Jorge Fujioka

La propiedad de Painlevé

Ciencia Ergo Sum, vol. 8, núm. 3, noviembre, 2001
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Ciencia Ergo Sum,
ISSN (Versión impresa): 1405-0269
ciencia.ergosum@yahoo.com.mx
Universidad Autónoma del Estado de México
México

La propiedad de Painlevé

JORGE FUJIOKA*

Resumen. *Este artículo comienza con una breve reseña histórica de la propiedad Painlevé. Posteriormente se aplica la prueba de Painlevé a dos ecuaciones diferenciales parciales no lineales (la ecuación de Tu, y una extensión de la ecuación mKdV) que no habían sido analizados de esta forma con anterioridad y se demuestra que ambas ecuaciones poseen la propiedad de Painlevé. El análisis de Painlevé se utiliza también para determinar una transformación de Bäcklund y la forma bilineal de la ecuación Tu; además se encuentra una reducción de similiridad para esta ecuación mediante el método de Clarkson y Kruskal.*
Palabras clave: *Painlevé, solitones, integrabilidad, transformaciones de Bäcklund, reducciones de similaridad.*

The Painlevé Property

Abstract. *This paper begins with a brief review of the history of the Painlevé property. The Painlevé test is applied to two non linear partial differential equations (the Tu equation, and an extended mKdV equation) which have not been tested in this way before, and it is proved that these two equations possess the Painlevé property. The Painlevé analysis also is used to determine a Bäcklund transformation and the bilinear form of the Tu equation. A similarity reduction for this equation is found by means of the Clarkson-Kruskal method.*
Key words: *Painlevé, solitons, integrability, Bäcklund transformations, similarity reductions.*

Recepción: 8 de noviembre de 2000
Aceptación: 28 de marzo de 2001

Introducción

Actualmente, a 36 años de su creación, el término "solitón" es conocido por la mayoría de los físicos y matemáticos del mundo. No ocurre lo mismo, en cambio, con la llamada *propiedad de Painlevé* que, a pesar de su íntima relación con los solitones, aún es un término poco conocido fuera del círculo de los especialistas en solitones y en ecuaciones diferenciales parciales no lineales (EDPNL) integrables. Por este motivo, en la sección I de este trabajo recordaremos brevemente cómo fue que se encontró que existía una relación entre las EDPNL con solitones y la propiedad de Painlevé, que originalmente era un concepto asociado exclusivamente a ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Veremos, asimismo, cómo se extendió este concepto de manera que pudiera aplicarse también al caso de las ecuaciones parciales.

En la sección II aplicaremos la prueba de Painlevé a la ecuación:

$$u_{tt} + 2uu_t - 2uu_x - u_{xt} = 0, \tag{1}$$

y demostraremos que esta ecuación posee la *propiedad de Painlevé*. En esa sección veremos también cómo el análisis de Painlevé nos permite encontrar una transformación de Bäcklund para la ecuación (1), y nos sugiere el cambio de variable adecuado para escribir a esta ecuación en forma bilineal.

En la sección III determinaremos las reducciones de similaridad de la ecuación (1), y veremos que es posible reducir esta ecuación a una ecuación de Riccati, que es la

* *Instituto de Física,* UNAM, *Apartado Postal 20-364, México* D.F. *01000*
Correo electrónico: fujioka@fisica.unam.mx
Expreso mi sincero agradecimiento al Dr. Alfredo Gómez por sus valiosos comentarios y su ayuda en algunos de los cálculos de la sección IV.

única EDO de primer orden que posee la propiedad original de Painlevé (definida sólo para EDO).

En la sección IV analizaremos una segunda ecuación, a saber:

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} - \delta (u^2)_{xx} = 0 \tag{2}$$

y demostraremos que esta ecuación posee la propiedad de Painlevé en el caso en que $\delta = (3/4)^{1/2}$.

Veremos, sin embargo, que aún en ese caso la ecuación (2) no es realmente una ecuación solitónica. Por último, en la sección V, resumiremos nuestros resultados.

I. Ecuaciones integrables y propiedad de Painlevé

La cuestión de la integrabilidad, tanto en EDO como en EDPNL es un asunto delicado. En el caso de las EDO existen distintas definiciones de integrabilidad, que han nacido en contextos diferentes, y que no son equivalentes entre sí. Por ejemplo, cuando la solución de una EDO se puede escribir explícitamente (o en términos de integrales), hablamos de "integrabilidad por cuadraturas". En el caso de EDO no lineales que no pueden ser integradas por cuadraturas, pero que con un cambio de variables adecuado pueden ser linearizadas y resueltas, hablamos de "integrabilidad por linearización directa". Existen también EDO que pueden ser linearizadas por métodos indirectos y muy sofisticados, y en ese caso se habla de "integrabilidad algebraica". En el caso de sistemas hamiltonianos, cuando existen N integrales de movimiento independientes (y estamos en un espacio fase de $2N$ dimensiones), hablamos de "integrabilidad de Liouville". Existen, en fin, múltiples definiciones de "integrabilidad" en el caso de EDO, y la pregunta ¿qué es una ecuación integrable? continúa siendo una cuestión abierta (Zakharov, 1991: 64, 65, 73, 74, 75 y Ramani *et al.*, 2000).

En el caso de las EDPNL (que son las que más nos interesan aquí) la situación es similar. Hasta antes de 1967, cuando se hablaba de una EDPNL "integrable", generalmente se entendía que la ecuación en cuestión podía ser linearizada mediante un cambio de variables adecuado. Sin embargo, cuando en 1967 Gardner, Greene, Kruskal y Miura (Gardner, 1967) mostraron que la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) podía ser resuelta por el método de dispersión inversa (en inglés *inverse scattering transform*), desarrollado por ellos mismos, se vió que la noción de integrabilidad tenía que ser extendida. En la actualidad a veces se se dice que una EDPNL es C-integrable, si la ecuación puede ser linearizada mediante un cambio de variables apropiado, y que es S-integrable si puede resolverse por el método de dispersión (*scattering*) inversa (Zakharov, 1991:2). En este trabajo diremos que una EDPNL es integrable si pertenece a cualquiera de estas dos categorías.

A partir del descubrimiento de las primeras ecuaciones diferenciales parciales no lineales integrables con solitones, la gente interesada en estos temas se preguntó cuál sería el común denominador esencial de estas ecuaciones, y cómo podría saberse si una EDPNL dada es integrable o no. A continuación veremos que las respuestas a estas preguntas están íntimamente asociadas con la llamada propiedad de Painlevé.

Ablowitz y Segur (1977) observaron que al transformar (mediante cambios de variable adecuados) a tres de las EDPNL más conocidas (la ecuación de Boussinesq, la ecuación de Korteweg-de Vries modificada, y la ecuación sine-Gordon) en ecuaciones diferenciales ordinarias, se obtenían tres EDO muy especiales, pertenecientes a un grupo de seis ecuaciones de segundo orden encontradas por Painlevé, Gambier y Picard a finales del siglo pasado, las cuales definían a seis nuevas funciones trascendentales conocidas en inglés como *Painlevé transcendents*.

Revisando la literatura, Ablowitz y Segur hallaron que Painlevé y sus colegas habían encontrado las seis ecuaciones arriba mencionadas al buscar todas las EDO de la forma:

$$\frac{d^2w}{dz^2} = F(z, w, w') \tag{3}$$

con w y z complejas, F analítica en z, algebraica en w, y racional en w', y cuyas soluciones no tuvieran puntos críticos móviles. Para entender la diferencia entre singularidades fijas y móviles conviene considerar las dos ecuaciones siguientes:

$$z\frac{dw}{dz} + w = 0, \tag{4}$$

$$\frac{dw}{dz} + w^2 = 0, \tag{5}$$

donde tanto z como $w(z)$ son números complejos. La solución general de (4) es:

$$w(z) = \frac{c}{z}, \tag{6}$$

donde c es una constante arbitraria. Podemos ver que esta función tiene una singularidad (un polo) en $z = 0$ (si $c \neq 0$), y esta singularidad no depende del valor de la constante de integración; es una singularidad fija. Por otro lado, la solución general de (5) es:

$$w(z) = \frac{1}{z - z_0}\ , \tag{7}$$

donde z_0 es una constante arbitraria. En este caso la solución tiene una singularidad (un polo) en $z=z_0$, de manera que la posición de la singularidad cambia (se mueve) si cambiamos el valor de la constante de integración z_0. Esta es una singularidad móvil. El lector interesado podrá encontrar más información sobre singularidades fijas y móviles en los artículos de Ramani y Kruskal (Ramani *et al.*, 1989; Kruskal y Clarkson, 1992).

Decíamos, pues, que Painlevé y sus colaboradores buscaron todas las ecuaciones de la forma (3), cuyas soluciones no tuvieran puntos críticos móviles, y el resultado de esta búsqueda fue una lista de 50 ecuaciones, de las cuales 44 podían resolverse en términos de funciones ya conocidas, y las seis restantes definían las nuevas funciones trascendentales de Painlevé (Ince, 1944; Davis, 1962).

Ablowitz, Ramani y Segur (Ablowitz *et al.*, 1978 y Ablowitz, 1980) observaron también que si bien al reducir una EDPNL integrable a una EDO no siempre se llegaba a una de las 6 EDO que definen las funciones trascendentales de Painlevé, siempre se obtenía una EDO cuyas soluciones no tenían puntos críticos móviles. A raíz de esta observación, Ablowitz, Ramani y Segur propusieron la siguiente conjetura (la conjetura de ARS) en 1978:

> Si una EDPNL integrable puede reducirse a una EDO, entonces dicha EDO (posiblemente tras algún cambio adecuado de variable) tiene la propiedad de Painlevé (i.e., sus soluciones no tienen puntos críticos móviles).

Esta conjetura ha resultado acertada en todos los casos particulares que han sido investigados, por lo que se considera que muy probablemente la conjetura es válida, aun cuando no ha sido demostrada formalmente.

La conjetura de ARS en caso de ser cierta, establece una condición necesaria para que una EDPNL sea integrable, pero no nos da una condición suficiente. Esto implica que esta conjetura nos puede permitir saber con certeza que algunas EDPNL no son integrables, pero en ningún caso nos puede garantizar que una EDPNL sí sea integrable, ya que es posible que todas las EDO obtenidas a partir de una EDPNL dada tengan la propiedad de Painlevé, y que aún así la EDPNL no sea integrable (Kruskal y Clarkson, 1992; Clarkson, 1986; 1989).

Notemos que aun cuando la conjetura de ARS no resultó exitosa para identificar con certeza a las EDPNL integrables, sí fue de gran importancia porque mostró que existe algún tipo de relación entre la integrabilidad de las EDPNL y la propiedad de Painlevé. Debemos observar, sin embargo, que la primera persona que pensó que los sistemas mecánicos integrables podrían estar caracterizados por tener soluciones sin puntos críticos móviles, fue Sofía (Sonia) Kowalevski, quien probó que su idea le permitía identificar cuatro casos particulares en los cuales las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido girando con un punto fijo son integrables. Tres de esos casos eran ya conocidos (Kruskal y Clarkson, 1992), pero el cuarto era una novedad, y la resolución de las ecuaciones de movimiento en ese caso era sumamente difícil. Sonia logró resolverlas, con lo cual ganó en 1888 el prestigioso Premio Bordin, de la Academia Francesa de Ciencias (*ibid.*).

Por otra parte, un poco antes de que Sonia resolviera el problema del trompo, Lazarus Fuchs (Koblitz,1983) también había investigado cuáles ecuaciones de la forma:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{P(w, z)}{Q(w, z)} \tag{8}$$

tenían soluciones sin puntos críticos móviles (siendo P y Q polinomios en w con coeficientes analíticos en z), encontrando en 1884 que sólo la ecuación generalizada de Riccati (Ramani *et al.*, 1989; Kruskal y Clarkson, 1992):

$$\frac{dw}{dz} = P_0(z) + P_1(z)w + P_2(z)w^2 \tag{9}$$

cumple esta condición. Así pues, vemos que Painlevé, Picard, Gambier, Fuchs y Sonia Kowalevski centraron su atención en EDO cuyas soluciones no tuvieran puntos críticos móviles, y esto hace que uno se pregunte por qué todos ellos eligieron este abstruso criterio de selección. Es posible que hubieran varias razones para esta elección, pero muy probablemente una de las razones más importantes fue que si la solución general $w(z)$ de una cierta EDO no tiene puntos críticos móviles, entonces siempre habrá una cierta vecindad alrededor de cada z_0 en el dominio de $w(z)$ en la cual esta función se podrá expresar como una serie de potencias de la forma:

$$w(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n\ , \tag{10}$$

donde m es algún entero positivo, y en la cual habrá un número de coeficientes indeterminados igual al grado de la EDO en cuestión.

La importancia potencial de poder expresar la solución de una EDO en la forma (10) debió ser apreciada muy particularmente por Sonia Kowalevski, debido a que ella fue la discípula más cercana de Weierstrass, quien hizo de las series de potencias el fundamento de todo su trabajo en análisis. Tanto así, que en alguna ocasión, siendo ya grande, exclamó: "¡No hay nada más que series de potencias!" (Bell, 1986).

La conjetura de ARS mostró que había una relación entre la propiedad de Painlevé y las EDPNL integrables, pero sólo en aquellos casos en que las EDPNL pudieran reducirse a ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta restricción (*i.e.*, el poder reducirse a EDO) era incómoda, y no parecía ser una condición fundamental para la integrabilidad de las EDPNL, pero la propiedad de Painlevé era un concepto asociado únicamente a EDO, y no a ecuaciones diferenciales parciales (EDPNL), de modo que no era evidente cómo relacionar a la propiedad de Painlevé con las EDPNL integrables que no tuvieran reducciones de similaridad (*i.e.*, cambios de variables que permiten reducir EDPNL a EDO), o cuyas reducciones de similaridad fueran desconocidas. Como veremos a continuación, la solución a este problema fue extender el concepto de propiedad de Painlevé, de manera que pudiera aplicarse directamente a las EDPNL.

Notemos que cuando una EDPNL para una función $u(x,t)$ se reduce a una EDO para una nueva función $w(z)$ es frecuente que $u(x,t)$ y $w(z)$ estén relacionadas mediante una ecuación de la forma siguiente (Clarkson y Kruskal, 1989):

$$u(x,t) = \alpha(x,t) + \beta(x,t)\, w(z(x,t)) \tag{11}$$

Si además la EDO en cuestión tiene la propiedad de Painlevé, $w(z)$ podrá expresarse en la forma (10). Si ahora sustituimos (10) en (11), y definimos a las funciones $\phi(x,t)$ y $u_n(x,t)$ de la manera siguiente:

$$\phi(x,t) \equiv z(x,t) - z_0, \tag{12}$$

$$u_{n+m}(x,t) \equiv c_n \beta(x,t) + \delta_{no}\alpha(x,t) \tag{13}$$

donde c_n son los coeficientes de la serie (10), δ_{no} es la delta de Kronecker (por ejemplo, $\delta_{no}=1$, si n=0, y $\delta_{no}=0$ si n≠0), y m es el entero positivo que aparece en (10), veremos que $u(x,t)$ toma la forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=-m}^{\infty} u_{n+m}\phi^n = \phi^{-m}\sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^j \tag{14}$$

Esta expresión no contiene a todas las soluciones de la EDPNL que estemos considerando; describe únicamente a aquellas soluciones expresables en la forma (11), y por ello las funciones u_j y ϕ están forzadas a tomar las formas (12) y (13). Sin embargo, el hecho de que algunas de las soluciones de la EDPNL en cuestión puedan expresarse en la forma (14) (con u_j y ϕ definidas por (12) y (13)), sugiere que quizás la EDPNL pudiera tener otras soluciones expresables en la forma (14), pero con funciones u_j y ϕ distintas a las definidas en (12) y (13).

En 1983 Weiss, Tabor y Carnevale (WTC) mostraron que seis de las EDPNL integrables más conocidas admitían soluciones de la forma (Weiss *et al.*, 1983):

$$u(x,t) = \phi^{-m}\sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^j \tag{15}$$

donde $\phi(x,t)$ y k–1 de las funciones $u_j(x,t)$ son funciones arbitrarias, siendo k el orden de la derivada de mayor orden contenida en la EDPNL que se esté considerando. Tras este hallazgo, Weiss, Tabor y Carnevale introdujeron la siguiente definición:

> Diremos que una EDP de k-esimo orden tiene la *propiedad de Painlevé* si acepta soluciones de la forma (15), donde $\phi(x,t)$ y k–1 de la funciones $u_j(x,t)$ son arbitrarias, y m es un número entero positivo.

El proceso para averiguar si una determinada EDPNL tiene la *propiedad de Painlevé* –a lo cual se le llama la prueba de Painlevé– es bastante laborioso. Sin embargo, Kruskal encontró la forma de simplificar apreciablemente este proceso proponiendo que la función $\phi(x,t)$ se tomara en la forma (Ramani *et al.*, 1989):

$$\phi(x,t) = x - \psi(t), \tag{16}$$

y que se considerara a las funciones u_j como dependiente únicamente de t (todo esto en el caso en que t sea la variable que describe la evolución del sistema). A esta proposición se le llama frecuentemente el "ansatz de Kruskal". Con esta proposición la serie (15) toma, para cada valor de t, una estructura similar a la serie (10).

La definición de *propiedad de Painlevé* introducida por Weiss, Tabor y Carnevale es, en realidad, más que una definición, ya que todo parece indicar que el poseer esta propiedad es una condición *suficiente* para que una EDPNL sea integrable (Ramani *et al.*, 1989). Debido a esto, la *prueba de Painlevé* constituye nuestra mejor herramienta en la búsqueda de EDPNL integrables.

Ahora podemos entender más claramente cómo es que en algunos casos todas las EDO obtenidas a partir de una cierta EDO (mediante reducciones de similaridad) tienen la propiedad de Painlevé (para EDO), y, sin embargo, la EDPNL no es integrable. En esos casos lo que sucede es que la EDPNL en cuestión no tiene la *propiedad de Painlevé*, para EDP definida por WTC, lo cual implica que algunas de sus soluciones no pueden expresarse en la forma (15). Esto, sin embargo, no está reñido con el hecho de que una parte de sus soluciones sí sean expresables en la forma (15). El hecho de que las EDO obtenidas a partir de la EDPNL en cuestión sí tengan la *propiedad de Painlevé* para EDO lo único que indica es que las soluciones de estas EDO conducen al tipo de soluciones de la EDPNL que sí son expresables en la forma (15).

Como mencionamos arriba, el hecho de que una EDPNL no tenga la propiedad de Painlevé implica que algunas de sus soluciones no pueden expresarse en la forma (15). En tales casos, las soluciones que no son de la forma (15) generalmente pueden expresarse mediante series que involucran términos logarítmicos, tales como el siguiente:

$$\phi(x,t)^{-m} \sum_{j\geq k\geq 0} u_{j\cdot k}(x,t)\phi(x,t)^{j}\left[\ln\phi(x,t)\right]^{k} \tag{17}$$

A las series de este tipo (y similares) se les acostumbra llamar "pseudo series" o "ψ– series", y el lector interesado podrá encontrar más información sobre este tema en las referencias bibliográficas. (véanse Kichenassamy *et al.*, 1995; Conte *et al.*, 1993; Levine *et al.*, 1988; Tabor *et al.*, 1981 y Hille *et al.*, 1976).

Regresemos ahora por un instante al caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, y observemos que si bien las EDO no lineales pueden tener singularidades fijas y móviles, las EDO lineales sólo pueden tener singularidades fijas (Ramani *et al.*, 1989), y por lo tanto toda ecuación lineal tiene la *propiedad de Painlevé*. Esto significa que, de cierta manera, de todas las EDO no lineales, aquéllas con la propiedad de Painlevé son las que más se parecen a las ecuaciones lineales. En el caso de las EDPNL también existe una cierta relación entre las ecuaciones con la *propiedad de Painlevé* y las ecuaciones lineales, ya que como veremos en las secciones siguientes, una EDPNL con la propiedad de Painlevé, o bien es linealizable mediante algún cambio de variable adecuada, o bien es una ecuación con soluciones tipo solitón, y los solitones interactúan entre sí de una forma que recuerda al principio de superposición válido en las ecuaciones lineales.

II. La ecuación de Tu

Para ejemplificar el uso de la *prueba de Painlevé*, en esta sección investigaremos si la ecuación:

$$u_{tt} + 2uu_t - 2uu_x - u_{xt} = 0 \tag{18}$$

posee la *propiedad de Painlevé*. Esta ecuación se obtiene a partir del sistema:

$$u_t = u_x + 2\mathrm{v}, \qquad \mathrm{v}_t = -2u\mathrm{v} \tag{19}$$

que es el primer sistema de la jerarquía de Tu (1983), el cual está formado por una serie de sistemas de ecuaciones hamiltonianas degeneradas que han sido poco estudiadas.

Para hallar si la ecuación (18) tiene la propiedad de Painlevé necesitamos investigar si su solución general puede expresarse en la forma:

$$u = \phi^{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^j \tag{20}$$

donde α es un entero negativo y $\phi(x,t) = 0$ define el conjunto de singularidades de la ecuación (18). Sustituyendo (20) en (18), y tomando en cuenta que α debe ser negativa, se encuentra fácilmente que:

$$\alpha = -1 \tag{21}$$

al igualar a cero la suma de los términos con potencias más negativas de ϕ.

Al sustituir (20) en (18) obtenemos una ecuación en potencias de ϕ. Agrupando los términos que contienen a ϕ^j, e igualando a cero el coeficiente resultante, obtenemos la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned}
&u_j\,\phi_t(\phi_t-\phi_x)(j^2-3j+2)+u_{j-1}(\phi_{tt}-\phi_{xt})(j-2)\\
&+u_{j-1,t}(2\phi_t-\phi_x)(j-2)-u_{j-1,x}\phi_t(j-2)+u_{j-2,tt}-u_{j-2,xt}\\
&+2(\phi_x-\phi_t)\sum_{m=0}^{j}u_{j-m}u_m-2(\phi_x-\phi_t)\sum_{m=-1}^{j-1}(m+1)u_{j-m-1}u_{m+1}\\
&+2\sum_{m=0}^{j-1}u_{j-m-1}\,u_{m,t}-2\sum_{m=0}^{j-1}u_{j-m-1}\,u_{m,x}=0
\end{aligned} \tag{22}$$

la cual implica (al tomar j=0 y j=1) que:

$$u_0 = \phi_t \tag{23}$$

y

$$u_1 = -\frac{1}{2}\frac{\phi_{tt}}{\phi_t} \tag{24}$$

Agrupando todos los términos que contienen a u_j en la ecuación (22), e igualando a cero el coeficiente final de u_j, obtenemos que las llamadas "resonancias" de la relación de recurrencia son:

$$j = -1, 2 \tag{25}$$

La primera resonancia ($j = -1$) está asociada a la arbitrariedad de la función $\phi\,(x, t)$, mientras que la resonancia $j = 2$ indica que la relación de recurrencia no determina a la función $u_2(x, t)$ la cual, por consiguiente, es una función arbitraria. Si sustituimos el valor $j = 2$ en la relación de recurrencia obtenemos una condición de compatibilidad:

$$u_{0,tt} - u_{0,xt} + 2(u_0 u_1)_t - 2(u_0 u_1)_x = 0 \tag{26}$$

la cual debe satisfacerse si (20) es realmente una representación local válida de la solución general de la ecuación (18). Tomando en cuenta a las ecuaciones (23) y (24), es fácil ver que la ecuación (26) se satisface idénticamente, con lo cual se concluye la prueba de que la ecuación (18) sí posee la propiedad de Painlevé.

Notemos ahora que si elegimos que la función arbitraria u_2 sea igual a cero, y pedimos que $u_1(x, t)$ sea una solución de la ecuación (18):

$$u_{1,tt} + 2u_1 u_{1,t} - 2u_1 u_{1,x} - u_{1,xt} = 0 \tag{27}$$

podemos concluir, con ayuda de la relación de recurrencia (22), que:

$$u_k = 0, \qquad k \geq 2 \tag{28}$$

de manera que la serie (20) se reduce a:

$$u = \frac{\phi_t}{\phi} + u_1 \tag{29}$$

que constituye una transformación de Bäcklund que nos permite obtener una nueva solución de la ecuación (18), a partir de una solución conocida.

Debemos observar que la función $\phi\,(x, t)$ que aparece en (29) ya no es una función arbitraria, sino que está determinada por la función $u_1(x, t)$ ya que de acuerdo con (24) deberá cumplirse que:

$$\phi_{tt} + 2u_1\phi_t = 0, \tag{30}$$

lo cual implica que:

$$\phi(x,t) = c_1(x) + c_2(x)\int e^{-2\int u_1 dt}\,dt \tag{31}$$

donde $c_1(x)$ y $c_2(x)$ son funciones arbitrarias.

Para finalizar esta sección, notemos que la ecuación (29) nos sugiere que el cambio de variable:

$$u = \frac{f_t}{f} \tag{32}$$

podría transformar a la ecuación (18) en una ecuación más sencilla para la nueva función $f(x, t)$. Sustituyendo, (32) en (18), obtenemos:

$$f_{ttt}f - f_{tt}f_t - f_{ttx}f + f_{tt}f_x = 0 \tag{33}$$

que es una ecuación bilineal mediante la cual podríamos obtener las soluciones multi-solitónicas de la ecuación (18) siguiendo el procedimiento ideado por Hirota (Hirota, 1980). El hallazgo de la forma bilineal (33), confirma que la ecuación de Tu es una ecuación solitónica, y por ende, integrable.

III. Reducciones de similaridad

En la sección I mencionamos que en 1978 Ablowitz, Ramani y Segur formularon la conjetura de que al reducir una EDPNL no lineal integrable a una ecuación diferencial ordinaria (mediante cambios de variable adecuados) siempre se llegaba a una EDO con la propiedad de Painlevé. Como esta conjetura nunca ha podido ser demostrada, veamos si se cumple en el caso de la ecuación (18).

Para hallar las reducciones de similaridad de la ecuación (18) usaremos el método ideado por Clarkson y Kruskal (Clarkson y Kruskal, 1989), el cual ha probado ser superior al método tradicional de Lie.

Comencemos, por buscar soluciones de la ecuación (18) que se puedan escribir en la forma:

$$u(x,t) = U(x,t,w(z(x,t))), \tag{34}$$

donde $w(z)$ será la solución de alguna EDO que deberemos determinar a continuación.

Sustituyendo (34) en (18) obtenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} &U_{tt} + 2UU_t - 2UU_x - U_{xt} + w'\big[2U_{tw}z_t + U_w z_{tt} - U_w z_{xt} \\ &- U_{wx}z_t - U_{wt}z_x + 2UU_w z_t - 2UU_w z_x\big] \\ &+ (w')^2 U_{ww} z_t(z_t - z_x) + w'' U_w z_t(z_t - z_x) = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

donde $w' \equiv dw/dz$, U_x y U_t son las derivadas parciales de $U(x,t,w(z))$ respecto a x y t, tomando en cuenta únicamente la dependencia *explícita* de U, sobre x y t, es decir, sin considerar la dependencia indirecta a través de la variable $z(x, t)$.

Si ahora queremos que (35) sea una EDO para $w(z)$ los coeficientes de w' $(w')^2$ y w'', así como el término independiente, deberán ser exclusivamente funciones de z, multiplicadas a lo sumo por algún factor común que pueda ser cancelado en todos los términos de la ecuación. Si elegimos al coeficiente de w' como este factor común, tendremos que el coeficiente de $(w')^2$ deberá satisfacer una ecuación de la forma:

$$U_{ww} z_t (z_t - z_x) = U_w z_t (z_t - z_x) \Gamma(z, w) \tag{36}$$

la cual implica $U(x,t,w(z))$ que debe ser de la forma:

$$U(x,t,w(z)) = \alpha(x,t) + \beta(x,t) w(z) \tag{37}$$

Sustituyendo ahora esta expresión en (35) obtenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} &\alpha_{tt} + 2\alpha\alpha_t - 2\alpha\alpha_x - \alpha_{xt} + w(\beta_{tt} + 2\alpha\beta_t + 2\alpha_t\beta - 2\alpha\beta_x - 2\alpha_x\beta - \beta_{xt}) \\ &+ 2ww'\beta^2(z_t - z_x) + 2w^2\beta(\beta_t - \beta_x) + w'(2\beta_t z_t + \beta z_{tt} - \beta z_{xt} - \beta_x z_t \\ &- \beta_t z_x + 2\alpha\beta z_t - 2\alpha\beta z_x) + w''\beta z_t(z_t - z_x) = 0 \end{aligned} \tag{38}$$

Finalmente, si volvemos a considerar que el coeficiente de w'' es un factor común en todos los términos de esta ecuación, y exigimos que cada uno de los coeficientes de w, ww' y w^2 y w', así como el término independiente, sean iguales a este factor común multiplicado por funciones de z únicamente, llegamos a que necesariamente se deben cumplir las siguientes 4 igualdades:

$$z = -\frac{mt - k}{mx + b} \tag{39}$$

$$\alpha = 0 \tag{40}$$

$$\beta = z_t = -\frac{m}{mx + b} \tag{41}$$

$$u = -\frac{m}{mx + b} w(z) \tag{42}$$

donde m, k y b son constantes arbitrarias, y por lo tanto la ecuación (38) se reduce a:

$$w' = \frac{a}{(z-1)^2} - w^2 \quad (a > 0) \tag{43}$$

que es, tal como queríamos, una ecuación diferencial ordinaria para $w(z)$.

La ecuación (43) puede ser linearizada mediante el cambio de variable $w = R'/R$, y de esta forma es posible demostrar que (43) tiene soluciones de la forma:

$$w = \frac{c_1\lambda_1(z-1)^{\lambda_1} + c_2\lambda_2(z-1)^{\lambda_2}}{c_1(z-1)^{\lambda_1+1} + c_2(z-1)^{\lambda_2+1}} \tag{44}$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, y:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2} \tag{45}$$

donde a es una constante positiva arbitraria.

Notemos ahora que la ecuación (43) es un caso particular de la ecuación generalizada de Riccati (9), de la cual, como ya mencionamos, se sabe que es la única EDO de primer orden que posee la propiedad original de Painlevé, es decir, sus únicas singularidades móviles son polos.

Vemos, pues, que la única EDO a la que puede reducirse la ecuación (18) mediante el método de Clarkson y Kruskal sí tiene *la propiedad de Painlevé*, de manera que la conjetura de ARS mantiene su validez en este caso.

Conviene observar aquí que existe la posibilidad de que pudieran encontrarse otras reducciones de similaridad para la ecuaciones (18) utilizando el llamado "método no clásico" desarrollado por Bluman y Cole (Bluman y Cole, 1969). Con este método se han podido encontrar reducciones de similaridad para la ecuación de Burgers y para la ecuación de Fitzhugh-Nagumo que no pueden obtenerse mediante el método de Clarkson y Kruskal (Pucci, 1992; Nucci y Clarkson, 1992; Arrigo *et al.*, 1993). Sin embargo, aunque el método de Bluman y Cole nos permitiera encontrar nuevas reducciones de similaridad para la ecuación (18), estas nuevas reducciones también nos conducirían a EDO con *la propiedad de Painlevé*, ya que la conjetura de ARS (que parece ser correcta), nos dice que *siempre* que se pueda reducir una EDPNL integrable a una EDO, dicha EDO tendrá *la propiedad de Painlevé*, sin importar el método seguido para determinar la reducción de similaridad.

IV. Una extensión de la ecuación mKdV

Hemos dicho que el poseer la propiedad de Painlevé es una característica esencial de las EDPNL integrables. ¿Podemos afirmar que toda EDPNL que posea la propiedad de Painlevé es una ecuación "solitónica"? El siguiente ejemplo nos ayudará a contestar esta pregunta.

Consideremos la siguiente EDPNL:

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} - \delta(u^2)_{xx} = 0 \tag{46}$$

que se obtiene al añadir el término difusivo $(u^2)_{xx}$ (Krishnan, 1994; Satsuma, 1987) a la ecuación modificada de Korteweg-de Vries (mKdV), e investiguemos si esta ecuación tiene la propiedad de Painlevé. Para ello debemos averiguar si la solución general de la ecuación (46) puede expresarse en la forma:

$$u = \phi^{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^j, \tag{47}$$

donde α es un entero negativo, y $\phi(x, t) = 0$ define al conjunto de singularidades de la ecuación (46).

Para simplificar el cálculo haremos uso del "ansatz" de Kruskal:

$$\phi(x,t) = x - \psi(t) \tag{48}$$

el cual nos permite considerar que los coeficientes u_j que aparecen en (47) dependen exclusivamente de t (Ramani *et al.*, 1989; Weiss *et al.*, 1983).

Sustituyendo (47) en (46), utilizando (48), y exigiendo que α sea un entero negativo, es fácil probar que $\alpha = -1$. Además, agrupando a todos los términos que contengan a ϕ^j, e igualando a cero el coeficiente resultante, obtenemos la relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} & u_{j-3,t} - (j-3)\psi_t u_{j-2} + 6(j-1)u_j \\ & - 3j(j-1)u_j + j(j-1)(j-2)u_j - 6\delta \sum_{m=0}^{j} u_m u_{j-m} \\ & - 2\delta \sum_{m=-1}^{j-1} (m+1)(j-m-1)u_{m+1}u_{j-m-1} \\ & - 2\delta \sum_{m=0}^{j} (j-m-1)(j-m)u_m u_{j-m} \\ & + 8\delta \sum_{m=0}^{j} (j-m)u_m u_{j-m} \\ & + \sum_{m=0}^{j} \sum_{k=0}^{j-m} (j-m-k-1)u_m u_k u_{j-m-k} = 0 \end{aligned} \tag{49}$$

la cual implica (tomando $j = 0$) que:

$$u_0 = -3\delta \pm (9\delta^2 - 6)^{1/2} \tag{50}$$

Agrupando ahora a todos los términos que contienen a u_j en la relación de recurrencia, e igualando a cero el coeficiente resultante, encontramos que las "resonancias" de la relación de recurrencia son:

$$j = -1, \quad j = 3, \quad j = 2\delta u_0 + 4 \equiv j(\delta) \tag{51}$$

Ahora, para que la ecuación (46) tenga la propiedad de Painlevé, es necesario: i) que $j(\delta)$ sea un entero positivo, y ii) que se cumplan las condiciones de compatibilidad que se encuentran al sustituir los valores j=3 y $j= j(\delta)$ en la relación de recurrencia (49).

En el caso en que δ=0 la ecuación (46) se reduce a la ecuación mKdV, las resonancias son todas enteras $(j = -1, 3, 4)$, y las condiciones de compatibilidad para j=3,4 se satisfacen idénticamente. Esto implica que la ecuación mKdV posee la propiedad de Painlevé, lo cual era de esperarse ya que desde 1972 Hirota demostró que la ecuación mKdV tiene soluciones multi-solitónicas (Hirota, 1972).

En el caso en que $\delta \neq 0$ debemos buscar aquellos valores de δ tales que $j(\delta)$ sea un entero positivo.

Sustituyendo (50) en la expresión para $j(\delta)$ obtenemos:

$$j(\delta) = 2\delta\left(-3\delta \pm \sqrt{9\delta^2 - 6}\right) + 4 \tag{52}$$

y despejando a δ^2 de esta ecuación obtenemos:

$$\delta^2 = \frac{[j(\delta) - 4]^2}{24 - 12j(\delta)} \tag{53}$$

la cual implica que 24-12$j(\delta)$>0, de manera que forzosamente $j(\delta)$<2. Como $j(\delta)$ debe ser un entero positivo, podemos concluir que:

$$j(\delta) = 1, \tag{54}$$

lo cual, al sustituirse en (53), implica que la única posibilidad para que (46) sea integrable es que:

$$\delta = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/2}. \tag{55}$$

Si δ tiene este valor, tendremos que las resonancias son $j = -1,1,3$ y es fácil comprobar que las condiciones de compatibilidad que se obtienen cuando j=1,3 se satisfacen idénticamente, lo cual prueba que para este valor de δ la ecuación (46) sí tiene la *propiedad de Painlevé* y es, por lo tanto, integrable.

En vista, pues, de que la ecuación (46) posee la propiedad de Painlevé cuando $\delta = (3/4)^{1/2}$, podríamos sentirnos inclinados a concluir que esta ecuación es una ecuación "solitónica", similar a la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV), la ecuación de sine-Gordon (sG), y a la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS), por citar sólo a tres de las más conocidas. Sin embargo, un procedimiento similar al que nos sugirió usar el cambio de variable (32) en el caso de la ecuación (18), nos lleva a tratar de simplificar la ecuación (46) mediante el cambio de variable:

$$u = A(\ln f)_x \tag{56}$$

Sustituyendo esta expresión en (46), encontramos inesperadamente que si $A = -(3)^{1/2}$ y $\delta = (3/4)^{1/2}$, la ecuación (46) se transforma en una ecuación lineal:

$$f_t + f_{xxx} = 0 \tag{57}$$

lo cual confirma que la ecuación (46) es integrable, pero de una forma mucho más sencilla que en el caso de las ecuaciones KdV, *s*G y NLS, las cuales no se pueden linealizar mediante un simple cambio de variables, y requieren el complejo método de dispersión inversa para ser resueltas.

Sumario y comentarios finales

En este trabajo empezamos por presentar una brevísima reseña histórica que le permita al lector poco familiarizado con el tema enterarse rápidamente acerca de *la propiedad de Painlevé*, y cuál es su relación con las ecuaciones diferenciales parciales no lineales (EDPNL) integrables.

A continuación aplicamos *la prueba de Painlevé* a dos EDPNL poco estudiadas las ecuaciones (18) y (46), y demostramos que ambas ecuaciones poseen *la propiedad de Painlevé* y son, por lo tanto, integrables. En el caso de la ecuación (18) hallamos un cambio de variable que permite escribir esta ecuación en forma bilineal (lo cual permite, en principio, obtener sus soluciones multi-solitónicas), mientras que en el caso de la ecuación (46) encontramos que un cambio de variable similar permite linealizar esta ecuación. Estos dos ejemplos muestran claramente las dos posibilidades que existen cuando tenemos una EDPNL que pasa *la prueba de Painlevé*: o bien la ecuación en cuestión es una auténtica ecuación "solitónica", que puede escribirse en forma bilineal, y tiene soluciones multi-solitónicas, o bien existe algún cambio de variable que permite linealizar la ecuación.

En la sección II mostramos también cómo el análisis de Painlevé permite determinar una transformación de Bäcklund para la ecuación (18), lo cual hace posible obtener nuevas soluciones a partir de una solución conocida.

En la sección III buscamos reducciones de similaridad para la ecuación (18) mediante el método de Clarkson y Kruskal, con el fin de verificar la validez de la conjetura de ARS en este caso particular. Encontramos así una reducción de similaridad que permite transformar a la ecuación (18) en una ecuación generalizada de Riccati, lo cual es consistente con la conjetura de ARS, ya que es conocido (Ramani *et al.,* 1989) que la ecuación de Riccati posee la propiedad original de Painlevé (definida para ecuaciones diferenciales ordinarias).

Es conveniente indicar que la prueba de Painlevé es el único procedimiento *algorítmico* conocido, capaz de discernir si una EDPNL dada es integrable o no. Por esta razón, el conocer cómo efectuar la prueba de Painlevé es una herramienta útil para estudiar a las EDPNL.

Finalmente quisiéramos añadir que la *propiedad de Painlevé* es un tema que continúa siendo investigado, por lo cual en junio de 1996 se realizó en Córcega, Francia, el congreso *The Painlevé Property, One Century Later* dedicado exclusivamente a estudiar esta propiedad.

REFERENCIAS

Ablowitz, M.; A. Ramani y H. Segur (1978). "Nonlinear Evolution Equations and Ordinary Differential Equations of Painlevé Type", *Lettere al Nuovo Cimento*, 23: 333-338.

______ (1980). "A Connection Between Nonlinear Evolution Equations and Ordinary Differential Equations of P-type. I", *J. Math. Phys.*; 21: 715-721.

Ablowitz, M. y H. Segur (1977). "Exact Linearization of a Painlevé Transcendent", *Phys. Rev. Lett.*; 38: 1103-1106.

Arrigo, D.; P. Broadbridge y J. Hill (1993). "Nonclassical Symmetry Solutions and the Methods of Bluman-Cole and Clarkson-Kruskal", *J. Math. Phys.*; 34: 4692-4703.

Bell, E. (1986). *Men of Mathematics*. Simon & Schuster, New York.

Bluman, G. y J. Cole (1969). "The General Similarity Solution of the Heat Equation", *J. Math. Mech.*; 18:1025-1042.

Clarkson, P. (1986). "The Painlevé Conjecture, the Painlevé Property for Partial Differential Equations and Complete Integrability", *Physica D*, 18: 209-210.

______ (1989). "New similarity Reductions and Painlevé Analysis for the Symmetric Regularized Long Wave and Modified Benjamin-Bona-Mahoney Equations", *J. Phys.* A; 22: 3821-3848.

______ y M. Kruskal (1989). "New Similarity Reductions of the Boussinesq Equation", *J. Math. Phys.*; 30: 2201-2213.

Conte, R.; A. Fordy y A. Pickering (1993). "A Perturbative Painlevé Approach to Nonlinear Differential Equations", *Physica D*; 69: 33-58.

Davis, H. (1962). *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*. Dover, New York.

Gardner, C. S.; J. M. Greene; M. D. Kruskal y R. M. Miara (1967). "Method For Solving the Kortewed-de Vries Equation", *Phys. Rev. Lett.*; 19: 1095-1097.

Hille, E. (1976). *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain.* Wiley, New York.

Hirota, R. (1972). " Exact Solution of the Modified Korteweg-de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons", *J. Phys. Soc.* Japan, 33: 1456-1458.

______ (1980). "Direct Methods in Soliton Theory", *Solitons*. R.K Bullough and P.J. Caudrey (eds.). Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Ince, E. (1944). *Ordinary Differential Equations*. Dover, New York.

Kichenassamy, S. y Srinivasan, G. (1995). "The Structure of WTC Expansions and Applications", *J. Phys. A* ; 28: 1977-2004.

Koblitz, A. (1983). *A Convergence of Lives*. Birkhäuser, Boston.

Krishnan, E. (1994). "On Some Diffusion Equations", *J. Phys. Soc.* Japan; 63: 460-465.

Kruskal, M. y Clarkson, P. (1992). "The Painlevé-Kowalevski and Poly-Painlevé Tests for Integrability", *Stud. Appl. Math.*; 68: 87-165.

Levine, G. y Tabor, M. (1988). "Integrating the Nonintegrable: Analytic Structure of the Lorenz System Revisited", *Physica D* ; 33: 189-210.

Nucci, M. y P. Clarkson (1992). "The Nonclassical Method is More General than the Direct Method for Symmetry Reductions. An Example of the Fitzhugh-Nagumo Equation", *Phys. Lett. A*; 164: 49-56.

Pucci, E. (1992). "Similariry Reductions of Partial Differential Equations", *J. Phys. A.*; 25: 2631-2640.

Ramani, A.; B. Grammaticos y T. Bountis (1989) . "The Painlevé Property and Singularity Analysis of Integrable and Non-integrable Systems", *Phys. Reports*; 180: 159-245.

Ramani, A.; B. Grammaticos y S. Tremblay (2000). "Integrable Systems Without the Painlevé Property", *J. Phys. A*; 33: 3045-3052.

Satsuma, J. (1987). "Explicit Solutions of Nonlinear Equations with Density Dependent Diffusion", *J. Phys. Soc. Japan*; 56: 1947-1950.

Tabor, M. y J. Weiss (1981). "Analytical Structure of the Lorenz System", *Phys. Rev. A* ; 24: 2157-2167.

Tu, G.-Z. (1983). " A New Hierarchy of Coupled Degenerate Hamiltonian Equations", *Phys. Lett. A*; 94: 340-342.

Weiss, J.; M. Tabor y G. Carnevale (1983). "The Painlevé Property for Partial Differential Equations", *J. Math. Phys.*; 24: 522-526.

Zakharov, V. E. (Ed.) (1991). *What is Integrability?* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

