LA ENSEÑANZA DE LOS ERRORES EXPERIMENTALES POR AZAR

Alberto P. Maiztegui
Reinaldo J. Gleiser
Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba
Argentina

I. Introducción

Uno de los problemas difíciles de la Educación en la Física es la enseñanza de los errores experimentales por azar. La presentación tradicional de este tema tiene forma prevalentemente matemática y se hace a través de la definición de VALOR VERDADERO de la cantidad que se quiere medir, seguida por los "errores verdaderos" y "errores aparentes", etc. A las definiciones siguen demostraciones matemáticas que conducen a la expresión final de una medición, con su "VALOR MAS PROBABLE *X"*, (el promedio de las X_i LECTURAS en la escala del intrumento) y el "error medio cuadrático del promedio", expresado como $E = \sqrt{\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2 / N(N-1)}$. La expresión final es la forma simbólica:

$$X = \overline{X} \pm E$$

Nosotros creemos que es posible reemplazar esa presentación por otra que consideramos didácticamente más adecuada, en particular para aquellos estudiantes que no serán profesionales de la Física, sino de otras ciencias.

Para visualizar y comprender mejor las ventajas de nuestra presentación es necesario realizar un experimento que permita concretar un número N elevado de lecturas individuales X_i (i = 1,2,..., N), en la que se da una adecuada dispersión de los valores obtenidos. Posibles ejemplos son la determinación del período de un péndulo con un cronómetro cuya apreciación sea de al menos una décima de segundo, la medición del ángulo girado en un tiempo prefijado por un volante cargado que parte del reposo, la medición de la distancia entre dos marcas utilizando un catetómetro.

En al misma experiencia se debe presentar al estudiante una medición, como por ejemplo la determinación de la longitud de una pieza de metal pequeña, bien trabajada, mediante un calibre, en la que, una vez adquirida suficiente práctica, no se observa dispersión de valores.

Se verá entonces que existen situaciones en las que independientemente de la práctica adquirida por el experimentador, *no se obtiene un único valor en el proceso de medición.* Esto, valga la redundancia, *es un hecho experimental* y como tal es susceptible de ser estudiado y analizado para eventualmente llegar a determinar las leyes físicas que lo rigen.

II. EI histograma

EI primer paso en nuestro análisis es construir el histograma de la medición con las N lecturas X_i obtenidas. Este permite visualizar fácilmente el hecho mencionado, que puede sorprender al principiante: por más cuidadoso que sea, sus lecturas Xi no son todas coincidentes. Pero hay más: si se repiten otras series de N lecturas, o si se comparan los resultados obtenidos por distintos experimentadores, se obtienen histogramas cuya forma esencialmente es siempre la misma: se tiene la mayoría de las lecturas próximas a un cierto valor y su número disminuye rápidamente cuando se apartan de éste. La misma situación cualitativa se da si se hacen otros experimentos y se miden otras cantidades de otras magnitudes (tiempos, longitudes, velocidades, intensidades de corriente, etc.): la forma *cualitativa* del histograma es siempre la misma.

Este hecho hace pensar que en este comportamiento común a todos los histogramas, está la clave para comprender el comportamiento de los números X_i resultantes del proceso de medir reiteradamente una misma cantidad X, un número N de veces. Es necesario entonces estudiar y conocer ese comportamiento para elaborar una descripción única, que permita que *cuando un científico comunique a otros el resultado de sus mediciones, todos las interpreten uniformemente.*

III. Propiedades del histograma de una medición

Para estudiar las propiedades de los histogramas que resultan de una medición, consideramos un número M de series de N mediciones de la misma cantidad X, realizadas por el mismo observador, en iguales condiciones. Aunque los M histogramas construidos con los correspondientes conjuntos de N mediciones X_i, no son iguales en detalle, se observa la siguiente regularidad: la zona en que se encuentran la mayoría de las mediciones es aproximadamente la misma en todos los casos, tanto en *ubicación* como en *extensión.* Esto sugiere asignar especial interés a un par de números que surgen de los histogramas y que nos informan sobre los aspectos mencionados. En particular, el hecho de que los valores tienden a concentrarse en *una sola zona,* hace razonble el considerar como VALOR MAS PLAUSIBLE para representar el resultado de la medición de la cantidad X al PROMEDIO DE LAS LECTURAS, dado por:

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum X_i$$

Es necesario, sin embargo, complementar esta información con la que corresponde al *desparramo* en los valores en los valores medidos. Es decir, queremos definir un valor representativo del intervalo en que se encuentran la mayoría de los valores obtenidos. Como ya dijimos, experimentalmente se observa que este intervalo tiene amplitud similar en todos los histogramas de N mediciones realizadas en iguales condiciones.

En primer lugar, llamaremos DISPERSION X_i de una lectura X_i a la diferencia entre ella y el promedio *X:*

$$x_i = X_i - \overline{X}$$

Es claro que el *desparramo* de las lecturas está asociado con sus dispersiones, pero como estamos interesados en *un solo valor representativo* de todas las dispersiones, lo que necesitamos es algún tipo de promedio construido con los X_i. EI promedio directo de estos valores no nos da ninguna información porque, por las definiciones de $\overline{X}$ y de x_i, hay tanto valores positivos como negativos de *Xi* y siempre se cumple que

$$\sum x_i = 0,$$

con lo que el promedio de los X_i es siempre cero.

Se podría considerar el promedio de los valores absolutos de los X_i, pero resulta preferible eliminar las diferencias de signos elevando cada dispersión al cuadrado y tomar el promedio

$$\frac{1}{N}\sum x_i^2,$$

lo que nos da un valor reprentativo de los cuadrados de las dispersiones. Claro está que la unidad con que se mide ese promedio es el CUADRADO de la unidad con que se mide la cantidad *X,* pero esta dificultad se resuelve extrayendo la raíz cuadrada. Y así llegamos a la expresión que permite expresar numéricamente la dispersión de las mediciones: la llamaremos error medio cuadrático de las lecturas, y la representaremos con la letra sigma:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum X_i^2} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

Cabe preguntarse ahora por la relación entre estos valores y los que se obtienen considerando conjuntos de N'≠N lecturas. Nuevamente la experiencia muestra que para N y N' suficientemente grandes, los valores de $\overline{X}$ y σ son muy parecidos, por lo que los podemos considerar como caracterizando propiedades de la medición, independientes, (nuevamente para N suficientemente grande), de la cantidad de lecturas.

¿Cuáles son estas propiedades? En primer lugar, el *promedio* $\overline{X}$ caracteriza el valor más plausible para expresar la medida de la cantidad X obtenida en nuestra medición.

En cuanto a σ, es claro que el *error medio cuadrático de tas lecturas* nos da una caracterización del "desparramo" de las lecturas alrededor del promedio. Por otra parte, es un hecho experimental que si una misma cantidad X es medida una vez con un instrumento y otra vez con otro más tosco (y ambos por un mismo experimentador), la segunda vez las lecturas X_i están mas *desparramadas* que la primera vez. Lo mismo ocurre si el mismo instrumental es usado la primera vez por un observador hábil y la segunda por otro más torpe o menos experimentado. Como cuanto mayor es este *desparramo,* mayor es la *incerteza* en la medida, concluimos que a da una caracterización de la *calidad* de la medición efectuada.

IV. Dos números para comunicar una medición

A lo largo de nuestra presentación ha resultado con naturalidad que si un experimentador quiere comunicar a otros el resultado de su trabajo de medir una cantidad X, no será suficiente presentar *un* número (la medida, $\overline{X}$*);* será necesario presentar dos números;

1) $\overline{X}$*,* el valor más plausible para expresar la medida, y

2) el número a que representa la calidad de la medición. Podrían presentarse así: $X\left(\overline{X},\sigma\right)$*;* pero la costumbre ha aceptado otro símbolo:

$$X = \overline{X} \pm \sigma$$

que puede confundir, pues X y a ni se suman ni se restan.

V. Una teoría de las mediciones

Hemos insistido hasta aquí sobre el hecho de que al representar las mediciones en un histograma, se hacen notorias en su forma ciertas regularidades independientes de la cantidad a medir y del instrumental utilizado, como ser su simetría aproximada alrededor de la zona con mayor número de mediciones coincidentes, etc. Estas regularidades están contempladas en una teoría, debida a Carl F. Gauss. Para dar una idea de esta teoría debemos pensar en series de mediciones con un número muy grande N de lecturas X_i. Los histogramas correspondientes contendrán en cada columna un número también grande de valores iguales, por lo que para representarlo gráficamente será necesario cambiar la escala vertical del dibujo a medida que se miran valores más y más grandes de N. En estas condiciones, según la teoría de Gauss, se puede trazar una curva, cuya forma recuerda a la de una campana *(la campana de Gauss),* que da una imagen suavizada del histograma. Dos aspectos centrales de la campana de Gauss son que: 1) la abscisa de su *máximo* coincide con el valor límite de $\overline{X}; y2$ *)* tiene dos puntos de inflexión, uno a cada lado del máximo, separados de éste una distancia σ . O sea, que los puntos de inflexión tienen como abscisas:

$$\left(\overline{X}-\sigma\right)y\left(\overline{X}+\sigma\right)$$

En este sentido, podemos pensar que el “ancho” de la campana es de 2 σ . Esto hace que si se considera siempre la misma escala para las abscisas, una curva más alta y angosta, (más “esbelta”), corresponde a un valor menor de σ y por lo tanto a una mejor calidad en la medición.

VI. σ y probabilidad

La campana de Gauss provee una *teoría* para las mediciones. ¿Qué quiere decir esto? Hemos dicho que la campana describe la situación cuando se han realizado un gran número de lecturas. En este caso, la frecuencia con que aparece una dada de las lecturas posibles *Xi* para la cantidad X adquiere un valor bien definido y constante, lo que se refleja en el hecho de que la relaciones entre las alturas de las distintas columnas que constituyen el histograma tienden también a un valor constante[1]. Esto permite introducir la idea de probabilidad, pensada como fracción de los casos de interés sobre los casos posibles, para un conjunto con un número muy alto de mediciones.

En particular, podemos preguntamos: si el experimentador realiza una nueva lectura ¿qué valor X_{N+1} obtendrá?: La teoría predice que puede obtener cualquiera, es decir que de antemano no podemos saber qué valor particular resultará de una dada medición, pero se puede demostrar que *la probabilidad de obtenerlo en el intervalo:*

a) $\left(\overline{\mathrm{X}} - \sigma,\ \overline{X} + \sigma\right)$es aproximadamente del 70%.

b) $\left(\overline{X} - 2\sigma,\ \overline{X} + 2\sigma\right)$ es aproximadamente del 95%

c) $\left(\overline{X} - 3\sigma,\ \overline{X} + 3\sigma\right)$ es aproximadamente del 99,7% casi el 100%!

Es decir que si se obtienen N lecturas de la escala para medir la cantidad X, las abscisas X_i fluctuarán desparramándose de tal manera que prácticamente la TOTALIDAD estará en el intervalo c).

VII. EI error medio cuadrático de los promedios

¿Qué ocurrirá si un experimentado r repite una, dos, … M veces una misma serie de N mediciones? Es natural prever que obtendrá un conjunto de promedios $\overline{X}_j$ no todos iguales.

a) el valor más plausible (el promedio de las M.N lecturas) es

$$\overline{X} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} \overline{X}_j$$

b) el número para expresar la calidad del conjunto de lecturas que conduce a esta medición es

$$\sigma\left(\overline{X}_j\right) = \sqrt{\frac{\sum\left(\overline{X}_j - \overline{\overline{X}}\right)^2}{M}}$$

c) con la condición de que cada $\overline{X}_j$ se haya obtenido con el mismo número

[1] Es justamente este valor el que es determinado por la campana de Gauss.

N de lecturas, se puede demostrar que:

$$\sigma\left(\overline{X}_j\right) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma\left(X_i\right)$$

donde $\sigma\left(\overline{X}_i\right)$es el error medio cuadrático de las lecturas como lo definimos en el párrafo 3. E es el nombre que daremos a esta cantidad: *error medio cuadrático del promedio* (y no de las lecturas).

VIII. EI error medio cuadrático del promedio

La última igualdad es sorprendente y fructífera.

En efecto: supongamos que el experimentador ha realizado el primer conjunto (M= 1) de N lecturas. Con ellas puede calcular $\overline{X}_1$ y σ*;* pero ya dijimos que se comprueba experimentalmente que a no depende del número N de lecturas y que $\sigma_1 \cong \sigma_2 \cong ... \cong \sigma_M$. Es decir que, obtenido el a del primer conjunto (M = 1) de N lecturas, ya se conocen todos, pues $\sigma_j \cong cons\tan te$ (por eso σ expresa la *calidad* de la medición).

Ello significa que conocido el primer promedio $\overline{X}_1$ ya conocemos la amplitud del intervalo donde fluctuarán TODOS los otros promedios $\overline{X}_j$ todavía no calculados: entonces, por razones de economía, *no los calculamos;* y expresamos el resultado de nuestro trabajo así:

$$X = \overline{X} \pm E$$

IX. La medida y su incerteza

EI proceso de medición de una cantidad conduce a una medida de ella; pero esta medida NO ES CIERTA: lleva asociada inseparablemente una INCERTEZA, que resulta de la calidad de la medición.

Podemos preguntarnos qué sucede si se lee una sola vez. Aquí la teoría de Gauss nos dice que nuestra incerteza es total. Sin embargo, en muchas circunstancias podemos prever de antemano que a, si efectivamente se realizan muchas lecturas *X;*, resultará del orden de la menor división de la escala del instrumento utilizado. En este caso la incerteza puede expresarse por la *mitad de la menor división de la escala:*

$\Delta X/2$. Y entonces comunicaremos el resultado de nuestra medición así:

$$X = X_1 \pm \frac{\Delta x}{2}$$

Si se lee N veces:

$$X = \overline{X} \pm E$$

X. Las cifras con significado físico

Si E expresa una incerteza es razonable expresarla con una sola cifra significativa. Por ejemplo: hemos medido el período de un péndulo, y el cálculo numérico conduce a:

T = ,5627147 s

E = 0,0324126 s

E representa una *incerteza;* por eso no podemos conservar más que *1 (una),* o a lo sumo 2 *(dos),* de sus cifras significativas[2]. Conservando tan sólo una (E = 0,03 s) significa que la cifra de los centésimos es *incierta;* carece de sentido, entonces, conservar *milésimos* y las cifras siguientes. Conservamos los centésimos y prescindimos de las cifras siguientes para expresar la medida de T:

$$T = \overline{T} \pm E = (1{,}56 \pm 0{,}03)s$$

XI. Comentarios

Creemos que el fundamento prevalentemente experimental de esta presentación:

1) desde el principio permite un *enfoque físico* del proceso de medir;

2) hace innecesario recurrir a un concepto discutible, como el de

---

[2] En sus publicaciones los científicos conservan dos: en el ejemplo sería e = 0,032 s; en la enseñanza proponemos conservar sólo una: E = 0,03s.

"verdadero" valor de una cantidad. Lo "comunicable" es el resultado obtenido al medir;

3) hace innecesario recurrir a definiciones como "error aparente", "error absoluto", etc; lo que representa una no despreciable economía en la enseñanza y el aprendizaje;

4) propone un concepto físico de la idea de *incerteza* sin dar una definición rígida de ella;

5) se llega a la expresión final $X = \overline{X} \pm E$ con muy breve matemática.

Referencias

1. MAIZTEGUI, Alberto P., GLEISER, Reinaldo J. *Introducción a las mediciones de laboratorio,* Editorial KAPELUSZ, Buenos Aires (1980).

Apéndice

Creemos conveniente incluir un par de ejemplos concretos para ilustrar nuestra exposición. El primero, dado en la Fig. 1a. corresponde al histograma de 70 mediciones de la velocidad radial de la estrella β (Beta) de la Cruz del Sur, realizada en el Observatorio Astronómico de Córdoba por el Dr. Luis Milone. En 1b. se muestra la campana que ajusta al histograma. Las velocidades están expresadas en km/s.

Como segundo ejemplo consideramos la medición del ángulo de la rotación del plano de polarización de la luz al atravesar una solución de azúcar en agua. La Fig. 2ª es el histograma correspondiente a 90 mediciones, mientras que en la Fig. 2b se tienen sólo diez mediciones. Nótese que a pesar de que en este último caso el histograma está lejos de parecer una "campana", los valores de $\overline{X}$ y de σ son esencialmente los mismos que en la Fig. 2a.

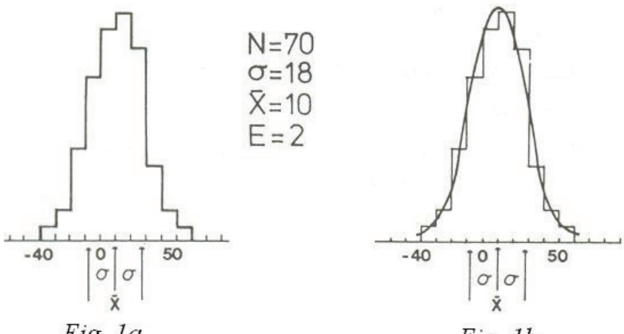

Fig. 1a *Fig. 1b*

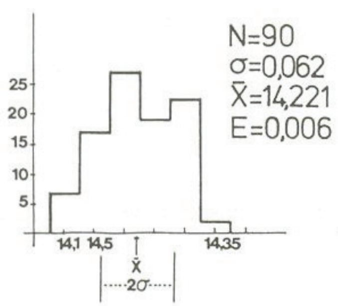

Fig. 2a

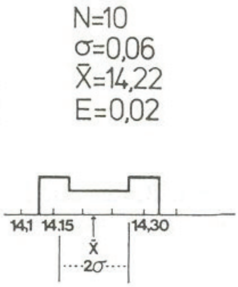

Fig. 2b

Finalmente, a modo de ejercitación, el lector interesado puede repetir las cuentas que llevan al histograma de la Fig. 2b. Los datos estan indicados en la Tabla I.

Tabla I: Valores del ángulo de la rotación correspondientes a la Fig. 2b.

i	X_i	$(X_i - \bar{X})$	$(X_i - \bar{X})^2$
1	14,30		
2	14,25		
3	14,25		
4	14,15		
5	14,30		
6	14,15		
7	14,20		
8	1430		
9	14,15		
10	14,20		