Vladimir S. Manko

Soluciones solitónicas axialsimétricas en relatividad general

Ciencia Ergo Sum, vol. 8, núm. 3, noviembre, 2001
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Ciencia Ergo Sum,
ISSN (Printed Version): 1405-0269
ciencia.ergosum@yahoo.com.mx
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Soluciones solitónicas axialsimétricas en relatividad general

VLADIMIR S. MANKO*

Resumen. *Se revisan las soluciones solitónicas axialsimétricas obtenidas por técnicas de generación de soluciones exactas de las ecuaciones no lineales dentro del marco de la Relatividad General.*
Palabras clave: *Relatividad General, ecuaciones de Evast, técnicas de generación de soluciones.*

The Axisymmetric Solitonic Solutions in General Relativity

Abstract. *The axisymmetric solutions obtained by using the solution generating techniques to the nonlinear equations of the General Theory of Relativity are revised.*
Keywords: *General Relativity, Evast equations, solution generating techniques.*

Recepción: 8 de noviembre de 2000
Aceptación: 14 de mayo de 2001

Introducción

Los campos gravitacionales y electromagnéticos con simetría axial están definidos en relatividad general por dos potenciales escalares ε que describe el campo gravitacional y Φ que describe el campo electromagnético, que satisfacen a las ecuaciones de Ernst (1968):

$$(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\Delta\varepsilon=(\nabla\varepsilon+2\bar{\Phi}\nabla\Phi)\nabla\varepsilon,$$

$$(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\Delta\Phi=(\nabla\varepsilon+2\bar{\Phi}\nabla\Phi)\nabla\Phi, \tag{1}$$

El sistema (1) es de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden que en general es muy difícil de resolver. El progreso en la obtención de soluciones de las ecuaciones (1) fue relacionado con el estudio de su grupo de simetrías internas con número infinito de parámetros, primero en el caso de vacío ($\Phi = 0$) y más tarde incluyendo el campo electromagnético. La existencia de este grupo permite reformular las ecuaciones (1) en forma de un sistema matricial, lineal y singular, aplicando para su resolución el método de Riemann en el plano del parámetro analítico auxiliar. La solución cualquiera del sistema (1) se obtiene entonces a partir de una solución conocida, con ayuda de un desplazamiento apropiado a lo largo de la órbita del grupo de transformaciones.

Las soluciones solitónicas surgen de manera natural en este acercamiento, y eso lo mostraron Belinskii y Zakharov

* *Departamento de Física, Cinvestav del IPN. Apartado Postal 14-740, C.P. 07000. México, D. F.*

(1979) utilizando el método de *scattering* inverso que es muy bien conocido en mecánica cuántica. Por otro lado, este método, aplicado al caso estacionario axialsimétrico en relatividad general, lleva a las soluciones que describen el campo exterior de masas alineadas situadas sobre el eje de simetría y que no se propagan en el transcurso del tiempo, como uno esperaría de los solitones clásicos.

I. El método de Sibgatullin y la solución 2N-solitónica de electrovacío

El mejor método moderno para la generación de métricas solitónicas de Einstein-Maxwell es el método de Sibgatullin (1991), que permite la construcción de los potenciales ε y Φ que dependen de coordenadas cilíndricas ρ y z a partir de su comportamiento arbitrario sobre el eje de simetría; es decir, dadas la funciones arbitrarias $e(z) \equiv \varepsilon(\rho = 0, z)$ y $f(z) \equiv \Phi(\rho = 0, z)$ se pueden obtener las $\varepsilon(\rho, z)$ y $\Phi(\rho, z)$ correspondientes que satisfacen a las ecuaciones (1).

La forma de las funciones $e(z)$ y $f(z)$ que nos lleva a la solución *2N*-solitónica de electrovacío es la siguiente:

$$e(z) = 1 + \sum_{l=1}^{N} \frac{e_l}{z-\beta_l}, \quad f(z) = \sum_{l=1}^{N} \frac{f_l}{z-\beta_l} \tag{2}$$

donde e_l, β_l y f_l, $l = 1,..., N$, son constantes complejas arbitrarias.

Los potenciales $\varepsilon(\rho, z)$ y $\Phi(\rho, z)$ que sobre el eje de simetría tienen el comportamiento (2) se obtienen de las integrales

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\mu(\sigma) e(\xi) d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}, \quad \Phi = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\mu(\sigma) f(\xi) d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}, \tag{3}$$

que involucran la función $\mu(\sigma)$ que satisface la ecuación integral singular

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu(\sigma)\left[e(\xi)+\tilde{e}(\eta)+2f(\xi)\tilde{f}(\eta)\right]d\sigma}{(\xi-\eta)\sqrt{1-\sigma^2}} = 0 \tag{4}$$

y la condición de normalización

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\mu(\sigma) d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} = 1 \tag{5}$$

En las fórmulas (3)-(5) $\xi = z + i\rho\sigma$, $\eta = z + i\rho\tau$, $\sigma, \tau \in [-1, 1]$ y $\tilde{e}(\eta) := \overline{e(\bar{\eta})}$, donde la barra denota la conjugación compleja.

Las expresiones finales para ε y Φ tienen la forma (Ruiz *et al.*, 1995)

$$\varepsilon = E_+/E_-, \ \Phi = F/E_-,$$

$$E_\pm = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \pm 1 & \frac{r_1}{\alpha_1-\beta_1} & \cdots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N}-\beta_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pm 1 & \frac{r_1}{\alpha_1-\beta_l} & \cdots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N}-\beta_l} \\ 0 & \frac{h_1(\alpha_1)}{\alpha_1-\beta_1} & \cdots & \frac{h_1(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N}-\beta_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{h_l(\alpha_1)}{\alpha_1-\beta_1} & \cdots & \frac{h_l(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N}-\beta_l} \end{vmatrix}$$

$$F = \begin{vmatrix} 0 & f(\alpha_1) & \cdots & f(\alpha_{2N}) \\ -1 & \frac{r_1}{\alpha_1-\beta_1} & \cdots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N}-\beta_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & \frac{r_1}{\alpha_1-\beta_l} & \cdots & \frac{r_{2N}}{\alpha_{2N}-\beta_l} \\ 0 & \frac{h_1(\alpha_1)}{\alpha_1-\beta_1} & \cdots & \frac{h_1(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N}-\beta_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{h_l(\alpha_1)}{\alpha_1-\beta_l} & \cdots & \frac{h_l(\alpha_{2N})}{\alpha_{2N}-\beta_l} \end{vmatrix}$$

$$r_n := \sqrt{\rho^2+(z-\alpha_n)^2}, \ h_l(\alpha_n) := \bar{e}_l + 2\bar{f}_l f(\alpha_n)$$

$$e_l = \frac{2\Pi_{n=1}^{2N}(\beta_l-\alpha_n)}{\Pi_{k\neq l}^{N}(\beta_l-\beta_k)\Pi_{\kappa=1}^{N}(\beta_l-\bar{\beta}_\kappa)} - 2\sum_{\kappa=1}^{N}\frac{f_l\bar{f}_\kappa}{\beta_l-\bar{\beta}_\kappa} \tag{6}$$

$E_\pm$ y F siendo determinantes $(2N+1) \times (2N+1)$.

El conjunto de los parámetros de las fórmulas (6) está compuesto de β_l, f_l, así como de los nuevos parámetros α_n, $n = 1,..., 2N$, que pueden tomar valores reales arbitrarios o ser pares complejos conjugados.

La solución (6) describe un sistema de N masas rotantes, cargadas y magnetizadas que se encuentran sobre el eje de simetría. Estas masas pueden ser tanto hoyos negros, cuando α_n son reales, como discos relativistas, cuando α_n son pares complejos conjugados (ver figura 1).

FIGURA 1. LOS SISTEMAS ALINEADOS COMPUESTOS: (A) DE HOYOS NEGROS, (B) DE DISCOS RELATIVISTAS Y (C) DE HOYOS NEGROS Y DISCOS RELATIVISTAS.

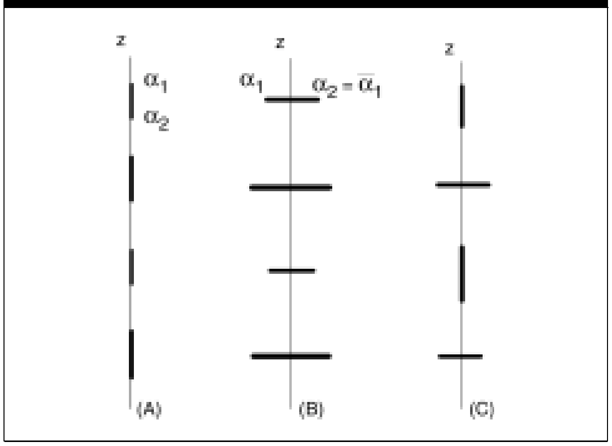
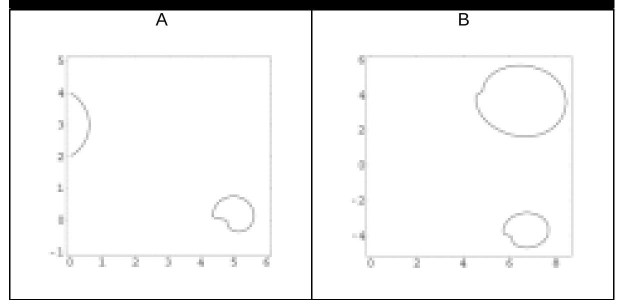


FIGURA 2. SUPERFICIES ESTACIONARIAS PARA LOS SIGUIENTES SISTEMAS BINARIOS EN EQUILIBRIO: (A) EL SISTEMA COMPUESTO DE UN HOYO NEGRO Y UN DISCO RELATIVISTA; (B) EL SISTEMA COMPUESTO DE DOS DISCOS RELATIVISTAS.



II. Algunas aplicaciones

Con ayuda de la solución solitónica (6) se pueden resolver los siguientes dos problemas importantes de relevancia astrofísica: i) el equilibrio en sistemas binarios compuestos de hoyos negros y discos relativistas, ii) la descripción de los campos exteriores de objetos compactos axialsimétricos, rotantes, cargados y magnetizados.

El problema (i) fue considerado en los artículos de Bretón *et al*. (1998 y 1999), así como en el trabajo de Manko, Ruiz y Sanabria-Gómez (2000). El resultado principal de los dos primeros trabajos es la existencia de soluciones numéricas de las ecuaciones de balance que representan estados de equilibrio entre un hoyo negro regular y un objeto superextremo (la masa sobrecargada o disco relativista). En el tercer trabajo se encontraron las fórmulas analíticas que determinan equilibrio de dos componentes en la famosa solución doble Kerr (Kramer y Neugebauer, 1980). En la figura 2 se muestran las superficies estacionarias para dos diferentes casos de sistemas binarios en equilibrio puramente gravitacional (la fuerza atractiva gravitatoria está equilibrada por la fuerza repulsiva de interacción espín-espín): el primer caso (figura 2A) representa equilibrio de un hoyo negro y un disco relativista, y el segundo caso (figura 2B) representa equilibrio de dos discos relativistas.

La solución (6) es también apropiada para la resolución del problema (ii), porque ella es asintóticamente plana si al llamado parámetro NUT se le asigna el valor cero; y además sus constantes β_l, α_n y f_l definen los momentos multipolares arbitrarios. Las generalizaciones magnetizadas asintóticamente planas de la métrica de hoyo negro de Kerr-Newman fueron construidas por Manko, Martín y Ruiz (1995). Un resultado muy reciente y novedoso es la construcción de la métrica para el campo exterior de una estrella de neutrones (Manko, Mielke, Sanabria-Gómez, 2000) en funciones racionales.

Conclusión

Las soluciones solitónicas axialsimétricas en relatividad general han jugado y siguen jugando un papel muy importante. Las métricas de hoyos negros son ahora complementadas por las soluciones mas generales que permiten tratar exitosamente los problemas del interés astrofísico. Se podría esperar nuevos descubrimientos interesantes relacionados con estas soluciones, tanto en la esfera de sus nuevas aplicaciones como en la investigación más profunda de sus propiedades físicas.

BIBLIOGRAFÍA

Belinskii, V. A. y V. E. Zakharov (1979). *Sov. Phys.* JETP. 50, 1.

Bretón, N.; V. S. Manko y J. A. Aguilar-Sánchez

______ (1998). *Class. Quantum Grav.* 15, 3071.

______ (1999). *Class. Quantum Grav.* 16, 3725.

Ernst, F. J. (1968). *Phys. Rev.* 168, 1415.

Kramer, D. y G. Neugebauer (1980). *Phys. Lett.* A. 75, 259.

Manko, V. S.

______ (1993). *Phys. Lett.* A 181, 349.

______; J. Martín y E. Ruiz (1995). *J. Math. Phys.* 36, 3063.

______; E. Mielke y J. D. Sanabria-Gómez (2000). *Phys. Rev.* D 61, 081501(R).

______; E. Ruiz y J. D. Sanabria-Gómez (2000). *Class. Quantum Grav.* 17, 3881.

Ruiz, E.; V. S. Manko y J. Martín (1995). *Phys. Rev.* D 51, 4192.

Sibgatullin, N. R. (1991). *Oscillations and Waves in Strong Gravitational and Electromagnetic Fields.* Berlin, Springer.