

Sara Cruz y Cruz, Nicolás Fernández-García, Oscar Rosas-Ortiz
Diagramas de Bianchi para Susy
Ciencia Ergo Sum, vol. 13, núm. 3, noviembre-febrero, 2006, pp. 319-331,
Universidad Autónoma del Estado de México
México

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=10413311>



Ciencia Ergo Sum,
ISSN (Versión impresa): 1405-0269
ciencia.ergosum@yahoo.com.mx
Universidad Autónoma del Estado de México
México

¿Cómo citar?

Fascículo completo

Más información del artículo

Página de la revista

www.redalyc.org

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

Diagramas de Bianchi para Susy

Sara Cruz y Cruz*, Nicolás Fernández-García**, Oscar Rosas-Ortiz**

Uno no puede evitar la sensación de que esas fórmulas matemáticas tienen una existencia independiente e inteligencia propia, de que son más sabias que nosotros, incluso más sabias que sus descubridores, de que se puede obtener de ellas mucho más de lo que originalmente se suponía.

H. Hertz refiriéndose a las ecuaciones de Maxwell.

Recepción: 10 de febrero de 2006

Aceptación: 20 de junio de 2006

*Departamento de Física, Cinvestav. A. P. 14740, México, D.F. C.P. 07000.

Posición permanente: Academia de Ciencias Básicas, UPIITA-IPN, Av. IPN 2508, C.P. 07340. México, D.F. Correo electrónico: sara@fis.cinvestav.mx,

**Departamento de Física, Cinvestav. A. P. 14740, C.P. 07000. México, D.F. Correo electrónico: jnicolas@fis.cinvestav.mx orosas@fis.cinvestav.mx

Los autores agradecen el apoyo del Conacyt para la realización de este trabajo. O. R. O. agradece la atenta invitación del profesor Máximo Agüero para contribuir en este número especial de la revista. SCyC agradece el apoyo COFAA, EDI, COTEPABE del IPN.

Resumen: Se revisa el origen de los solitones como soluciones de la ecuación de Korteweg-deVries y su presencia en la formulación supersimétrica de la Mecánica Cuántica. Se introducen los diagramas de Bianchi como una herramienta simbólica para construir socios supersimétricos de un Hamiltoniano dado.

Palabras clave: Mecánica cuántica supersimétrica, ecuación KdV, Diagramas de Bianchi.

Bianchi Diagrams for Susy

Abstract: The soliton-like solutions of the Korteweg-deVries equation are reviewed in a historical context as well as their presence in Supersymmetric Quantum Mechanics. The Bianchi diagrams are introduced as a symbolic tool to obtain supersymmetric partners of a given initial Hamiltonian.

Key words: Supersymmetric quantum mechanics, KdV equation, Bianchi diagrams.

Introducción

El 2005 fue motivo de festejo mundial por dos razones: se celebraron 100 años de la publicación de los primeros trabajos de Einstein que cambiaron nuestra forma de entender a la naturaleza y se celebró también el IV centenario de *El Quijote* de Cervantes. Esta coincidencia caprichosa refleja dos aspectos importantes de nuestra civilización: la ciencia y la literatura. No siempre bien entendidas (y nunca lo suficientemente bien apoyadas), estas actividades son, con mucho, patrimonio de nuestra especie que debe ser valorado y cultiva-

do. Afortunadamente, las comunidades científica y literaria del mundo organizaron, como parte del festejo, diversos congresos, talleres y un sin número de actividades que esperamos, repercutirán en las nuevas generaciones para fomentar su interés en la ciencia y la literatura. El número especial de la revista al que pertenece este artículo es un ejemplo de ello.

En la primera sección del artículo presentamos una revisión de los orígenes de los solitones como soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales. Como veremos, las soluciones de la ecuación de Korteweg-deVries resultaron apropiadas para describir el fenómeno que dio origen al

término solitón. Su estructura analítica se entendió después de usar las transformaciones de Bäcklund y Darboux. En general, las aplicaciones de los solitones son diversas, abarcan desde teoría de fluidos y sistemas electrónicos hasta tsunamis y gravitación (Lamb, 1980; Drazin y Johnson, 1989; Calogero y Degaspens, 1982; Faddeev y Takhtajan, 1987; Dubrovin, Matveev y Novikov, 1976; y Fordy, 1994). En las últimas décadas se han usado incluso para modelar el comportamiento de la molécula del ADN (Agüero, Fujioka y Ceciliano, 2002; Ramírez, García, Agüero y Villagrán, 2005; y Villagrán, Agüero, Vázquez y García, 2006 y referencias ahí citadas). En la segunda sección del artículo mostramos que la transformación de Darboux también es del interés de la Mecánica Cuántica. Son muy pocos los potenciales que admiten soluciones exactas para la ecuación de Schrödinger. Una ampliación inmediata de esta clase de potenciales consiste en obtener sus transformados de Darboux que resultan, además, sus socios supersimétricos. En la tercera sección mostraremos que la iteración apropiada de este mecanismo incluye la transformación de Bäcklund como una consecuencia. Sacaremos provecho de estos resultados introduciendo un método simbólico, basado en los diagramas de Bianchi de la teoría de solitones, que facilita el cálculo de la obtención de estos nuevos potenciales en la formulación supersimétrica. Terminaremos el artículo con una pequeña sección de conclusiones y planteamientos generales.

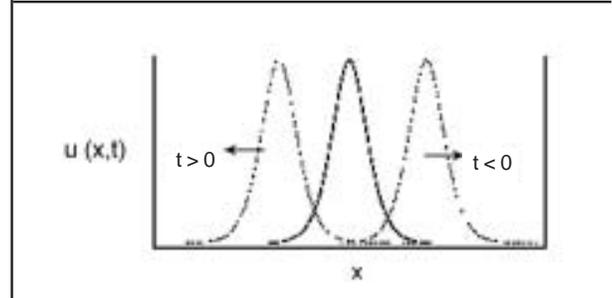
1. Una historia solitaria

El origen histórico de la teoría de solitones puede situarse en agosto de 1834 con las observaciones de J. Scott en el Canal Unión de Edimburgo. Scott observaba el movimiento de un bote jalado por dos caballos a lo largo del canal; el bote se detuvo súbitamente pero la perturbación de agua continuó su movimiento con gran velocidad, tomando el aspecto de una gran elevación solitaria (una cresta suave y

1. Si una cadena de átomos es sometida a una tensión externa, se produce una respuesta de los enlaces que repercute en el movimiento (oscilaciones) de cada partícula. Si la cadena se tensa dos veces más fuerte la repuesta de los enlaces no es dos veces mayor y el movimiento de cada partícula dista mucho de ser similar al anterior. Decimos entonces que la respuesta de los enlaces a la tensión de la cadena es no lineal (las cuerdas de una guitarra, por el contrario, son un buen ejemplo de un sistema lineal: al tensar la cuerda y soltarla se produce una vibración que es dos veces mayor si la tensión aplicada a la cuerda es dos veces más fuerte).

Figura 1. Las ondas de traslación estudiadas por Scott a principios del siglo XIX.

La curva continua corresponde al solitón en $t = 0$.



bien definida) sin cambiar su forma o disminuir su velocidad (ver figura 1). Impresionado por este fenómeno, Scott siguió a la “onda solitaria” por varios kilómetros hasta que la perdió de vista al final del canal (Scott, 1844). Estudios posteriores le permitieron establecer que las ondas de traslación (como él las llamó) están descritas por la función:

$$u(x,t) = \frac{A}{\cosh^2[(x-vt)/\lambda]}, \tag{1.1}$$

y que existe una relación entre la rapidez v , la amplitud A , y la longitud de onda λ : $v = 2A = -4/\lambda^2$.

El trabajo de Scott inició un gran debate acerca de la explicación teórica del fenómeno, que culminó con los resultados obtenidos por Korteweg y deVries (1895), quienes mostraron que las “ondas de traslación” (1.1) son soluciones de la ecuación diferencial no lineal:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 6u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \tag{1.2}$$

La ecuación Korteweg-deVries (KdV), con las condiciones de frontera apropiadas, ha mostrado ser de enorme utilidad para la física desde su descubrimiento. Aparece en disciplinas que aparentemente no tienen conexión alguna con el trabajo original de Scott. Por ejemplo, en 1953 Enrico Fermi, John Pasta y Stanley Ulam estaban interesados en el estudio de la tendencia por el desorden (entropía) que tienen todos los sistemas físicos, así que modelaron, por computadora, una cadena de 64 partículas idénticas (representando átomos) unidas en sus extremos por resortes (representando los enlaces químicos entre ellos). Fermi sospechaba que el carácter no lineal de los enlaces químicos¹ podría originar un inevitable incremento en la entropía, por eso analizaron cientos de interacciones calculando cada una de las fuerzas y las posiciones involucradas en su modelo. Ellos esperaban un conjunto desordenado de vibraciones arbitrarias, pero el resultado que obtuvieron los sorprendió. Las vibraciones mostraron un comportamiento

ordenado partiendo de una determinada frecuencia que se fue modificando poco a poco y de punto en punto (digamos hacia la derecha). Entonces, esta modificación cambió súbitamente de dirección y de ritmo para finalmente regresar a la frecuencia original y al punto de partida. Fue como si al vibrar la cadena se comportase como una cuerda de guitarra que poco a poco va cambiando de tono en forma suave y paulatina y después, de repente, invirtiera los tonos para regresar al de partida. Fermi quedó impresionado, jamás pensó que un sistema no lineal pudiese mostrar un comportamiento tan ordenado. Estos resultados llamaron también la atención de Kruskal y Zabusky (1965), quienes calcularon el límite continuo de la cadena de Fermi-Pasta-Ulam (FPU) y encontraron que la ecuación correspondiente era la KdV. La solución numérica de Kruskal y Zabusky mostró que en la cadena FPU se producen inicialmente pulsos del tipo (1.1) y que éstos se mueven a velocidad constante sin cambiar su forma. Además, las colisiones de unos con otros sólo producen un ligero desplazamiento con respecto a su posición en el movimiento libre. Kruskal y Zabusky decidieron que el nombre más apropiado para estas ondas es el de solitones (Kruskal y Zabuski, 1965).

Dos años después, Gardner, Greene, Kruskal y Miura establecieron el método de solución al problema de valores iniciales asociado con la ecuación KdV (Gardner, Greene, Kruskal y Miura, 1967). Haremos un pequeño bosquejo de las ideas involucradas, el lector interesado puede consultar las referencias clásicas del tema (Lamb, 1980; Drazin y Johnson, 1989; Calogero y Degaspens, 1982; y Faddeev y Takhtajan, 1987). El ingrediente básico es una “transformación espectral” (TE) de la función $u(x,t)$ con respecto a la variable independiente x , semejante a una transformación de Fourier (TF). De hecho, como la ecuación KdV es no lineal, la transformación espectral es una generalización no lineal de la TF. Para empezar, consideremos una función auxiliar $\varphi(x, \kappa)$ que depende de un parámetro κ , y que tiene la enorme virtud de satisfacer una ecuación diferencial lineal más que conocida:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = [u(x,t) - \kappa^2] \varphi \tag{1.3}$$

Obsérvese que, con las condiciones de frontera apropiadas, (1.3) es la ecuación de Schrödinger para $\varphi(x, \kappa)$ con el valor propio $\varepsilon = \kappa^2$. El Hamiltoniano correspondiente es:

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t) \tag{1.4}$$

El comportamiento asintótico de φ en $x \rightarrow \pm 1$ proporciona la información suficiente para obtener la transformada espectral $\tilde{u}(\kappa, t)$ de $u(x, t)$. En concreto, para la parte continua de ε ($-1 < \kappa < 1$), la TE coincide con el

coeficiente de reflexión $R(\kappa, t)$ que se define en la teoría de dispersión para $u(x, t)$. La parte discreta de ε , por el contrario, consiste en valores imaginarios puros $\kappa = i\lambda_k$, $\kappa = 1, 2, \dots, n$. Así, $\varepsilon_k = -\lambda_k^2$ representa a las energías de los estados ligados de $u(x, t)$. En este caso, la TE es igual al coeficiente de normalización de $\varphi(x, \lambda_k)$ (Calogero y Degaspens, 1982).

La TE, al igual que la TF, permite determinar la evolución temporal en forma sencilla y explícita (aunque difieren precisamente en la parte discreta de κ y en que la correspondencia $u(x, t) \rightarrow \tilde{u}(\kappa, t)$ es no lineal). De esta forma, como las soluciones de la ecuación KdV con un espectro puramente discreto (e.g. n valores enteros de κ) corresponden a la interacción entre n solitones, todos ellos con diferentes velocidades y diferentes formas, la transformación espectral describe en este caso el movimiento de n partículas libres. Por otro lado, las soluciones con espectro puramente continuo se comportan como paquetes de onda: se dispersan con el tiempo.

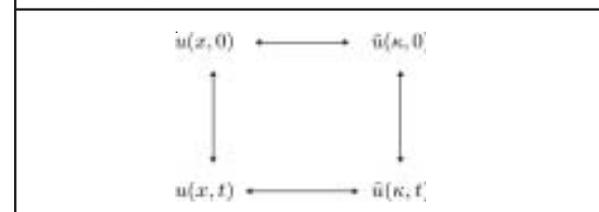
La parte final del método consiste en invertir el mapeo $u(x, t) \rightarrow \tilde{u}(\kappa, t)$. Para ello consideremos la evolución del problema de valores iniciales $u(x, 0) \rightarrow u(x,t)$ mediante la conmutatividad del diagrama mostrado en la figura 2.

El método directo $u(x,t) \rightarrow \tilde{u}(\kappa, t)$ requiere sólo resolver la ecuación de Schrödinger (1.3), mientras que el método inverso $\tilde{u}(\kappa, t) \rightarrow u(x,t)$ requiere resolver una ecuación lineal-integral (la ecuación de Gel'fand-Levitan-Marchenko, ver Dubrovin, Matveev y Novikov, 1976). Para estudiar la conmutatividad del diagrama existen diversas técnicas entre las que se encuentran la formulación de los pares de Lax (Lamb, 1980) y la transformación de Bäcklund (Fordy, 1994 y Wahlquist y Estabrook, 1973).

1.1. Transformaciones de Bäcklund

En las últimas décadas, la transformación de Bäcklund ha sido la base de importantes avances en el estudio de las ecuaciones diferenciales no lineales. Introducida por A. V. Bäcklund a finales del siglo XIX para el estudio de superficies (Bäcklund, 1873), esta transformación también fue investigada por Lie (1880),

Figura 2. La transformación espectral de la función u implica que el diagrama sea conmutativo. Con la notación obvia tenemos: $u(0) \rightarrow u(t) \rightarrow \tilde{u}(t)$, o bien $u(0) \rightarrow \tilde{u}(0) \rightarrow \tilde{u}(t) \rightarrow u(t)$.



Bianchi (1922), y Darboux (1894); y posteriormente fue desarrollada por Goursat (1902) y Clairin (1910). Desde un punto de vista moderno, la transformación de Bäcklund cobra interés por dos aspectos importantes: 1) La invariancia de una ecuación diferencial no lineal ante una transformación de Bäcklund da lugar a la generación de una cantidad infinita de soluciones mediante el uso de principios de superposición puramente algebraicos y 2) la transformación de Bäcklund permite relacionar algunas ecuaciones diferenciales no lineales con ecuaciones diferenciales canónicas que son bien conocidas.

Las aplicaciones más conocidas incluyen el estudio de la ecuación sine-Gordon $1 + 1$ (eg propagación de pulsos ultracortos), la ecuación elíptica sine-Gordon (eg propagación estacionaria de flujo magnético), la ecuación Monge-Ampère-Burgers (eg efectos combinados de dispersión y difusión), y la ecuación KdV que, como hemos visto, modela el comportamiento dinámico de las ondas solitarias de Scott. Esta ecuación también es usada para estudiar una gran cantidad de fenómenos dispersivos en las teorías de sólidos, líquidos, gases y plasmas. Tal diversidad de aplicaciones se originó con los resultados publicados por Wahlquist y Estabrook (1973). Ellos reportaron una ingeniosa variante de la transformación de Bäcklund que permite obtener en forma muy económica y eficiente una sucesión de soluciones de la ecuación (1.2), siempre que se conozca al menos una de ellas. El mecanismo Wahlquist-Estabrook se puede resumir de la siguiente manera: al realizar el cambio de variable dependiente $u = 2\omega_x$, con el subíndice x denotando derivación parcial con respecto a x , la ecuación (1.2) queda de la forma

$$\omega_t = 6\omega_x^2 - \omega_{xxx} \tag{1.1.1}$$

que se satisface automáticamente por el siguiente sistema de ecuaciones acopladas:

$$\omega_x = \omega^2 - \kappa^2, \quad \omega_t = -4\kappa^2 \omega_x \tag{1.1.2}$$

Las soluciones de la ecuación KdV se obtienen del sistema (1.1.2), donde el parámetro arbitrario κ determina tanto la amplitud del solitón $A = 2\kappa^2$ como su rapidez $v = 4\kappa^2$. Por ejemplo, la solución regular es

$$\omega = -\kappa \tanh z, \quad z = -\kappa(x - 4\kappa^2 t) + c \tag{1.1.3}$$

donde la constante c identifica la posición inicial del solitón. Así, se corrobora que la onda de traslación de Scott, $u = 2\omega_x = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 z$ es solución de (1.2).

El método puede iterarse: sea ω_0 alguna solución de (1.1.1) y $u_0 = 2\omega_{0x}/\partial x$ la solución de (1.2) que se construye con ω_0 ,

Entonces, las funciones ω_1 y $u_1 = 2\omega_{1x}/\partial x$, construidas con la transformación de Bäcklund

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} &= -\frac{\partial \omega_0}{\partial x} - \kappa_1^2 + (\omega_1 - \omega_0)^2 \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial t} &= -\frac{\partial \omega_0}{\partial t} + 4 \left[\kappa_1^2 u_1 + u_0^2 - u_0(\omega_1 - \omega_0)^2 - \frac{\partial u_0}{\partial x} (\omega_1 - \omega_0) \right] \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

son también soluciones de (1.1.1) y (1.2) respectivamente. Obsérvese que la primera de las ecuaciones (1.1.4) se puede expresar en forma algebraica

$$u_1 + u_0 = 2(\omega_1 - \omega_0)^2 - 2\kappa_1^2 \tag{1.1.5}$$

En el caso particular $\omega_0 = u_0 = 0$, la ecuación (1.1.5) se reduce a la primera de las ecuaciones (1.1.2), así que del “vacío solitónico” se genera el solitón u_1 . Sin embargo, este no será diferente de (1.1). El mecanismo Wahlquist-Estabrook-Bäcklund (WEB) se puede usar incluso partiendo de una solución no trivial $u \neq 0$. Al iterarlo k veces se obtendrá un solitón k -paramétrico (k diferentes parámetros κ_i): $\omega_1 = \omega_1(\kappa_1)$, $\omega_2 = \omega_2(\kappa_1, \kappa_2)$, ... Obsérvese que ω_0 excepcionalmente podría ser 1-paramétrico, es decir, $\omega_0 = \omega_0(\kappa_0)$. Para la iteración se usa el siguiente principio de superposición:

Superposición WEB. Sea $\{\omega_0, u_0 = 2\omega_{0x}/\partial x\}$ el par generatriz de la transformación (1.1.5) y sean $\{\omega_1(\kappa_m), u_1(\kappa_m) = 2\omega_{1x}(\kappa_m)/\partial x\}$, $m = 1, 2$, dos pares de soluciones WEB relacionadas (1.1.4-1.1.5). Un tercer par $\{\omega_2(\kappa_1, \kappa_2), u_2(\kappa_1, \kappa_2) = 2\omega_{2x}(\kappa_1, \kappa_2)/\partial x\}$, se obtiene de

$$u_2 + u_1 = 2(\omega_2 - \omega_1)^2 - 2\kappa_2^2 \tag{1.1.6}$$

donde

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}{\omega_1(\kappa_2) - \omega_1(\kappa_1)} \tag{1.1.7}$$

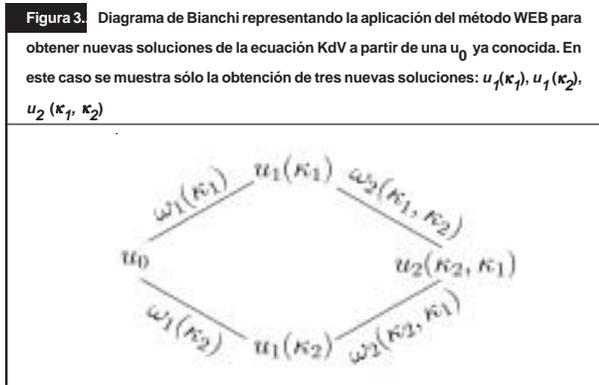
Así, la nueva solución u_2 de (1.2) se escribe en términos de dos soluciones diferentes del paso anterior

$$u_2 = u_0 + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2(\kappa_2^2 - \kappa_1^2)}{\omega_1(\kappa_2) - \omega_1(\kappa_1)} \right] \tag{1.1.8}$$

La situación se puede ilustrar gráficamente con un diagrama de Bianchi como el de la figura 3.

Para una iteración general tendremos, en el n -ésimo paso, la siguiente expresión

$$u_n = u_{n-2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2(\kappa_n^2 - \kappa_{n-1}^2)}{\omega_{n-1}(\kappa_n) - \omega_{n-1}(\kappa_{n-1})} \right] \tag{1.1.9}$$



donde:

$$\omega_{n-1}(\kappa_n) = \omega_{n-1}(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n-2}, \kappa_n)$$

$$\omega_{n-1}(\kappa_{n-1}) = \omega_{n-1}(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n-2}, \kappa_{n-1}).$$

Por ejemplo, partiendo de $u_0 = 0$ se tienen de inmediato la solución regular $\omega_1(\kappa_2) = -\kappa_2 \tanh z$ y la solución singular $\omega_1(\kappa_1) = -\kappa_1 \coth z$ (y respectivamente $u_1(\kappa_2) = -2\kappa_2 \operatorname{sech}^2 z$, $u_1(\kappa_1) = 2\kappa_1 \operatorname{csc} h^2 z$). Así que el método WEB (1.1.9) nos lleva a una tercera solución:

$$u_2(\kappa_1, \kappa_2) = 2(\kappa_2^2 - \kappa_1^2) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{-\kappa_2 \tanh z + \kappa_1 \coth z} \right] \quad (1.1.10)$$

La función (1.1.10) es uno de los potenciales cuadráticos de Bargmann y representa la interacción de los solitones libres $u_1(\kappa_1)$, $u_1(\kappa_2)$, descritos líneas arriba. Terminamos esta sección insistiendo en la conexión que existe entre la ecuación KdV (1.2) y la ecuación de Schrödinger (1.3) a través de la transformación espectral $u = 2\omega_x$. Obsérvese que la primera de las ecuaciones (1.1.2) se puede linealizar a una ecuación diferencial de segundo orden tomando $\omega = -\varphi_x/\varphi$. Así $\omega_x - \omega^2 = -\varphi_{xx}/\varphi = -\kappa^2$. Queda claro que φ es función propia del Hamiltoniano de la partícula libre con valor propio $E = (i\kappa)^2 = -\kappa^2$.

2. Una historia supersimétrica

En la sección anterior hemos visto que, dada una primera solución $u(x)$ de (1.2), podemos construir un sin fin de nuevas soluciones usando simplemente el método WEB. Lo más interesante es recordar que $u(x)$ juega también el papel de un potencial en la ecuación de Schrödinger (1.3) y que las funciones $\omega(x)$ están, a su vez, relacionadas con las funciones propias $\phi(x)$ a través de la derivada logarítmica $\omega = -(\ln \phi)_x$. Pensemos entonces en un mecanismo apropiado para resolver la ecuación (1.3). Note-

mos primero que el Hamiltoniano H en (1.4) es un operador diferencial de segundo orden, así que podemos expresarlo como el producto de dos operadores diferenciales de primer orden A y A^\dagger :

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x) = A^\dagger A + \varepsilon, \quad (2.1)$$

donde

$$A = \frac{d}{dx} + \beta(x), \quad A^\dagger = -\frac{d}{dx} + \beta(x) \quad (2.2)$$

y ε es una constante a determinar mientras que $\beta(x)$ es una solución de la ecuación de Riccati:

$$-\beta_x + \beta^2 = u - \varepsilon. \quad (2.3)$$

Así, al resolver la ecuación de primer orden $A\phi = \phi_x + \beta\phi = 0$, se obtiene la función propia $\phi_\varepsilon \propto \exp(-\int^x \beta(y) dy)$ de H con valor propio ε , es decir, $H\phi = (A^\dagger A + \varepsilon)\phi = \varepsilon\phi$.

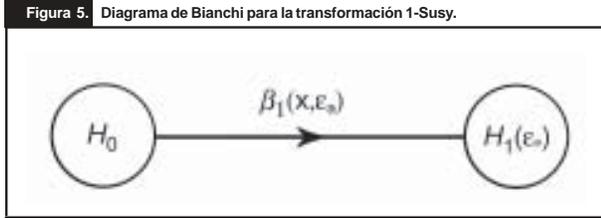
Las aplicaciones del método se extienden fácilmente; por ejemplo, sea $u(x) = x^2$ el potencial del oscilador armónico (por sencillez en la notación hemos omitido el factor $1/2$ que suele acompañar a x^2 en los textos). Una simple inspección de la ecuación (2.3) arroja la solución particular $\beta = x$, siempre que $\varepsilon = 1$. Así, los operadores de factorización A y A^\dagger son los convencionales operadores de aniquilación y creación $A = d/dx + x$, $A^\dagger = -d/dx + x$, y ϕ_ε no es más que la función del estado base $\phi_\varepsilon = \psi_0 \propto \exp(-x^2/2)$. Las demás funciones propias de H para este caso, como ya sabemos, se obtienen de la acción iterada de A^\dagger sobre el estado base: $\psi_n \propto (A^\dagger)^n \psi_0$, cada una de ellas con valor propio $E_n = 2n + 1$.

2.1. Las musas de Darboux

Un aspecto importante del método de factorización descrito líneas arriba es que se pueden interrelacionar las soluciones de un cierto Hamiltoniano inicial $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + u_0$ con las de uno nuevo $H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + u_1$. La clave del asunto se encuentra en uno de los muchos resultados que el matemático francés Gaston Darboux obtuvo en sus estudios de las superficies (Darboux, 1882; véase también Mielnik y Rosas-Ortiz, 2004): si ψ es función propia de H_0 con valor propio κ y si θ es tal que $-\theta_x + u_0\theta = \varepsilon\theta$, entonces la función

$$\tilde{\psi} = \left(\frac{d}{dx} - \frac{\theta'}{\theta} \right) \psi \quad (2.1.1)$$

es función propia de H_1 con valor propio κ ($H_1\tilde{\psi} = \kappa\tilde{\psi}$), donde el nuevo potencial:



nando o agregando un nivel de energía), éste necesariamente se “deforma” para adaptarse al nuevo espectro (Abraham y Moses, 1980). Para algunos valores de los parámetros de los osciladores de Mielnik se reproducen los osciladores deformados de Abraham y Moses. También en 1984, M. M. Nieto traduce estos resultados al lenguaje de la supersimetría (Nieto, 1984) y D.J. Fernández los aplica al potencial de Coulomb (Fernández, 1984), con lo que el método de factorización generalizada de Mielnik se establece como una herramienta poderosa para construir los pares supersimétricos H_0 y H_1 . Posteriormente, C. V. Sukumar estudia con mayor detalle este método (Sukumar, 1985) y muestra que también es aplicable para el estudio de solitones (Sukumar, 1986).

3. El recetario gráfico de Susy

Como mencionamos en la sección anterior, la transformación de Darboux es el ingrediente fundamental para construir el socio supersimétrico $H_1(\epsilon)$ de algún Hamiltoniano inicial H_0 :

$$H_1(\epsilon_a) = H_0 + 2\beta_1'(x, \epsilon_a), \tag{3.1}$$

$$V_1(x, \epsilon_a) = V_0(x) + 2\beta_1'(x, \epsilon_a), \tag{3.2}$$

$$-\beta_1(x, \epsilon_a) + \beta_1^2(x, \epsilon_a) = V_0(x) - \epsilon_a, \tag{3.3}$$

donde $' = @/@x$. En estas expresiones asumimos que la ecuación (3.3) tiene la solución $\beta_1(x, \epsilon_a)$ para ϵ_a fijo. Gráficamente representaremos a los Hamiltonianos H_0 y $H_1(\epsilon_a)$ con círculos y al superpotencial $\beta_1(x, \epsilon_a)$ con una flecha. Así, la transformación (3.1) se grafica como un par de círculos conectados con una flecha (ver figura 5), el sentido en el que apunta ésta indica cuál de los dos Hamiltonianos es considerado como el inicial.

La gráfica construida de este modo no es más que un diagrama de Bianchi, como el que se presentó en la sección 2, que codifica muy bien la información de las ecuaciones (3.1)-(3.3). A partir de este momento, cada vez que usemos este diagrama entenderemos que se trata de una transformación 1-Susy, donde H_0 es el Hamiltoniano inicial (con espectro conocido), la función de transformación (superpotencial) es solución de (3.3), y H_1 es el socio 1-Susy de

H_0 , construido con (3.1), cuyo espectro incluirá un estado ligado (de energía ϵ_a) adicional al espectro de H_0 . Para la descripción anterior bastará con tener una solución particular $\beta_1(x, \epsilon_a)$ de la ecuación de Riccati (3.3). Sin embargo, la solución general se construye fácilmente si se usan cuadraturas de la solución particular (Ince, 1965). El resultado es una familia de soluciones caracterizada por un parámetro λ_a , escribimos:

$$\beta_1(x, \epsilon_a; \lambda_a) = \beta_1(x, \epsilon_a) - \frac{d}{dx} \ln \left[\lambda_a - \int e^{2\int \beta_1(x, \epsilon_a) dy} dx \right] \tag{3.4}$$

El lector puede ahora fácilmente construir el superpotencial $\beta_1(x, \epsilon_a = |\lambda_a| > \sqrt{\pi/4})$ de Mielnik (1984) usando $\beta_1(x, \epsilon_a = 1) = x$ en (3.4).

Cada uno de los miembros de la familia (3.4) se apega a lo descrito para los ingredientes de la figura 5, por ello en los diagramas no será necesario complicar la notación agregando explícitamente al parámetro λ_a ; bastará con tener en mente que β_1 representa a toda la familia de soluciones de (3.3) con ϵ_a fijo, antes que a sólo uno de sus miembros. Esto también es válido para cualquier otro posible valor de la energía de factorización ϵ que permita obtener soluciones de (2.3). Para cada ϵ_k existirá la familia, $\beta_1(x, \epsilon_k; \lambda_k)$ cuyo diagrama de Bianchi se lee igual que el de la figura 5. Por ejemplo, la figura 6 representa la situación en la que se conocen n diferentes familias de superpotenciales. En la práctica n no tiene por qué ser un número finito.

Iteremos el procedimiento: partiendo de $H_1(\epsilon_a)$ hagamos una nueva transformación de Darboux y construyamos $H_2(\epsilon_a, \epsilon_b)$. La notación que estamos introduciendo exigirá una cantidad cada vez mayor de epsilones, uno por cada iteración, pero se

Figura 6. Diagrama de Bianchi múltiple donde se muestran n socios 1-Susy de H_0 . La lectura de cada "brazo" de este diagrama es idéntica a la lectura del diagrama de la figura 5.

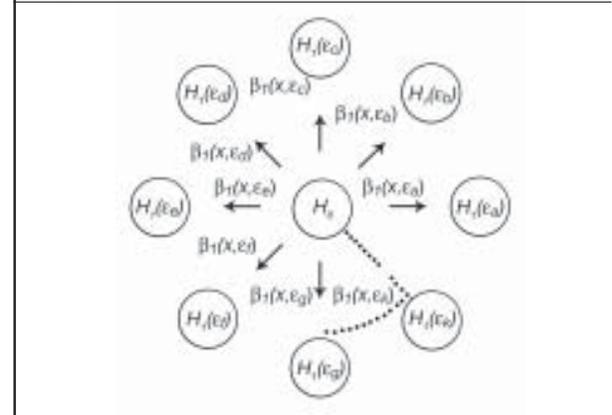
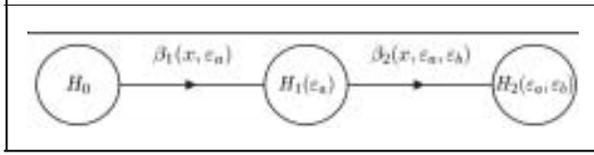


Figura 7. Diagrama de Bianchi representando la iteración de transformaciones



ganará claridad en la interpretación de cada uno de los diagramas. Las etiquetas de $H_2(\epsilon_a, \epsilon_b)$ se deben leer de izquierda a derecha, el subíndice denotará el número de iteración y la posición de los epsilon indicará cuál de ellos se usó primero. En este caso, $H_2(\epsilon_a, \epsilon_b)$ se lee de la siguiente manera: hágase una transformación 1-Susy con el superpotencial $\beta_1(x, \epsilon_a)$, después hágase una segunda transformación 1-Susy pero ahora con el superpotencial $\beta_2(x, \epsilon_a, \epsilon_b)$, que es solución de la siguiente ecuación de Riccati:

$$-\beta_2'(x, \epsilon_a, \epsilon_b) + \beta_2^2(x, \epsilon_a, \epsilon_b) = V_1(x, \epsilon_a) - \epsilon_b \quad (3.5)$$

En la figura 7 se muestra el diagrama de Bianchi correspondiente. Para identificar todos los ingredientes de (3.5), que se requieren en la interpretación de este diagrama, notemos que se deben satisfacer expresiones equivalentes a (3.1)-(3.3). Por ejemplo, de (3.1) tenemos:

$$H_2(\epsilon_a, \epsilon_b) = H_1(\epsilon_a) + 2\beta_2'(x, \epsilon_a, \epsilon_b) = H_0 + 2[\beta_1'(x, \epsilon_a) + \beta_2'(x, \epsilon_a, \epsilon_b)] \quad (3.6)$$

con una expresión equivalente para el potencial $\beta_2(x, \epsilon_a, \epsilon_b)$ (véase (3.2)). El asunto es ahora resolver (3.5) para β_2 dando por conocidos a $V_0, \epsilon_a, \beta_1(x, \epsilon_a)$ y ϵ_b . Empecemos por introducir una nueva función que debe ser igual a la suma de β_1 y β_2 , es decir

$$\Omega_2(x, \epsilon_a, \epsilon_b) = \beta_1(x, \epsilon_a) + \beta_2(x, \epsilon_a, \epsilon_b). \quad (3.7)$$

Entonces la ecuación (3.6) se simplifica

$$H_2(\epsilon_a, \epsilon_b) = H_0 + 2\Omega_2'(x, \epsilon_a, \epsilon_b) \quad (3.8)$$

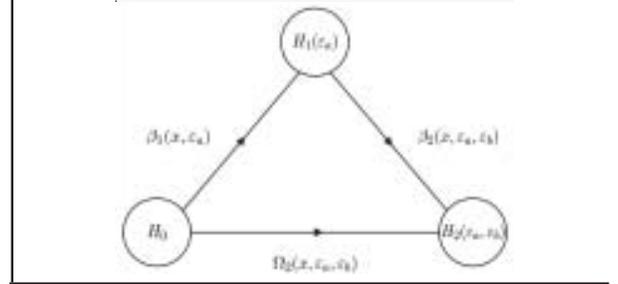
y nos permite establecer una conexión directa entre H_0 y H_2 (compárese con (3.1)). Diremos que H_2 es el socio 2-Susy de H_0 y que Ω_2 es la función de transformación. El diagrama de Bianchi correspondiente (ver figura 8) indica claramente que para obtener el Hamiltoniano H_2 , a partir de H_0 , hay dos caminos posibles (completamente equivalentes):

1). A partir de H_0 constrúyase primero $H_1(\epsilon_a)$ con $\beta_1(x, \epsilon_a)$ y luego itérese el procedimiento con $\beta_2(x, \epsilon_a, \epsilon_b)$ para construir $H_2(x, \epsilon_a, \epsilon_b)$.

2). A partir de H_0 constrúyase $H_2(\epsilon_a, \epsilon_b)$ con $\Omega_2(x, \epsilon_a, \epsilon_b)$.

La utilidad de los diagramas de Bianchi empieza a ser más clara ahora. Sin embargo, aún no hemos resuelto (3.5)

Figura 8. Mecanismo 2-Susy en dos perspectivas: iteración de pasos 1-Susy (cuerpo del triángulo). Un solo paso 2-Susy (base del triángulo).



y, por ende, desconocemos qué tipo de función es $\Omega_2(x, \epsilon_a, \epsilon_b)$. Para adquirir un poco de intuición notemos que el cuerpo del triángulo de la figura 8 involucra dos ingredientes de la misma naturaleza: β_1 y β_2 . Cada uno de ellos es solución de una ecuación de Riccati con exactamente la misma estructura pero diferente potencial (compárense (3.1) y (3.5)). Como $V_1(x, \epsilon_a)$ se escribe en términos de $V_0(x)$ y $\beta_1(x, \epsilon_a)$ es natural pensar que $\beta_2(x, \epsilon_a, \epsilon_b)$ se escriba en términos de funciones semejantes a $\beta_1(x, \epsilon_a)$. La clave está en $\Omega_2(x, \epsilon_a, \epsilon_b)$, que resulta ser una expresión de diferencias finitas para los superpotenciales $\beta_1(x, \epsilon_a)$ de la figura 6. Para evitar una derivación complicada de $\Omega_2(x, \epsilon_a, \epsilon_b)$ usamos el siguiente lema (Nieto, Mielnik y Rosas-Ortiz, 2001):

Lema A: sean $\beta_1(x, \epsilon_a)$ y $\beta_1(x, \epsilon_b)$ soluciones de (2.3) con $\epsilon_a \neq \epsilon_b$. Una solución de (3.5) está dada por

$$\beta_2(x, \epsilon_a, \epsilon_b) = -\beta_1(x, \epsilon_a) - \Omega_2(x, \epsilon_a, \epsilon_b) \quad (3.9)$$

donde

$$\Omega_2(x, \epsilon_a, \epsilon_b) = -\frac{\epsilon_a - \epsilon_b}{\beta_1(x, \epsilon_a) - \beta_1(x, \epsilon_b)} \quad (3.10)$$

es una solución de la ecuación de Riccati

$$-\Omega_2' + (\Omega_2)^2 = \beta_1 + \beta_2 \quad (3.11)$$

Demostración: es inmediata usando (3.9), (3.11) y (3.3).

El algoritmo de diferencias finitas (3.10) requiere sólo dos superpotenciales 1-Susy diferentes $\beta_1(x, \epsilon_a)$ y $\beta_1(x, \epsilon_b)$. Así, de (3.8) tenemos (Mielnik, Nieto y Rosas-Ortiz, 2001; Fernández, Hussin y Mielnik, 1998; y Rosas-Ortiz, 1998a y 1998b):

$$H_2(\epsilon_a, \epsilon_b) = H_0 - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2(\epsilon_a - \epsilon_b)}{\beta_1(x, \epsilon_a) - \beta_1(x, \epsilon_b)} \right], \quad (3.12)$$

$$V_2(x, \epsilon_a, \epsilon_b) = V_0(x) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2(\epsilon_a - \epsilon_b)}{\beta_1(x, \epsilon_a) - \beta_1(x, \epsilon_b)} \right]. \quad (3.13)$$

Es ilustrativo comparar (3.13) con (1.18). Ambas son la misma ecuación y producen la misma transformación $V_2 = u_2$ si $V_0 = u_0 = 0$ (compárense también (3.9) y (1.1.6)).

Obsérvese la simetría de Ω_2 ante el intercambio de ε_a y ε_b , es decir, $\Omega_2(x, \varepsilon_a, \varepsilon_b) = \Omega_2(x, \varepsilon_b, \varepsilon_a)$. Como consecuencia, el Hamiltoniano H_2 (el potencial V_2) es invariante bajo permutaciones de los epsilones: $\Omega_2(x, \varepsilon_a, \varepsilon_b)$ y $\Omega_2(x, \varepsilon_b, \varepsilon_a)$. El significado físico de esta simetría es que el espectro de H_2 puede obtenerse agregando, a lo más, dos nuevos niveles de energía al espectro de H_0 : primero un nivel en ε_a y luego uno en ε_b , o bien operando en sentido inverso. La situación se ilustra mejor exigiendo que el diagrama de Bianchi correspondiente sea conmutativo (ver figura 9).

Debe notarse que la parte derecha del diagrama (la iteración 1-Susy) incluye explícitamente 2 epsilones (2-Susy). Esto motiva el establecer conexiones directas entre V_0 y sus socios k-Susy. Cada uno de estos nuevos potenciales $V_k(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)$ dependerá explícitamente de k-epsilones (y k parámetros lambda). Por simplicidad en la notación haremos explícita sólo la dependencia de β_k con la energía de factorización introducida en la última iteración, es decir, $\beta_k(x, \varepsilon) \equiv \beta_k(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon)$. Además, usaremos la convención de que $k = 0$ significa ausencia de epsilon: $V_0(x, \varepsilon_0) = V_0(x)$. La generalización es inmediata con el siguiente teorema (Nieto, Mielnik y Rosas-Ortiz, 2001).

Teorema 1: considérense las siguientes ecuaciones de Riccati:

$$-\beta_k'(x, \varepsilon) + \beta_k^2(x, \varepsilon) = 2[V_{k-1}(x, \varepsilon_{k-1}) - \varepsilon], \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.14)$$

donde cada socio k-Susy $\beta_k(x, \varepsilon)$ de $V_0(x)$ es el transformado de Darboux del anterior

$$\begin{aligned} V_k(x, \varepsilon) &= V_{k-1}(x, \varepsilon_{k-1}) + \beta_k'(x, \varepsilon), \quad k \geq 0 \\ V_0(x, \varepsilon_0) &= V_0(x). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para k fijo, sean $\beta_k(x, \varepsilon_a)$ y $\beta_k(x, \varepsilon_b)$ dos soluciones de (3.14), con $\varepsilon_a \neq \varepsilon_b$, y $\Omega_{k+1}(x, \varepsilon_b)$ las funciones definidas por

$$\Omega_{k+1}(x, \varepsilon_b) = -\frac{2(\varepsilon_a - \varepsilon_b)}{\beta_k(x, \varepsilon_a) - \beta_k(x, \varepsilon_b)}, \quad k \geq 1 \quad (3.16)$$

Entonces, la función definida por

$$\beta_{k+1}(x, \varepsilon_b) = -\beta_k(x, \varepsilon_a) + \Omega_{k+1}(x, \varepsilon_b), \quad k \geq 1 \quad (3.17)$$

es solución de la ecuación

$$-\beta_{k+1}'(x, \varepsilon_{k+1}) + \beta_{k+1}^2(x, \varepsilon_{k+1}) = 2[V_k(x, \varepsilon_a) - \varepsilon_{k+1}], \quad (3.18)$$

para $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_b$.

Demostración: use inducción y el lema A.

Este teorema permite obtener de inmediato la expresión analítica del socio n-Susy del potencial inicial $V_0(x)$:

$$\begin{aligned} V_n(x, \varepsilon_n) &= V_0(x) + \sum_{k=1}^n \beta_k'(x, \varepsilon_k) = \\ V_0(x) + \sum_{k=1}^n [\cos((k+n)\pi/2)]^2 \frac{d}{dx} \Omega_k(x, \varepsilon_k) \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde hemos extendido la definición (3.16) para incluir $\Omega_1(x, \varepsilon) \equiv \beta_1(x, \varepsilon)$.

La utilidad del teorema 1 radica en que la construcción de los socios k-Susy de V_0 requiere conocer sólo las soluciones de (2.3) asociadas con V_0 , una para cada valor de ε . Así, uno puede iniciar el procedimiento teniendo sólo dos betas. El resultado final será una red de Bianchi representada por un diagrama abierto, como el de la figura 10.

La interpretación del diagrama es sencilla: la punta de la pirámide es el Hamiltoniano inicial, la primera línea horizontal hacia abajo corresponde a los socios 1-Susy, la segunda a los socios 2-Susy, y así sucesivamente. En cada caso la fórmula (3.19) proporciona la expresión analítica de V_n , donde n es el número de 'escalón' contado de arriba hacia abajo. En

Figura 9. Diagrama de Bianchi para una transformación 2-Susy de dos vías (compárense con la figura 3). Por simplicidad hemos omitido la graficación del vector asociado con $\Omega_2(x, \varepsilon_a, \varepsilon_b) = \Omega_2(x, \varepsilon_b, \varepsilon_a)$, conectando a H_2 directamente con H_0 (véase figura 3).

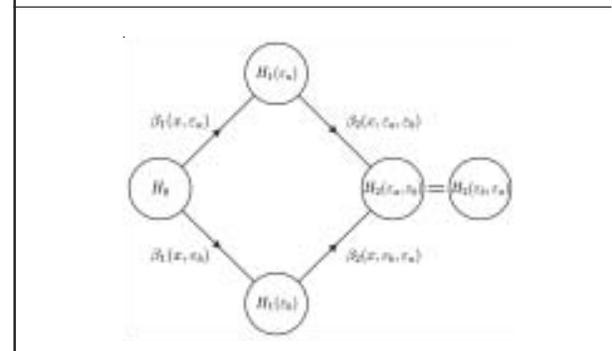
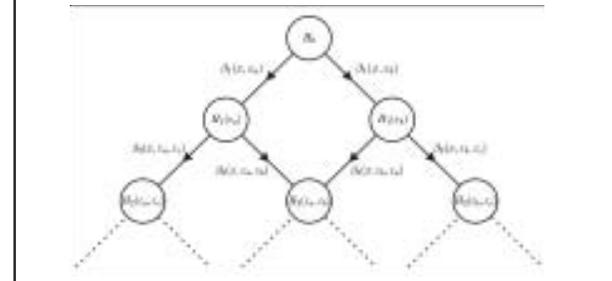


Figura 10. Representación de un diagrama de Bianchi abierto construido con tres superpotenciales $\beta_1(x, \varepsilon)$.



una situación general, la red de Bianchi llegará a ser tan basta como grande sea la cantidad de betas accesibles.

Obsérvese que la interpretación de (3.19) es similar a la de (3.15): en la k -ésima iteración el potencial $V_k(x, \epsilon_k)$ tendrá, a lo más, k nuevos niveles de energía, adicionales al espectro de $V_0(x)$, colocados en $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k$. No importa el orden en que éstos fueron incrustados al espectro, así que V_k es simétrico ante permutaciones de epsilon. Este resultado se formaliza con la siguiente proposición, que se presenta sin demostración.

Proposición A: dado un conjunto de k diferentes superpotenciales β_k , la suma

$$\sum_{i=1}^k \beta_i(x, \epsilon_i) = \sum_{i=1}^k [\cos((k+i)\pi/2)]^2 \Omega_i(x, \epsilon_i) \tag{3.20}$$

es invariante bajo permutaciones de epsilon.

Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es que la suma (3.20) es única y, de esta forma, existe un solo potencial V_k con valores propios $\{E, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k\}$, donde $\{E\}$ es el conjunto de valores propios discretos del potencial inicial V_0 . Así, el significado del siguiente lema es inmediato.

Lema B: Sea $\{\beta_i(x, \epsilon_m)\}_{m=1}^k$ un conjunto de k diferentes superpotenciales 1-Susy (k fijo). El socio Susy de mayor orden que se puede construir usando estas betas es de grado k .

Debe notarse que una selección diferente de las energías de factorización involucradas lleva a un potencial diferente; es decir, $V_k(x, \epsilon'_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_k)$ es diferente de $V_k(x, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k)$ siempre que el conjunto $\{\epsilon'_i\}_{m=1}^k$ sea diferente de $\{\epsilon\}_{m=1}^k$. Todas estas observaciones se resumen en el siguiente resultado (Nieto, Mielnik y Rosas-Ortiz, 2004):

Teorema 2: Sea $\{\beta_a(x, \epsilon_m)\}_{m=1}^n$ un conjunto de n diferentes superpotenciales 1-Susy. La aplicación del Teorema 1 a $\{\beta_1(x, \epsilon_m)\}_{m=1}^n$ producirá, a lo más, $2^n - 1$ diferentes socios k -Susy de V_0 .

Demostración: sea $F_i = \binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ el número de todos los diferentes subconjuntos de i elementos que se pueden construir del conjunto $\{\beta_1(x, \epsilon_m)\}_{m=1}^n$. Dado que cada

subconjunto corresponde a una clase de potenciales $\{V_m\}$ tenemos F_m diferentes clases de potenciales i -Susy asociados con $V_0(x)$. Así, el número total es $F_T = \sum_{i=1}^n F_i = 2^n - 1$ donde hemos usado el Lema B.

El teorema 2 junto con la Proposición A y el Lema B son de suma utilidad para determinar los socios k -Susy de V_0 con k arbitrario. Así, la aplicación del teorema 1 se refina y se hace posible la construcción de diagramas de Bianchi cerrados. Por ejemplo, dadas tres energías de factorización $\epsilon_a, \epsilon_b, y \epsilon_c$, junto con los superpotenciales β_1 correspondientes, obtendremos sólo siete diferentes socios k -Susy de H_0 ; tres para $k = 1$, tres para $k = 2$ y sólo uno para $k = 3$ (ver figura 11).

3.1. Susy construye ondas solitarias

Consideremos el potencial de la partícula libre $V_0(x) = 0$. La ecuación de Riccati (3.3) tiene la solución general:

$$\beta_1(x, \epsilon; \alpha) = -\sqrt{2\epsilon} \cot[\sqrt{2\epsilon}(x - \alpha)]. \tag{3.1.1}$$

Dependiendo de la naturaleza de los parámetros ϵ y α , esta función beta produce socios 1-Susy reales del potencial de partícula libre catalogados como: singular ($\epsilon < 0, \alpha \in \mathbf{R}$), regular ($\epsilon < 0, \alpha \in \mathbf{C}$), periódico ($\epsilon > 0, \alpha \in \mathbf{R}$), y nulo ($\epsilon = 0, \alpha \in \mathbf{R}$). Todos ellos resultan ser casos particulares de la función \wp de Weierstras (para más detalles consúltese Mielnik, Nieto y Rosas-Ortiz, 2000). Es decir, la expresión más general del socio 1-Susy de $V_0(x) = 0$ se escribe

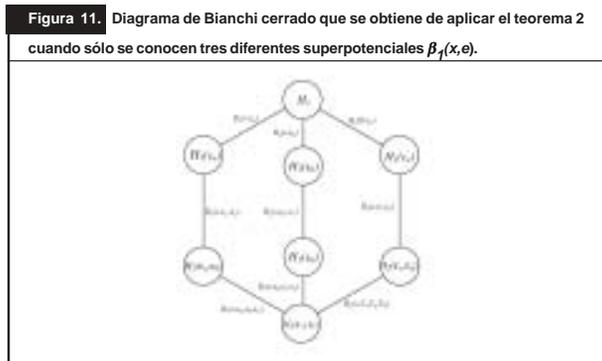
$$V_1(x, \epsilon; \alpha) = \wp\left(x + \alpha, 3\left(\frac{4\epsilon}{3}\right)^2, \left(\frac{4\epsilon}{3}\right)^3\right) + \frac{2\epsilon}{3}. \tag{3.1.2}$$

Por ejemplo, el caso regular se reduce al potencial de Pöschl-Teller (1.1) estudiado por Scott para describir el comportamiento de las ondas solitarias (ver figura 1 graficada con un factor global de -1):

$$V_1\left(x, \epsilon < 0; -b - \frac{i\pi}{2\kappa}\right) = -\kappa^2 \operatorname{sech}^2[\kappa(x+b)] \tag{3.1.3}$$

La iteración del procedimiento nos lleva directamente a los resultados conocidos en teoría de solitones. Por ejemplo, la combinación de los casos regular y singular produce un pozo doble, transparente, que es uno de los potenciales cuadráticos de Bargmann (Mielnik, Nieto y Rosas-Ortiz, 2000):

$$V_2(x, \epsilon_2) = -(\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \frac{\kappa_1^2 \operatorname{csch}^2[\kappa_1(x+b)] + \kappa_2^2 \operatorname{sech}^2[\kappa_2(x-a)]}{(-\kappa_1 \coth[\kappa_1(x+b)] + \kappa_2 \tanh[\kappa_2(x-a)])^2}. \tag{3.1.4}$$



De hecho, todos los pozos transparentes n -Susy se pueden interpretar ahora como *expresiones instantáneas* de las perturbaciones multisolitonicas que se propagan de acuerdo con la ecuación KdV.

3.2. El caso confluyente

Como vimos en los párrafos anteriores, la aplicación de los teoremas 1 y 2 es inmediata si se tiene a la mano al menos un par de superpotenciales 1-Susy (lo mismo ocurre con el método WEB para la ecuación KdV). La expresión general (3.1.1), por ejemplo, representa una fuente inagotable de soluciones ya que ε y α son arbitrarios. Sin embargo, no siempre se tienen condiciones tan afortunadas. Existen potenciales con propiedades tan especiales que no admiten más que un conjunto finito de soluciones a la correspondiente ecuación de Riccati. Supongamos que hemos agotado tales soluciones en el paso k y queremos construir un nuevo potencial V_{k+1} a partir de V_k , es decir, queremos obtener el potencial $V_{k+1}(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \varepsilon_{j+1})$, donde $l \in \{1, 2, \dots, k\}$. Las restricciones del teorema 1 implican $\Omega_{j+1}(x, \varepsilon_{j+1}) = 0$ si $\varepsilon_{j+1} = \varepsilon_j$ para λ_j y λ_{j+1} arbitrarias y cualquier $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Para eliminar esta dificultad escogemos $\lambda_{j+1} = \lambda_j$ y tomamos el límite $\varepsilon_{j+1} \rightarrow \varepsilon_j$ en (3.16). Este procedimiento se puede entender como la confluencia entre dos energías de factorización.² El resultado es como sigue:

$$\Omega_{j+1}^{conf}(x, \varepsilon_j) = \lim_{\varepsilon_{j+1} \rightarrow \varepsilon_j} \Omega_{j+1}(x, \varepsilon_{j+1}) = -2 \left(\frac{\partial \beta_k(x, \varepsilon_k)}{\partial \varepsilon_k} \right)^{-1} \tag{3.2.1}$$

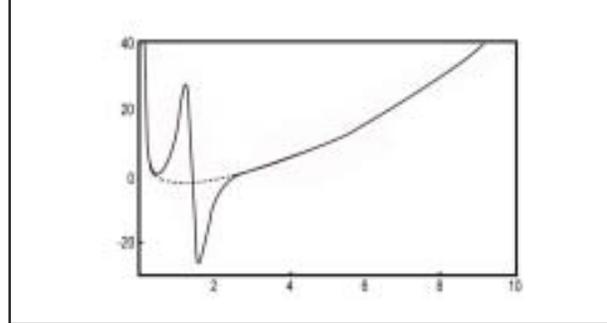
De esta forma, el superpotencial correspondiente $\beta_{j+1}^{conf}(x, \varepsilon_j)$ se escribe, según (3.17), de la siguiente manera

$$\beta_{j+1}^{conf}(x, \varepsilon_j) = -\beta_j(x, \varepsilon_j) + \Omega_{j+1}^{conf}(x, \varepsilon_j) = -\beta_j(x, \varepsilon_j) - 2 \left(\frac{\partial \beta_k(x, \varepsilon_k)}{\partial \varepsilon_k} \right)^{-1} \tag{3.2.2}$$

y se puede iterar libremente sin necesidad de conocer nuevas soluciones β_1 . El algoritmo confluyente (3.2.1-3.2.2) es, de esta forma, la expresión más versátil del algoritmo de diferencias finitas (3.10): Se pueden construir los socios k -Susy de V_0 , con k arbitrario, usando solamente un superpotencial $\beta_1(x, \varepsilon)$. Para

2. La ecuación (3.2.1) recibió el nombre de "confluyente" porque, en el paso 2-Susy confluyente, la energía ε que se agrega puede entenderse como el "encimamiento" de dos energías en el mismo punto ε , en forma similar a la *confluencia de dos singularidades* de las funciones hipergeométricas que da lugar a las funciones hipergeométricas confluentes.

Figura 13. El potencial (3.2.4), curva punteada, contrastado con su socio 2-Susy confluyente (curva continua).



ilustrar esto usamos nuevamente el potencial de partícula libre. Sabemos que el superpotencial regular $\beta_1(x, \varepsilon < 0; -b - \frac{i\pi}{2k}) = -k \tanh[k(x+b)]$ (con $k = \sqrt{2|\varepsilon|}$) genera el solitón Pöschl-Teller (3.1.3) como socio 1-Susy de V_0 . De la aplicación del algoritmo confluyente (3.2.2) y la ecuación (3.19) obtenemos el nuevo potencial (ver figura 12):

$$\Omega_{j+1}^{conf}(x, \varepsilon_j) = \lim_{\varepsilon_{j+1} \rightarrow \varepsilon_j} \Omega_{j+1}(x, \varepsilon_{j+1}) = -2 \left(\frac{\partial \beta_k(x, \varepsilon_k)}{\partial \varepsilon_k} \right)^{-1} \tag{3.2.3}$$

Discusiones más detalladas de la relación entre estos resultados y los obtenidos por otros autores pueden encontrarse en Mielnik, Nieto y Rosas-Ortiz (2000).

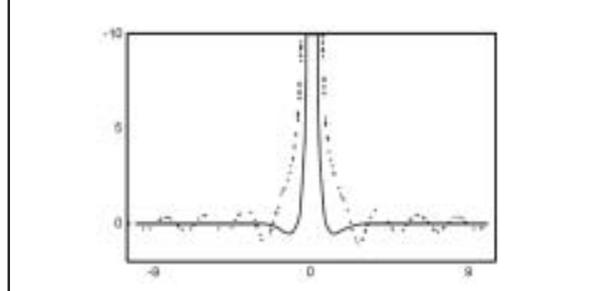
Como último ejemplo del caso confluyente consideremos el siguiente oscilador:

$$V_0(x) = \frac{3}{8x^2} + \frac{x^2}{2} - 2, \quad x \geq 0. \tag{3.2.4}$$

La solución para la correspondiente ecuación de Riccati es inmediata si $\varepsilon = 0$, y tiene la forma $\beta_1(x, \varepsilon = 0) = -3/2 + x$, mientras que la función Ω_2^{conf} se escribe

$$\Omega_2^{conf}(x, \varepsilon = 0) = -\frac{2x^3}{Ke^{x^2} + x^2 - 1},$$

Figura 12. Se muestran dos socios 2-Susy del potencial de partícula libre obtenidos con la iteración convencional (curva punteada, ecuación (3.1.4) y la iteración confluyente (curva continua, ecuación (3.2.3)).



con K una constante. La figura 13 muestra al potencial $V_2^{conf}(x)$ resultante. En Nieto, Mielnik y Rosas-Ortiz (2001) pueden encontrarse expresiones más generales de esta clase de osciladores.

4. ¿Solitones generalizados?

El método de factorización ha estimulado la formalización de teorías físicas como la mecánica cuántica y la teoría cuántica de campos, herramientas indispensables para resolver muchas de las ecuaciones de la física-matemática (Hull e Infeld, 1951 y Negro, Nieto y Rosas-Ortiz, 2000), este método es tanto heredero de la matemática del siglo XIX como precursor de nuevos modelos exactamente solubles (Mielnik y Rosas-Ortiz, 2004).

Parte de la enseñanza de los capítulos anteriores es que, en la física-matemática, ningún resultado formal se desecha: "todo es rescatable" (Fernández, 2005). Con esta mentalidad, el método de factorización se ha usado exitosamente en el

estudio de estados coherentes (Fernández y Fernández-García, 2005; y Nieto, 2006) y muchos otros sistemas (consúltese Mielnik y Rosas-Ortiz, 2004). El caso confluyente (introducido en Mielnik, Nieto y Rosas-Ortiz, 2000) ha sido recientemente discutido por Fernández y Salinas-Hernández (2003 y 2005), quienes reportan nuevas aplicaciones. La generalización del método de factorización a modelos no convencionales que incluyen Hamiltonianos no Hermitianos y vectores de Gamow puede hallarse en Fernández, Muñoz y Ramos (2003), Rosas-Ortiz y Muñoz (2003), Muñoz (2004), Fernández-García (2005) y Rosas-Ortiz (2006). Con toda esta pléyade de aplicaciones cabe preguntarse si sólo los socios k -Susy de partícula libre se pueden identificar como soluciones solitónicas de una ecuación dinámica no lineal (en este caso la ecuación KdV). En otras palabras, ¿existe algún sistema físico no lineal que admita, por ejemplo, a los socios k -Susy del oscilador como soluciones de su ecuación de movimiento? La pregunta queda abierta.

OBIS

Bibliografía

- Abraham, P. B. y H. E. Moses (1980). "Changes in Potentials Due to Changes in the Point Spectrum: Anharmonic Oscillators with Exact Solutions", *Phys. Rev. A.* 22: 1333-40.
- Agüero, M.; J. Fujioka y L. Ceciliano (2002). "La antisolidad de la onda solitaria", *Ciencia Ergo Sum.* 9(2): 197-201.
- Andrianov, A. A.; N. V. Borisov y M. V. Ioffe (1984a). "Quantum Systems with Identical Energy Spectra", *JETP Lett.* 39: 93-7.
- (1984b). "The Factorization Method and Quantum Systems with Equivalent Energy Spectra", *Phys. Lett. A.* 105: 19-22.
- (1984c). "Supersymmetric Mechanics: A New Look at the Equivalence of Quantum Systems", *Theor. Math. Phys.* 61: 965-972.
- (1984d). "Factorization Method and Darboux Transformation for Multidimensional Hamiltonians", *Theor. Math. Phys.* 61: 1078-88.
- Bäcklund, A. V. (1873a). *Einiges Über Curven-und Flächentransformationen.* Lunds. Univ. Arsskr. Adv. X, 1-12.
- (1873b). *Afdelningen för Matematik och Naturentenskap.* Lunds. Univ. Arsskr. Adv. X, 1-12.
- (1876). "Ueber Flächentransformationen", *Math. Ann.* IX: 297-320.
- (1880). "Zür Theorie der Partiellen Differentialgleichungen Erster Ordaung", *Math. Ann.* XVII: 285-328.
- (1882). "Zür Theorie der Flächentransformationen", *Math. Ann.* XIX: 387-422.
- (1883). "Om Ytor Med Konstant Negative Krökning", Lunds. Univ. Arsskr. Adv. XIX.
- Bianchi, L. (1879). "Ricerche Sulle Superficie a Curvatura Costante e Sulle Elicoidi", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* Sci. Fis. Mat. II: 285.
- (1922). *Lezioni di Geometria Differenziale.* Vol. I. Enrico Spoerri, Pisa.
- Calogero, F. y A. Degaspens (1982). *Spectral Transform and Solitons.* Vol. I, North Holland, Amsterdam.
- Clairin, J. (1910). "Sur les Transformations de Baecklund", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 27 : 45-489.
- Darboux, G. (1882). *Sur une Proposition Relative aux Équations Linéaires.* C. R. Acad. Sci. Paris 94 : 1456-9.
- (1894). *Lecons sur la Theorie Générale des Surfaces.* Vol. III, Gauthier-Villars, Paris. p.p. 438-444.
- Drazin, P. G. y R. S. Johnson (1989). *Solitons: An Introduction.* Cambridge UP, Cambridge.
- Dubrovnik, B. A.; V. B. Matveev y S. P. Novikov (1976). "Non-linear Equations of Korteweg-deVries Type, Finite-zone Linear Operators, and Abelian Varieties", *Russ. Math. Surv.* 31: 59-146.
- Faddeev, L. D. y L. A. Takhtajan (1987). *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons.* Springer-Verlag, Berlin.
- Fermi, E.; J. Pasta y S. Ulam (1955). "Studies of Nonlinear problems". *Document LA-1940.* The University of Chicago Press, E.U.A. mayo [Reimpreso en collected Papers of Enrico

- Fermi, Vol 2 (1965)].
- Fernández, D. J.
- _____ (2000). "Transformación de Darboux: Herramienta para diseñar espectros en Mecánica Cuántica", en Bretón, N. *et al.* (2000) (eds.). *Memorias del III taller de la DFGM-SMF*.
- _____ y J. N. Fernández-García (2005). "Higher-order Supersymmetric Quantum Mechanics", en Bijker, R. *et al.* (eds.). *AIP Conference Proceedings*. Vol. 744.
- _____; M. L. Glasser y L. M. Nieto (1998a). "New Isospectral Oscillator Potentials", *Phys. Lett. A*. 240: 15-20.
- _____; V. Hussin y B. Mielnik (1998b). "A Simple Generation of Exactly Solvable Anharmonic Oscillator", *Phys. Lett. A*. 244: 309-16.
- _____; R. Muñoz y A. Ramos (2003). "Second Order SUSY Transformations with Complex Energies", *Phys. Lett. A*. 308: 11-16.
- _____ y E. Salinas-Hernández (2003). "The Confluent Algorithm in Second Order Supersymmetric Quantum Mechanics", *J. Phys. A: Math. Gen.* 36: 2537-2543.
- _____ y E. Salinas-Hernández (2005). "Wronskian Formula for Confluent Second-order Supersymmetric Quantum Mechanics", *Phys. Lett. A*. 338: 13-18.
- _____ (1984). "New Hydrogen-like Potentials", *Lett. Math. Phys.* 8: 337-43.
- Fernández-García, J. N. (2005). *Transformaciones de Gamow Supersimétricas en Mecánica Cuántica*. Tesis de Maestría. Departamento de Física, Cinvestav, México.
- Forde, A. P. (1994). "A Historical Introduction to Solitons and Bäcklund Transformations", en Forde, A. P. y J. C. Wood (eds.). *Harmonic maps and integrable systems, Aspects of Mathematics*. E23. Vieweg, Brunswick.
- Gardner, C. S.; J. M. Greene; M. D. Kruskal y R. M. Miura (1967). "Method for Solving the Korteweg-deVries equation", *Phys. Rev. Lett.* 19: 1095-1097.
- Goursat, E. (1902). *Leçons sur l'intégration des Equations aux Dérivées Partielles du Second Ordre*. Vol. II. Hermann, Paris.
- Hull, T. E. y L. Infeld (1951). "The Factorization Method", *Rev. Mod. Phys.* 23: 21-68.
- Ince, E. L. (1965). *Ordinary Differential Equations*. Dover, New York.
- Korteweg, D. J. y G. de Vries (1895). "On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Channel, and on a New Type of Long Stationary Waves", *Phil. Mag* (5) 39: 422-443.
- Kruskal, M. D. y N. J. Zabusky (1965). "Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States", *Phys. Rev. Lett.* 15: 240-243.
- Lamb Jr., G. L. (1980). *Elements of Soliton Theory*. Wiley-Interscience, New York.
- Lie, S.
- _____ (1880a). "Zür Theorie der Flächen Konstanter Krümmung III", *Arch. Math. Naturvidensk V. Heft*. 3: 282-306.
- _____ (1880b). "Zür Theorie der Flächen Konstanter Krümmung IV", *Arch. Math. Naturvidensk V. Heft*. 3: 328-358.
- Mielnik, B.
- _____ (1984). "Factorization Method and New Potentials with the Oscillator Spectrum", *J. Math. Phys.* 8: 3387-9.
- _____; L. M. Nieto y O. Rosas-Ortiz (2000). "The Finite Difference Algorithm for Higher Order Supersymmetry", *Phys. Lett. A*. 269: 70-78.
- _____ y O. Rosas-Ortiz (2004). "Factorization: Little or Great Algorithm?", *J. Phys. A: Math. Gen.* 37: 1007-35.
- Muñoz, R. (2004). *Complex Supersymmetrical Transformations and Exactly-solvable Potentials*. PhD Thesis. Physics Department, Cinvestav, México.
- Negro, J.; L. M. Nieto y O. Rosas-Ortiz (2000). "Confluent Hypergeometric Equations and Related Solvable Potentials in Quantum Mechanics", *J. Math. Phys.* 41: 7964-96.
- Nieto, L. M.
- _____ (2006). "Coherent and Supercoherent States with Some Recent Applications", en Rosas-Ortiz, O. et al. (eds.). *Advanced Summer School in Physics 2005*. AIP Conference Proceedings. Vol. 809, pp. 3-23.
- _____; B. Mielnik y O. Rosas-Ortiz (2001). "Some Connections Between Different Supersymmetric Approaches in Quantum Mechanics", en Del Olmo, M. A.; M. Santander (eds.). *VIII Encuentro de Otoño de Geometría y Física*. Publicaciones de la RSME Vol. II, pp. 237-251.
- Nieto, M. M. (1984). "Relationship Between Supersymmetry and the Inverse Method in Quantum Mechanics", *Phys. Lett. B* 145: 208-10.
- Ramírez, L.; R. García; M. Agüero y E. Villagrán (2005). "Dinámica de la molécula más importante de la vida: el ADN I. Modelos lineales y no lineales", *Ciencia Ergo Sum*. 12(2): 199-208.
- Rosas-Ortiz, J. O.
- _____ (1998a). "New Families of Isospectral Hydrogen-like Potentials", *J. Phys. A: Math. Gen* 31: L507-L513.
- _____ (1998b). "Exactly Solvable Hydrogen-like Potentials and Factorization Method", *J. Phys. A: Math. Gen.* 31: 10163-79.
- _____ (2006). "Gamow Vectors and Supersymmetric Quantum Mechanics", *Rev. Mex. Fis.* (en prensa).
- _____ y R. Muñoz (2003). "Non-Hermitian Hydrogen-like Hamiltonians with Real Spectra", *J. Phys. A: Math. Gen.* 36: 8497-506.
- Scott, R. I. (1844). *Report on Waves. Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science*. York, septiembre.
- Sukumar, C. V.
- _____ (1985). "Supersymmetry Factorization of the Schrödinger Equation and a Hamiltonian Hierarchy", *J. Phys. A: Math. Gen.* 18: L57-61.
- _____ (1986). "Supersymmetry, Potentials with Bound States at Arbitrary Energies and Multi-soliton Configurations", *J. Phys. A: Math. Gen.* 19: 2297-316.
- Villagrán, E.; M. Agüero; J. C. Vázquez y R. García (2006). "Models for DNA in physics", en Rosas-Ortiz, O. et al. (eds.). *Advanced Summer School in Physics 2005*. AIP Conference Proceedings. Vol. 809.
- Wahlquist, H. D. y F. B. Estabrook (1973). "Bäcklund Transformation for Solutions of the Korteweg-deVries Equation", *Phys. Rev. Lett.* 31: 1386-1390.
- Witten, E.
- _____ (1981a). "Dynamical Breaking of Supersymmetry", *Nucl. Phys. B*: 185: 513-54.
- _____ (1981b). "Constraints on Supersymmetry Breaking", *Nucl. Phys. B* 202: 253-316.