigen la licenciatura terminada, con una estupenda preparación y que deseen ser docentes por vocación;

capaces de motivar e infundir en los jóvenes un verdadero amor al conocimiento científico y artístico.

1. Características de la matemática

La matemática posee varias características que la hacen diferir de otras disciplinas. La primera es que es muy difícil describir o definir su materia de estudio, lo cual resulta bastante claro en algunas áreas como la astronomía o la biología, pero no en la K-teoría algebraica; esto se debe fundamentalmente a que los objetos de estudio son conceptos definidos de manera abstracta y van encadenados a otros previamente definidos. Su descripción se reduce a definiciones formales que requieren de conexiones neuronales las cuales necesitan cierto tiempo para realizarse. Esto, aunado a una madurez matemática o entrenamiento matemático, le permite al ser humano asimilar una buena cantidad de ideas abstractas. Por ejemplo, trate usted de explicarle a su "sobrinita preguntona" qué es la adición, o de qué se trata la geometría analítica, o qué es un anillo. Requerirá, después de muchas explicaciones intuitivas, establecer definiciones formales y mucho tiempo.

La segunda característica es que posee una lógica perfecta. La matemática de Euclides es tan válida hoy como en aquella época. Esto contrasta con otras teorías como la de la Tierra plana o la del flogisto o la del éter.

La tercera es lo conclusivo de la matemática, es decir, las diferentes disciplinas toman conclusiones con base en las manipulaciones matemáticas.

La cuarta es su independencia, es decir, que no requiere de equipos costosos a diferencia de las ciencias experimentales. Basta a veces un lápiz y papel o ni siquiera esto. Arquímedes dibujaba sobre la arena, Leray escribió su matemática siendo prisionero de guerra. A pesar de los regímenes políticos de toda índole, la matemática continúa evolucionando. Es interesante observar que sus bibliotecas son menos grandes que las de otras disciplinas.

1.1. ¿Qué significa la palabra matemática?

Arrigo Coen afirma que *mathema* significa erudición, *manthánein* es el infinitivo de aprender, el radical *mendh* significa, en pasivo, ciencia, saber, es decir, es lo relativo al aprendizaje. En sentido implícito, matemática significa: "lo digno de ser aprendido".

1.2. ¿Qué es la matemática?

No existe una definición de lo que es la matemática, sin embargo, se dice que es una colección de ideas y técnicas para resolver problemas que provienen de cualquier disciplina incluyendo a la matemática misma.

1.3. Algunos problemas matemáticos

El famoso último teorema de Fermat (el cual sucede al de la ecuación pitagórica $x^2+y^2=z^2$) dice que la ecuación $x^n+y^n=z^n$ nunca tiene soluciones enteras positivas para cualquier entero positivo n mayor que 2. Excepto para $n=2$, estas ecuaciones no tienen una interpretación geométrica. Aparentemente este problema no pareciera tener mucha importancia, sin embargo, ha tenido una influencia enorme en el desarrollo de la matemática. Fermat dijo que tenía una demostración, pero que no tenía espacio para escribirla. Por más de 300 años este problema ha sido el motivo de grandes esfuerzos de muchos matemáticos y es precisamente de éstos esfuerzos que se han creado nuevas técnicas y conceptos que tienen influencia en muchas áreas de la matemática.

El problema de los cuatro colores afirma que éstos solamente se requieren para colorear cualquier mapa del globo terrestre con la condición de que dos países adyacentes deban tener tonos diferentes. La solución positiva, más de cien años después, fue obtenida mediante el uso de la computadora, teniendo un impacto muy pequeño en la matemática. Fue el primer problema no trivial solucionado por la computadora.

En la matemática, si un problema se resuelve mediante métodos estándares pierde mucho de su interés; si no se resuelve mediante los métodos conocidos se convierte en un problema clásico. Un buen problema es aquel que da lugar a nuevas técnicas con gran aplicabilidad a otras áreas, esto es, las ideas nuevas que constituyen los pasos para obtener la solución de algún problema representan el progreso de la matemática.

2. ¿Qué es la investigación matemática?

Existen aspectos contrastantes y alternativas dentro de la investigación matemática. Veamos algunos.

Existen diferencias entre lo que realiza un matemático puro y uno aplicado, aunque también hay una interrelación entre los dos.

En cuanto a la matemática pura, está la alternativa acerca de la teoría matemática y la resolución de problemas. Existe una gran variedad de problemas, si algunos de ellos se pueden resolver mediante argumentos ingeniosos de una manera parecida, entonces decimos que tenemos un método para resolverlos y si éstos son muchos, entonces decimos que tenemos una "teoría matemática". Así se evoluciona de una colección de problemas a una "teoría", la cual difiere del concepto que de ella se tiene en otras disciplinas científicas.

La matemática es una actividad humana, por lo que es necesario transmitirla a las siguientes generaciones de la manera menos dolorosa posible.

2.1. ¿Cómo se da la innovación en la matemática?

A diferencia de otras disciplinas científicas, en la matemática la creación de nuevos métodos o técnicas constituyen la innovación que es vital para el progreso de esta ciencia. Por ejemplo, cuando Galois se dio cuenta al trabajar en el problema de la insolubilidad de la ecuación polinomial general de grado al menos 5, que la clave estaba en las simetrías de las cinco soluciones de la ecuación, proveyó los fundamentos de la teoría general de la simetría, la cual es una de las ramas más profundas y de amplio espectro de toda la matemática llamada Teoría de Grupos.

Hay innovación interna al tratar de dar cohesión a una teoría matemática; al realizar preguntas adecuadas que requieren de mucha intuición y compenetración y también puede surgir de problemas de otras disciplinas. Se puede decir que hay progreso matemático cuando existe una aplicación continua de métodos usuales intercalados espectacularmente con nuevos conceptos y problemas.

2.2. Un ejemplo: la K-teoría algebraica

A pesar de que desde principios del siglo XX era conocido que un monoide conmutativo[1] sin divisores de cero podía considerarse dentro del grupo conmutativo que genera, es hasta 1957 cuando Grothendieck pensó en esto y comenzó propiamente la K-teoría. Es de esta misma manera que los enteros negativos se definen a partir del monoide aditivo de los naturales (MacLane y Birkhoff, 1968) y que los números racionales positivos se definen a partir del monoide multiplicativo de los naturales sin el cero.

La idea de Grothendieck (Dieudonné, 1982: 599) fue asociarle a un monoide conmutativo M, un grupo conmutativo K(M), único salvo isomorfismo, y un homomorfismo canónico definido de monoides $\varphi: M \rightarrow K(M)$ tal que para cualquier grupo conmutativo G, cualquier homomorfismo de monoides $f: M \rightarrow G$ se factoriza en forma única como

$$f: M \rightarrow K(M) \rightarrow G.$$

El grupo de Grothendieck apareció publicado por primera vez en Borel y Serre (1958). Aparte de su uso en el teorema de Rie-mann-Roch, una de las aplicaciones más conocidas de la construcción de Grothendieck la realizaron en 1959 Atiyah y Hirzebruch. Aplicaron la construcción al monoide aditivo de las clases de isomorfismo de haces vectoriales complejos con espacio base un CW-complejo X.

El grupo de Grothendieck lo denotaron $K^0(X)$. Definieron $K^{-n}(X)$ utilizando la suspensión de X para $n \geq 1$. La periodicidad de Bott muestra que $K^n(X) \approx K^{n+2}(X)$ y es utilizada para definir $K^n(X)$ para $n \in Z$. Dichos funtores constituyen una teoría de cohomología conocida como la *K-teoría topológica* (la referencia clásica es Atiyah y Hirzebruch, 1961) la cual tuvo aplicaciones importantes, entre otras, el Teorema de Atiyah-Singer (en Atiyah y Singer, 1963) y la solución del problema de obtener el máximo número de campos vectoriales linealmente independientes sobre una esfera (Adams, 1962).

Un resultado de Serre (1955), generalizado por Swan (1962), proporcionó una manera de traducir conceptos topológicos en algebraicos. En efecto, si X es un espacio Hausdorff compacto y C(X) es el anillo de las funciones complejas en X, entonces existe una equivalencia entre la categoría de los haces vectoriales B sobre X y la categoría de los módulos proyectivos finitamente generados sobre C(X) dada por $B \rightarrow \Gamma(B)$ donde $\Gamma(B)$ denota las secciones del haz vistas como módulo sobre C(X) (para una generalización del teorema de Swan a la categoría de haces vectoriales de tipo finito véase Vaserstein, 1986).

En pocas palabras, la categoría de los haces vectoriales sobre X es equivalente a la categoría de los Λ-módulos proyectivos finitamente generados, donde $\Lambda = C(X)$. De aquí se tiene una definición de $K(\Lambda)$ o $K_0(\Lambda)$ que tiene sentido para cualquier anillo Λ, como el grupo de Grothendieck de la categoría de los Λ-módulos proyectivos finitamente generados. Así que $K_0(\Lambda)$ es, entre otras cosas, una herramienta útil para investigar la estructura de los Λ-módulos proyectivos.

Por ejemplo, considere el siguiente problema propuesto por Serre (1955). Ya se mencionó que sobre un espacio topológico X, es equivalente tener un haz vectorial topológico complejo o un módulo proyectivo finitamente generado sobre el anillo de funciones continuas $C^0(X; \mathbb{C})$, donde un haz trivial corresponde a un módulo libre ($\mathbb{C}$, los números complejos). En particular, cuando $X = \mathbb{C}^n$, todos los haces topológicos son isomorfos al haz trivial por lo que los módulos proyectivos finitamente generados sobre $C^0(\mathbb{C}^n; \mathbb{C})$ son libres. Si ahora tomamos un campo k arbitrario entonces los haces algebraicos sobre k^n, corresponden a los módulos proyectivos finitamente generados sobre el anillo de polinomios $k[t_1,t_2, \ldots t_n]$. El problema de Serre es si, como en el caso de haces topológicos sobre $\mathbb{C}^n$, tendremos que todo haz algebraico sobre k^n es trivial. Es decir, ¿son libres todos los módulos proyectivos finitamente generados sobre $k[t_1,t_2, \ldots t_n]$?

En dicho artículo se introducía la teoría de gavillas en la geometría algebraica. Los haces vectoriales sobre variedades algebraicas se definían como gavillas localmente libres; los haces triviales correspondían a gavillas libres. El espacio afín A^n_k sobre un campo k es el espectro primo Spec $k[t_1,t_2, \ldots t_n]$. Al ser éste un esquema afín sobre el anillo Spec $k[t_1,t_2, \ldots ,t_n]$, las gavillas localmente libres están dadas por módulos proyectivos finitamente generados sobre Spec $k[t_1,t_2, \ldots t_n]$. Así, los módulos finitamente generados sobre Spec $k[t_1,t_2, \ldots t_n]$ corresponden a haces vectoriales sobre A^n_k. Entonces, el problema de Serre se leía así: ¿es trivial todo haz sobre A^n_k?

Detrás de esto estaba la idea de que el espacio afín A^n_k debería comportarse como un espacio contráctil en topología, y por lo tanto debería tener únicamente haces triviales sobre él. Escrita de otra manera, la conjetura de Serre diría: ¿son libres los módulos proyectivos finitamente generados sobre $k[t_1, \ldots ,t_n]$?

Invito al lector a dar un paseo guiado por Lam (1978), a través de los bellos paisajes matemáticos que llevaron a probar esta conjetu-

1. Conjunto provisto de una ley de composición asociativa con elemento neutro.

ra veinte años después independientemente por Quillen y Suslin. Los intentos por resolver la conjetura de Serre en los años sesenta dieron lugar al nacimiento de otra área: la K-teoría algebraica. Una de las metas de la K-teoría algebraica fue proporcionar técnicas para atacar el problema de Serre. A pesar de que la solución final de la conjetura, en forma afirmativa, no dependió de la K-teoría algebraica, no disminuye para nada la gran influencia que tuvo en el enorme desarrollo que ha alcanzado con mayor relevancia que la esperada.

La K-teoría algebraica es un fenómeno multidisciplinario dentro de la matemática y para definir los grupos de K-teoría superior necesitamos de la siguiente construcción, debida a Quillen (1974):

Teorema. Sea X un CW complejo conexo con punto base p. Sea N un subgrupo normal perfecto de $\pi_1(X,p)$. Entonces existe un espacio X^+ y una transformación $f: X \to X^+$ tal que

i) $\pi_1(f)$ induce un isomorfismo $\pi_1(X^+,p) \cong \pi_1(X,p)/N$;

ii) para cualquier $\pi_1(X^+, p)$-módulo A, f induce un isomorfismo $H_*(X; f^{-1}A) \cong H_*(X^+, A)$;

iii) (X^+,f) está determinado, excepto por equivalencia homotópica por *i)* y *ii)*.

Este teorema se conoce como construcción + de Quillen y fue inspirada por la necesidad de encontrar una interpretación topológica del funtor K_2 de Milnor. La idea de la demostración es la de adjuntar 2-células para aniquilar N y 3-células para neutralizar el efecto de las 2-células en homología.

En los años setenta Quillen definió, para $i \geq 1$, el i-ésimo K-grupo algebraico de Λ como $K_i\Lambda = \pi_i(BGL\Lambda^+)$. Como en los casos $i = 1,2$, K_i es un funtor covariante de la categoría de anillos a la categoría de grupos (Quillen, 1974).

Una de las huellas de avance significativo en la matemática es el descubrimiento de relaciones inesperadas entre diversas áreas. Quizá uno de los ejemplos más notables de tal avance es el desarrollo de la K-teoría algebraica de Quillen, en la cual el álgebra y la topología se relacionan de una manera nueva y fundamental. Por un lado, la K-teoría algebraica introduce métodos topológicos para definir invariantes algebraicos, tales como los K-grupos de anillos de orden superior. Por otro lado, proporciona una forma de traducir conceptos algebraicos en conceptos topológicos. La K-teoría algebraica estudia las propiedades de los grupos $K_i(\Lambda)$, construidos a partir de un anillo Λ.

Uno de los problemas más importantes en la K-teoría algebraica es el cálculo de los grupos K_i para diversos anillos Λ, pero, a pesar de los esfuerzos de muchos matemáticos, únicamente se conoce un número muy reducido de ellos (el lector podrá encontrar un panorama e introducción a esta área de la matemática en Aisbett *et al*., 1985; Lluis-Puebla, 1990; Lluis-Puebla *et al*., 1992 y Lluis-Puebla, 1997).

3. La matemática, una bella arte

Como lo he expresado en múltiples ocasiones, la matemática es una bella arte y una ciencia. Para los matemáticos, la belleza y la verdad tienen igual estima. Tenemos mucho aprecio por un argumento hermoso que conlleva elegancia en el estilo, economía de esfuerzo, claridad de pensamiento, perfección en el detalle y en la forma de acertar una deducción contundente y convincente. Los matemáticos nos dedicamos a un área u otra dependiendo qué tan bella nos parece una en relación con otra. Buscamos métodos elegantes y evitamos argumentos feos.

3.1. Características estéticas de la matemática

Hay varias características estéticas de la matemática: la universalidad, en el sentido de que casi cualquier rama del conocimiento posee aspectos que se pueden analizar matemáticamente; el desarrollo de argumentos simples y concisos son absolutamente indispensables para el progreso de la matemática; la selección y formulación de problemas son un arte que depende de la intuición del matemático. Aquí, los aspectos estéticos juegan un papel muy importante.

En el año 2000 describí (Lluis-Puebla, 2000) cómo Poincaré concebía la creación de la matemática e hice un símil con la creación musical. A manera de broma, pareciera que Poincaré creaba matemática al subirse o bajarse de un tranvía. Hadamard recomendaba tomarse dos baños de agua caliente para estimular la investigación matemática. Muchos matemáticos beben café, transformándolo en teoremas. También he escuchado que la matemática se hace caminando, es decir, cuando se dejan las ideas en el "inconsciente" y de repente ocurre una "feliz idea", la cual es, quizá, una serie de conexiones neuronales que tienen lugar en el tiempo y que se logran mejor cuando no interviene un acto consciente demasiado fuerte que las impida.
En la matemática formal, el individuo crea matemática sin preguntarse demasiado acerca del significado, mientras de el resultado correcto. Uno sigue adelante sin preocuparse demasiado por el rigor matemático esperando que en el futuro éste sea provisto.

La matemática es esencialmente una actividad humana y nuestra meta no solamente es inventarla sino trasmitirla. Así, el rigor matemático debe existir.

Existen matemáticos que se especializan lo más profundamente posible en un área o campo y otros que adquieren una gran cultura matemática, tan amplia como sea posible. Los dos tipos de matemáticos son necesarios.

Muchos recomendamos a los jóvenes que obtengan una cultura matemática lo más amplia posible y luego se sumerjan en un tema. Esto debido a que la esencia de la matemática es juntar campos aparentemente disímiles; después de todo, la matemática es el grado máximo de abstracción tiene aplicación en toda disciplina que se precie de llamarse ciencia.

4. ¿Cómo trabajan los matemáticos?

Algunos matemáticos trabajan individualmente y otros lo hacen en grupos. Trabajar solo resulta difícil porque no es posible resolver una trivialidad que lo detiene por mucho tiempo, la cual puede ser resuelta inmediatamente por un colega dentro del grupo, sin embargo a veces sucede al revés, no siempre tres cabezas piensan más que una. La interacción con colegas enriquece tanto a la matemática como a los matemáticos y se encuentran esas interrelaciones de las cuales hablaba anteriormente entre áreas aparentemente disímiles. A veces este tipo de colaboración es enriquecedora y hace de la investigación matemática una experiencia más humana y social. Trabajar en grupo no exime del arduo trabajo individual de meditar o pensar.

4.1. ¿Qué opciones de áreas tienen los jóvenes matemáticos?

Los jóvenes que ingresan al apasionante mundo de la creación matemática tienen dos posibilidades: ingresar a un área de investigación de moda o de peso a la cual se considera relevante o crear su propia área. Las dos posibilidades existen con sus ventajas y desventajas. A menudo, dentro de una de las áreas de la corriente que se considera principal, los problemas son muy difíciles y ya grandes matemáticos han realizado lo que han podido y sólo restan temas demasiado difíciles o irresolubles por el momento o por siglos. Mientras que en un área nueva, a menudo hay mucho por hacer y no es tan ardua la labor matemática. Pero también se paga el precio de que sea intrascendente todo lo realizado.

Coexisten dos tipos de matemáticos: los que utilizan la fuerza bruta y los elegantes; es decir, quienes utilizan métodos o técnicas aplastantes que los conducen a la resolución del problema y quienes con pocos argumentos obtienen la respuesta. A veces un mismo matemático puede actuar de las dos formas en distintas ocasiones.

Sin embargo, la transmisión de la matemática es mucho más apreciada, por la manera que funciona nuestro cerebro, cuando se hace de manera elegante y simple, es decir, de forma artística. Así, la elegancia matemática es muy importante. Ésta se logra, en general, no en la fuente primaria de la investigación sino después de haber pasado por muchas mentes matemáticas brillantes.

5. ¿Cómo se está realizando la transmisión de la matemática?

En cuanto a la transmisión de la matemática de frontera, llega cada vez más a la gente joven debido a que se ha compactado y presentado elegantemente facilitando su aprendizaje.

La matemática ha avanzado a grandes pasos en unos cuantos siglos. Sin embargo, a principios del siglo XX solamente algunos matemáticos podían decir que abarcaban una buena parte de su totalidad. En la actualidad es casi imposible que un matemático abarque ni siquiera su propia área de estudio. ¿Querrá decir esto que el gran edificio de la matemática nos aplastará? Sucede que así como la especialización es inevitable, el desarrollo de nuevos conceptos abstractos absorben otros creados en el pasado. Estas nuevas creaciones son tan importantes como las soluciones de los problemas difíciles o desarrollos de nuevas técnicas.

5.1. Cómo se selecciona un problema para trabajarlo cuando se comienza a realizar investigación?

Los estudiantes de doctorado en matemática no pueden elegir el problema que trabajarán, generalmente es el asesor quien lo sugiere y vislumbra la técnica adecuada, para resolverlo.

Algunos matemáticos que realizan investigación por sí solos lo hacen sobre un tema que se da, a veces, por sí solo y que surge de la comunicación con otros colegas, de la curiosidad, de meditar o de moverse por la literatura matemática adecuadamente.

6. ¿Qué se conoce como matemática aplicada?

La actividad en la cual la matemática encuentra aplicaciones fuera de su propio campo se llama matemática aplicada pues bien sabido que esta ciencia es automáticamente multidisciplinaria e ideal y probablemente debería realizarse por alguien cuyo interés primario no es la matemática. Sin embargo, encontramos que es más fácil que una persona que adquiere una formación matemática se adentre en otras disciplinas, lo cual representa una gran ventaja para los estudiantes y egresados de una licenciatura de matemática.

Si la actividad multidisciplinaria es, por ejemplo, la física, es difícil saber qué clasificar como matemática aplicada y qué como física teórica. La aplicación de la matemática en diferentes áreas da lugar a cuestiones de otra índole. Supongamos que tenemos una aplicación de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales en la teoría matemática de la elasticidad; podríamos preguntarnos si la teoría de elasticidad tiene aplicación fuera de sí misma, supongamos que sí la tiene en ingeniería teórica; luego nos podríamos preguntar si ésta tiene interés en la ingeniería práctica, supongamos que sí y que permite realizar un análisis de puertas automotrices; entonces nos podríamos preguntar cómo afecta esto al hombre común. Supongamos que se cumple un requerimiento de ley al tener puertas adecuadas. Así podríamos rastrear la aplicación de la matemática hasta el nivel de consumo. Podríamos continuar, ¿es útil un automóvil?, ¿es útil consumir?, etcétera.

Llamémosle "utilidad común" a la que llega hasta el hombre de la calle (asumimos que sabemos lo que el hombre de la calle desea), sin embargo con esto no pretendemos decir que el criterio de la calle es el único para juzgar la utilidad de la matemática.

Se dice que la finalidad de sus aplicaciones es que esta ciencia sea automatizada; por ejemplo, el descenso del hombre en la luna requirió de muchos cálculos que estaban automatizados.

Tenemos un diagrama (Davis y Hersh, 1981) con el mundo físico, luego el mundo modelado con matemática, posteriormente las transformaciones y operaciones matemáticas y, finalmente, las aplicaciones al mundo físico.

Las dos de en medio se convierten en un proceso automatizado. Mientras más exitosa y completa sea una aplicación, más automática y programada será.

6.1. Un ejemplo: la teoría matemática de la música

La teoría matemática de la música comenzó hace más de dos décadas y una de sus principales metas fue desarrollar un marco científico para la musicología que tuviera como fundamento campos científicos establecidos, con un lenguaje formal para los objetos y relaciones musicales y musicológicas.

The Topos of Music (Mazzola, 2002) es un libro en el que se puede apreciar que el mismo título posee un doble sentido: por un lado está la palabra griega *topos*, que significa lugar y que sugiere la ubicación del concepto de la música como un tópico, en el sentido de Aristóteles y Kant; por otro lado, se hace referencia a la teoría matemática topos que sirve para reflejar el sistema de signos musicales, esto es, la música en su faceta de sistema abstracto cuya estructura puede permanecer escondida sin un marco adecuado de comprensión. Este doble significado expresa la intención de unificar una profundización filosófica con la precisión de la matemática, en torno a la musicología. La música está enraizada con realidades físicas, psicológicas y semióticas, pero la descripción formal de las instancias musicales corresponde al formalismo matemático.

La teoría matemática de la música está basada en las teorías de módulos y categorías, en la topología algebraica y combinatoria, en la geometría algebraica y en la teoría de representaciones; su propósito es describir las estructuras musicales y su filosofía es la de comprender los aspectos de la música que están sujetos al raciocinio, de la misma manera que la física lo hace con los fenómenos propios del trabajo científico.

Esta teoría está basada en un lenguaje adecuado, así como en un conjunto de postulados o teoremas que permiten manejar los conceptos relevantes de las estructuras musicales sujetas a las condiciones definidas y en la funcionalidad para la composición y el análisis con o sin computadora.

Mazzola *et al*. (2004) explicaron por qué el acercamiento mediante su modelo teórico geométrico de los años ochenta evolucionó a un marco que es apropiado para muchos problemas musicales. Ese nuevo marco está basado en matemática más sofisticada como la teoría de topos, la cual expuse en el Congreso de la SoBolMat realizado en Potosí. Cabe mencionar algo notable: dentro de este tema se realiza matemática de alto nivel, no solamente aplicaciones, es decir, se hace matemática nueva, se prueban resultados matemáticos con los objetos definidos.

La música es una creación de la vida y del pensamiento del ser humano, que actúa en otra capa de la realidad que la física. Creemos que el intento de comprender o de componer una obra de gran envergadura en la música es tan importante y difícil como el intento de unificar la gravitación, el electromagnetismo, las fuerzas débiles y fuertes. Seguramente las ambiciones son comparables y por lo tanto las herramientas también. La matemática provee una base científica para comprender la música y la musicología, para que esta última pueda considerarse una ciencia, no una rama de la literatura poética común y corriente[2].

7. ¿Qué hay acerca de la matemática y la computación?

La revolución industrial se medía en siglos, la revolución de la computadora se mide en décadas o lustros y quizás, dentro de poco, en años. En los siglos XVIII y XIX, la mano de obra fue reemplazada por las máquinas y aparentemente el siglo XX se caracterizó por el reemplazo del cerebro por la computadora. En un principio, la ciencia del cómputo creció conjuntamente con la matemática; Turing y von Neumann son algunos de sus pioneros, incluso en la actualidad, la matemática es la ciencia más cercana a la del cómputo. La lógica matemática proporcionó una base para la computación en cuanto al software. Sin embargo, es el *chip* de silicón el que permitió la revolución.

Los matemáticos siempre hemos estado interesados en el concepto de "demostración", es decir, en la rigurosa deducción de varias conclusiones a partir de ciertas suposiciones. Es necesario dar instrucciones precisas para que funcione un ordenador o computadora y la lógica matemática es el marco adecuado para formularlas.

En relación con la idea de demostración está la de algoritmo, es decir, la de un método para hacer algo, en particular para resolver un problema. Una rama de la matemática que se dedica al estudio de los algoritmos es la teoría de complejidad. Así que las teorías de las demostraciones y complejidad son dos tipos de matemática creadas por las necesidades del cómputo.

Debido a que las computadoras usan Z_2, están relacionadas con la matemática discreta ejemplificada por el álgebra. Atiyah menciona que algunas personas argumentan por esto que debe modificarse drásticamente la enseñanza de la matemática quitando el énfasis en el cálculo que a menudo se realiza desde hace mucho tiempo.
La computadora proporciona una manera muy rápida de obtener soluciones numéricas de distintos problemas. En la matemática aplicada un problema tiene solución satisfactoria si se puede proporcionar un algoritmo en la computadora de tal manera que se tengan disponibles las soluciones numéricas. Sin embargo, no todo son números. Por ejemplo, las expresiones de lógica no representan números; las expresiones simbólicas ya han sido consideradas

2. Para los interesados en la teoría matemática de la música pueden revisar: www.epos.uni-osnabrueck.de/books/m/ma_nl004/pages/ y www.emiliolluis.org

en la computadora y son manipulables; como ejemplo de esto está la determinación de todos los grupos finitos simples que se llevó a cabo utilizando poderosas computadoras.

7.1. ¿Cuáles son las etapas para generar nuevos resultados en la matemática y cuál es la utilidad de la computadora en ésta?

En la matemática hay varias etapas para generar nuevos resultados; por ejemplo, identificar hechos relevantes, su arreglo en patrones que poseen un significado; la posible extracción de una fórmula; corroborarla y hasta el final la demostración. La computadora puede ser útil en las primeras etapas. Es lógico que se trate de probar que ciertas conjeturas son válidas simplemente sustituyendo valores pero cuyos cálculos resultarían demasiado largos y tediosos de realizarlos a mano. Ahora podemos ver los resultados en forma gráfica, antes se tenían que realizar a mano, tal como los realizó Euler o Gauss.

7.2. ¿Será la computadora un sustituto para el pensamiento humano o para la matemática?

Atiyah comenta que sin duda el problema más importante del siglo XXI, es el de comprender cómo funciona la mente humana, para esto se requerirá de matemáticos, entre otros muchos especialistas de otras disciplinas científicas.

Existe una solución del famoso problema que establece que es posible colorear con cuatro colores cualquier mapa del planeta con la condición de que dos países adyacentes sean coloreados de manera diferente. Este problema data del siglo XIX y en el XX se resolvió utilizando una computadora que comprobó cientos de casos. Fue un gran triunfo pero a la vez una gran desilusión desde el punto de vista estético, además de que no se crearon nuevas técnicas a partir de la demostración.

8. ¿Cuál es la naturaleza y propósito de la matemática y de la ciencia?

La respuesta usual es la de que el ser humano intenta comprender o entender el mundo físico y eventualmente controlarlo, pero qué significa comprender o entender, Atiyah duda que entendamos la demostración del teorema de los cuatro colores. Las demostraciones por computadora alteran el concepto de demostración publicada. Lo que sucede es que existe una diferencia fundamental entre un experimento diseñado para encontrar hechos acerca del mundo natural y cálculos de computadora que conciernen con un problema puramente matemático propuesto por el hombre. Uno es externo y el otro interno.

Una de las características más importantes de la matemática es su arquitectura o diseño global, esto es, la forma elegante y profunda como las ideas abstractas están colocadas. La piedra angular de la buena matemática es la economía y simplicidad del pensamiento. Aunque uno de sus objetivos es proporcionar soluciones explícitas, a veces de carácter numérico, los desarrollos teóricos evolucionan esencialmente para evitar cálculos largos. Ese ahorro o flojera conduce a encontrar ideas o métodos alternativos para ese fin. Las computadoras carecen de ellos. Estas ideas o métodos son los necesarios para avanzar un poco.

Dicho de otra manera, dice Atiyah, la matemática es una (bella, digo yo) arte que evita la fuerza bruta mediante el desarrollo de conceptos y técnicas que nos permiten ligereza. Se dice que si las computadoras hubieran estado en el siglo XV, la matemática actual sería una mala imitación de sí misma, esto es porque el peligro real es dejar la matemática a las computadoras; las debemos tener simplemente como ayudantes.

Las industrias tradicionales han declinado y las relacionadas con el cómputo han crecido, lo que significa que los empleos están ligados a las computadoras. Este tipo de empleos alteran las actitudes y expectativas de las generaciones jóvenes. La matemática está ligada a ésto y a las escuelas, universidades, maestros y alumnos. El peligro para la matemática está en que los nuevos grandes talentos se encaminen a la computación en lugar de a la matemática, pero puede que esto no suceda ya que los verdaderos matemáticos están motivados por la belleza y poder de la matemática y no por el dinero. Para aquellos que creen que la computadora puede realizar todo el trabajo oprimiendo un botón, hay que decirles que tienen todavía que enseñar a los niños a pensar cuál botón oprimir.

9. ¿Qué ha sucedido en la matemática en los siglos anteriores?

Atiyah menciona que los siglos XVIII y XIX podrían llamarse de la matemática clásica. Al final del siglo XIX Poincaré y Hilbert eran las figuras dominantes, podrían considerarse discípulos de Newton y Leibniz, respectivamente.

Poincaré pensaba en términos geométricos o topológicos y Hilbert se iba por el lado del formalismo y axiomatización. Poincaré realizó trabajo pionero en la topología y predijo que ésta sería un ingrediente importante de la matemática del siglo XX (algunos dicen que si se tuviera que nombrar de alguna manera al siglo XX sería como el siglo de la topología). Mientras, Hilbert propuso su famosa lista de problemas que no contenían los topológicos y no pudo predecir, según Atiyah, el alcance de la topología en el siglo XX.

La primera mitad del siglo XX la denomina la era de la especilización, donde la formalización tipo Hilbert y Bourbaki tiene lugar. La segunda mitad del siglo XX la denomina la era de la unificación, donde las áreas se traslapan y las técnicas se implementan entre ellas. El siglo XXI Atiyah propone llamarlo el siglo de la matemática cuántica o de la dimensión infinita, por que busca adecuadamente el análisis, la geometría, la topología y el álgebra de varios espacios de funciones no lineales de tal manera que se obtengan demostraciones rigurosas de cosas hermosas que han estado especulando los físicos entre otras importantes (como la geometría diferencial no conmutativa de Alain Connes).

10. ¿Cuáles paradigmas han sucedido en la matemática y en otras disciplinas incluyendo la musicología?

Guerino Mazzola (2002), menciona tres paradigmas mayores de la matemática y de la musicología que han ocurrido durante los 150 años que han sido paralelos en la evolución de ambas y la creciente presencia de la matemática en la música. Los paradímas son: las estructuras globales, las simetrías y la filosofía de Yoneda.

La primera quiere decir, en palabras, que las estructuras localmente triviales se pueden juntar en configuraciones estéticas válidas si éstas se pegan de una manera no trivial. La física clásica concierne con los fenómenos locales y luego hay que estudiar el comportamiento físico en gran escala. La física concierne realmente con adivinar el futuro cuando se va de lo local a lo global.

La segunda, las simetrías (y los fractales) son utilizadas en la composición, aparecen en la naturaleza, en la matemática y en la física.

En cuanto a la tercera, la filosofía de Yoneda, indica que para comprender un objeto, de vueltas alrededor de él. Esto quiere decir, entendimiento mediante el cambio de perspectivas. En matemática, este lema tiene importantes aplicaciones en el álgebra homológica, en la topología algebraica y en geometría algebraica, solamente para mencionar algunas. Dice que un objeto matemático puede clasificarse salvo isomorfismo por su funtor. En música, la partitura es solamente su primera vista y junto con todas sus interpretaciones constituyen su identidad. ¡Qué maravilloso punto de vista para ambos, intérprete y audiencia! Deja de lado la estéril competencia fuera del arte y la ciencia como si éstos fueran juegos olímpicos.

11. ¿Qué se puede decir de la geometría y del álgebra?

Atiyah menciona que son muy antiguas y ambas son pilares de la matemática. Por un lado, la geometría se remonta a los griegos o antes y como entender el mundo en que vivimos es una parte importante de nuestra evolución, la intuición o percepción espacial es nuestra herramienta más poderosa. La geometría es el área poderosa de la matemática para estudiar lo geométrico. La geometría es el espacio y se puede ver estáticamente.

Por otro lado, el álgebra se remonta a los árabes y los hindúes y concierne fundamentalmente al tiempo. Cualquier algoritmo tiene lugar en el tiempo, lo requiere para poder llevarse a cabo. Esto se puede ver de manera obvia en una computadora.

Atiyah afirma que la geometría concierne al espacio y el álgebra a la manipulación en el tiempo; ambas son indispensables. Piensen ustedes en la música, con sus estructuras, la cual transcurre en el tiempo y está situada en el espacio (eminentemente terrícola puesto que un violín no suena en la luna).

Para finalizar, menciono nuevamente que la matemática es una de las bellas artes, la más pura de ellas, que tiene el don de ser la más precisa y la precisión de las ciencias.

Bibliografía

Adams, J. F. (1962). "Vector fields on spheres", *Ann. Math*. Vol. 75. pp.603-632.

Aisbett, J.; E. Lluis-Puebla; V. Snaith y C. Soulé (1985). "On K*(Z/n) and K*(Fq[t]/(t2))", *Mem. Amer. Math. Soc*. Vol. 57, No. 329.

Atiyah, M.

______ y F. Hirzebruch (1961). "Vector bundles and homogeneous spaces", *Proc. of Symp. in Pure Math. Amer. Math. Soc*. 3. pp.7-38.

______ y I. Singer (1963). "The index of elliptic operators on compact manifolds", *Bull. Amer. Math. Soc*. 69. pp.422-433.

Borel, A. y J. P. Serre (1958). "Le théor'eme de Riemann-Roch", Bull. Soc. Math. 86. France.

Davis, P. J. y R. Hersh (1981). *The Mathematical Experience*. Houghton Mifflin Co., Boston.

Dieudonné, J. (1982). *A Panorama of Pure Mathematics*. Academic Press.

Lam, T. Y. (1978). *Serre's conjecture*. Lecture Notes in Mathematics 635. Springer-Verlag.

Lluis-Puebla, E.

_______ (1990). *Álgebra homológica, cohomología de grupos y K-Teoría algebraica clásica*. Addison Wesley Iberoamericana.

_______ (1992). Higher Algebraic K-Theory: an overview. Lecture Notes in Mathematics 1491. Springer-Verlag.

_______ (1997). *Álgebra lineal, álgebra multilineal y K-Teoría algebraica clásica*. SITESA.

_______ (2000). Videograbación de la Conferencia Magistral "Matemática: lo digno de ser aprendido", *Conferencia de clausura del VII Congreso de la Sociedad Boliviana de Matemática*. Videoteca de la Sociedad Boliviana de Matemática. Cochabamba, Bolivia. 10 de noviembre.

_______; G. Mazzola y T. Noll (eds.) (2004). *Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory*. Universität Osnabrück.

MacLane, S. y G. Birkhoff (1968). *Álgebra*. Macmillan.

Mazzola, G.

_______ (2002). *The Topos of Music*. Birkhäuser Verlag. Basel, Suiza.

_______; T. Noll y E. Lluis-Puebla (2004). *Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory*. epOs., Alemania.

Quillen, D. (1974). *Higher Algebraic K-Theory*. Proc. Int. Con. of Math., Vancouver.

Serre, J. P. (1955). "Faisceaux algébriques cohérents", *Ann. of Math*. 61 pp.197-278.

Swan, R. J. (1962). "Vector Bundles and Projective Modules", *Trans. Amer. Math. Soc*. 105.

Vaserstein, L. N. (1986). "Vector Bundles and Projective Modules Revisited", *Trans. Amer. Math. Soc*. 294.