O PLANO INCLINADO: UM PROBLEMA DESDE GALILEU

Antônio A. S. Brito
Departamento de Física – UFPB
João Pessoa – PB

O problema do plano inclinado, mais do que um exercício ou questão de vestibular, foi uma importante contribuição à evolução dos conceitos da Física. No estudo da queda livre, desenvolvido por Galileu, o plano inclinado assume papel de relevo. No livro "Diálogo a Respeito de duas Novas Ciências", o italiano apresenta um diálogo, no qual o problema do plano inclinado é proposto e discutido, entre Salviati, defensor de suas idéias; Sagredo, um aluno curioso e inteligente e Simplício, que desenvolve as idéias aristotélicas.

O próprio conceito de movimento uniformemente acelerado era na época objeto de controvérsia. Diferentemente dos livros-textos que conhecemos, em que os vários movimentos são descritos por algumas fórmulas em poucas linhas, no Diálogo, a definição do movimento uniformemente acelerado só é alcançada após uma longa discussão a respeito dos movimentos em geral. Uma vez caracterizada a queda livre como um movimento com aceleração constante, Galileu propõe e resolve o seguinte problema:

PROBLEMA:

> As velocidades adquiridas pelo mesmo corpo ao mover-se em planos de diferentes inclinações são iguais quando a "altura" (h) desses planos forem iguais (ver Fig. 1).

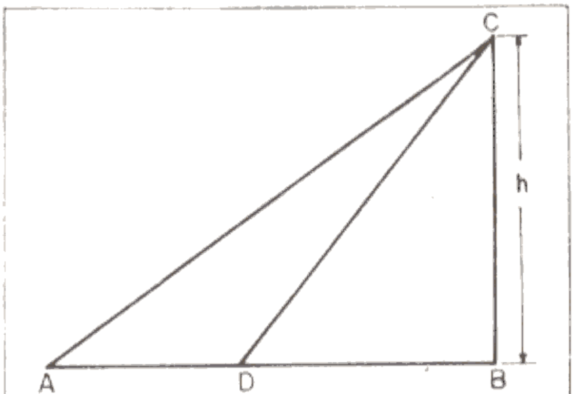


Fig. I

Os planos inclinados CA e CD possuem a mesma "altura" (h= CB).

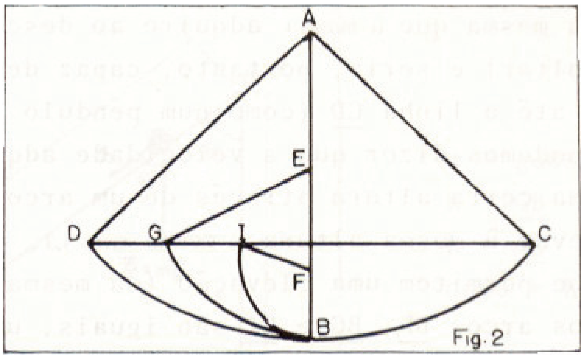
SOLUÇÃO I (de Galileu).

O diálogo entre Salviati e Sagredo é mais ou menos o seguinte:

Salviati: Os planos CA e CD possuem a mesma altura, h = CB. A velocidade adquirida ao cair de uma altura h = CB será a mesma caso o corpo percorra o caminho CA, CD ou CB (queda livre).

Sagredo: Sua idéia parece-me correta. Se desprezarmos toda resistência externa, o plano for duro e sem rugosidades, o corpo perfeitamente esférico e liso, penso que a bola ao descender ao longo das linhas CA, CD e CB alcançará os pontos terminais A, D e B com igual velocidade.

Salviati: Suas palavras são razoáveis, porém espero fornecer, através de um experimento, uma pequena demonstração. Imagine que esta página representa uma parede vertical, com um prego fixado em A, e do prego está suspensa uma massa de alguns gramas (evidentemente o grama não era utilizado no texto original como medida de massa: adotamo-lo aqui para exemplificar melhor) através de um fio AB (de nylon por exemplo), de aproximadamente 2 metros (a medida utilizada de fato era de 6 pés), e sobre essa parede desenhamos a linha horizontal DC que faz um ângulo reto com a vertical AB e está dois dedos acima do ponto mais baixo B, conforme Fig. 2.



Agora, leve a massa até a posição C e deixa-a livre. Ela se movimentará (como um pêndulo) ao longo do arco CBD, passando pelo ponto B e viajando pelo arco BD até atingir o ponto D, e alcançará a linha horizontal CD caso a resistência do ar for, de fato, desprezada de todo. Assim, concluímos que a massa em seu movimento de descida adquire uma "velocidade" (no texto original, em inglês, o termo é *momentum*) , ao alcançar B, suficiente para transportá-la à mesma altura (distância do ponto B à linha CD) através do arco BD. Tendo repetido esta experiência diversas vezes, vamos agora colocar um outro prego ao longo da linha AB, digamos, no ponto E, de modo que a massa continuará viajando ao longo do arco CB, e a linha encontrará o prego E (um obstáculo) ao mesmo tempo em que a massa atinge a posição B, o que obrigará a massa a percorrer o arco BG, que tem como centro o ponto E.

Observa-se que a massa alcança o ponto G, na linha CD, e o mesmo aconteceria caso o obstáculo fosse localizado num ponto mais baixo, em F, quando a massa descreveria o arco BI, e esta subiria novamente, até atingir a linha CD (é evidente que esse processo tem um limite, pois se o prego fosse fixado próximo à B, a massa provavelmente não atingiria a altura determinada pela linha CD, mas ficaria girando em torno do novo ponto de fixação.)

O experimento não deixa margem a dúvidas e comprova nossa tese. Desde que os dois arcos CB e DB são iguais, a velocidade adquirida pela massa ao descer ao longo do arco CB é a mesma ao descer pelo arco DB (ao voltar) e seria, portanto, capaz de elevar o mesmo corpo até a linha CD (como num pêndulo simples). Em geral, podemos dizer que a velocidade adquirida para descer uma certa altura através de um arco é suficiente para elevar à mesma altura a mesma massa. Ora, as velocidades que permitem uma elevação (da mesma altura h) através dos arcos BD, BG e BI são iguais, uma vez que provêm da queda ao longo de CB como mostra o experimento. Portanto, podemos concluir que as velocidades adquiridas ao descer através dos arcos DB, GB e IB são iguais!!!

Sagredo: O argumento pareceu-me conclusivo e o experimento bem adaptado, de modo que a hipótese inicial do problema foi de fato demonstrada.

Salviati: Eu não desejo, Sagredo, aprofundar-me em demasia nesse problema, uma vez que desejamos aplicar essa propriedade ao estudo de movimentos em superfícies planas e não sobre as curvas, ao longo das quais a aceleração varia de um modo muito diferente do movimento em superfícies planas [...]. Vamos então, no momento, tomar essa propriedade (a queda de corpos em planos de inclinações diferentes, porém de mesma altura, produzem igual velocidade final) como um Postulado: a verdade absoluta somente será estabelecida quando as suas conseqüências futuras corresponderem e concordarem perfeitamente com os experimentos.

SOLUÇAO II (usando as equações horárias do movimento).

No plano inclinado temos a aceleração, $\vec{a}$, ao longo da linha de movimento, conforme mostra a Fig. 3.

As equações horárias do movimento são:

$$e = e_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad (1)$$

$$v = v_o + at \qquad (2)$$

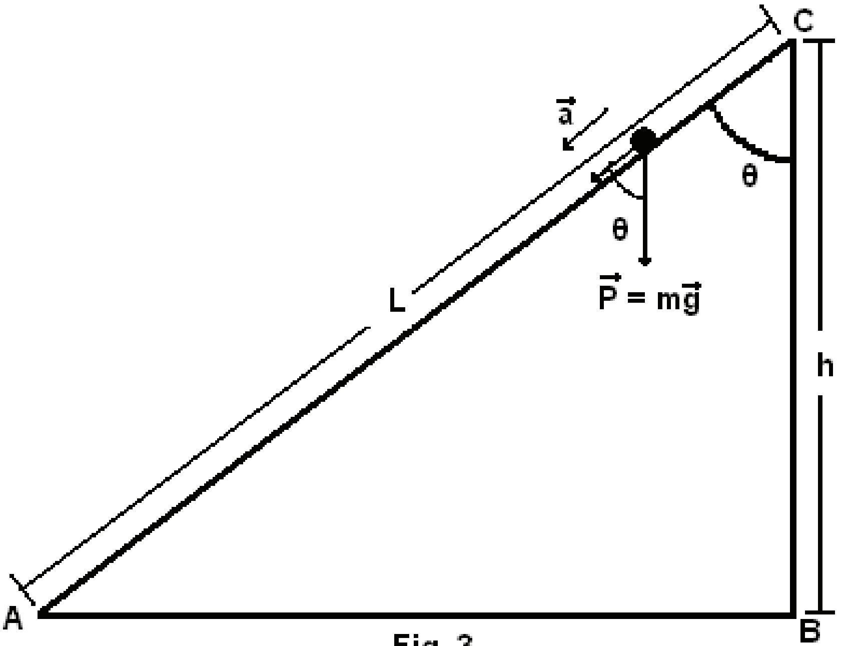


Fig. 3

$$a = g\cos\theta$$
$$h = \overline{C}\overline{B}$$
$$L = \overline{A}\overline{C}$$
$$\cos\theta = \frac{h}{L}$$

Usando a eq. (1) (com $e_0 = {}_0$ e v_0 no topo do plano), temos que o tempo necessário para percorrer a distância L (e = L) será:

$$L = \frac{1}{2}at^2$$

e

$$t^2 = \frac{2L}{g\cos\theta} = \frac{2L^2}{gh},$$

logo

$$t = L\left(\frac{2}{gh}\right)^{1/2} \qquad (3)$$

Substituindo a equação (3) na (2), temos:

$$v = at = g\cos\theta\, t = g\left(\frac{h}{L}\right)L\left(\frac{2}{gh}\right)^{1/2} = (2gh)^{1/2}$$

ou

$$v = (2gh)^{1/2}.$$

SOLUÇÃO III (Conservação da Energia).

Considerando como zero a energia potencial ao longo do plano horizontal (EP (B) = 0), definido por AB, a energia mecânica total (energia potencial + energia cinética, EP + EC), ao atingir o ponto C, será:

$$ET\ (C) = EC\ (C) + EP\ (C) = 0 + mgh = mgh; \quad (4)$$

a energia total do corpo ao atingir o ponto A será:

$$ET\ (A) = EC\ (A) + EP\ (A) = \frac{1}{2}\ mv^2 + 0 = \frac{1}{2}\ mv^2. \quad (5)$$

Sob as hipóteses de Galileu, em que as resistências externas são desprezadas o princípio da Conservação da Energia Mecânica é válido e a energia total em C, eq. (4), será igual à energia total em A, eq. (5):

$$ET\ (C) = ET\ (A)$$

ou

$$(\frac{1}{2})\ mv^2 = mgh$$

$$v = (2gh)^{1/2}$$

e independe do caminho escolhido por ser a força gravitacional uma força conservativa.

COMENTÁRIO

O experimento proposto por Galileu provavelmente é uma experiência imaginária, bastante plausível a partir da observação do movimento do pêndulo simples (que foi, por sua vez, estudado por ele). Ressalte-se o cuidado com que o físico estabelece as condições ideais da experiência imaginária, nas observações de Sagredo, ao desprezar a resistência do ar e os efeitos de atrito. A demonstração baseia-se fortemente no princípio da Conservação da Energia, embora em nenhum momento tal princípio fosse explicitado. Galileu teve, provavelmente, grande dificuldade em definir com precisão os conceitos físicos relevantes para o estudo da dinâmica, em particular a aceleração uniforme e a velocidade de um corpo em queda livre. O princípio da Conservação da Energia não lhe era estranho, contudo só foi estabelecido, tal como o concebemos hoje, somente 200 anos depois dos trabalhos de Galileu Galilei.

A aceleração centrípeta também não lhe era estranha. Veja por exemplo a distinção que Salviati faz entre movimentos numa curva e movimentos em retas. Provavelmente Galileu não tinha uma concepção precisa da aceleração centrípeta (observe-se quando diz que não deseja aprofundar-se nesse assunto) tal como foi posterior- mente definida por Newton.

Por que Galileu não fornece uma solução tão simples como as apresentadas em II ou III?

Devemos levar em consideração que, ao escrevermos as equações horárias do movimento (1) e (2), estamos utilizando uma série de conceitos físicos que raramente são considerados na solução de problemas. A própria definição de um movimento uniformemente acelerado, equação (2), já era um problema para Galileu. Na verdade, um dos resultados mais importantes obtido por ele foi demonstrar que a equação (1) aplica-se a corpos em queda livre. Por que o espaço percorrido por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo gasto para percorrê-lo? Isto é o que Galileu consegue demonstrar no seu Diálogo, através de raciocínio e experiências imaginárias como as descritas nesse trecho.

Embora o princípio da Conservação da Energia não lhe fosse estranho (solução III), o conceito de energia cinética, equação (5), só alcançou a importância e clareza que possui nos dias de hoje muito tempo depois de Galileu, pois, até o século XIX, as definições de momento, força-viva, energia cinética e impetus eram conflitantes entre si, em particular pelo fator ½.

Resolver um problema em Física não deve ser um mero exercício de aplicação de fórmulas, mas antes de tudo uma compreensão da Natureza e dos princípios físicos envolvidos.

A principal contribuição de Galileu ao desenvolvimento da Física talvez tenha sido idealizar experiências imaginárias em que os postulados e princípios delas derivados só serão considerados como verdadeiros quando "as suas conseqüências futuras corresponderem e concordarem perfeitamente com os resultados experimentais".