MEDIÇÕES E INCERTEZAS DE MEDIÇÃO: UM CONTRIBUTO BASEADO NAS CONVENÇÕES E RESOLUÇÕES INTERNACIONAIS[+*]

António Cruz
Departamento de Metrologia – Instituto Português da Qualidade (IPQ)
Caparica – Portugal
Eduarda Filipe
Unidade de Metrologia Científica e Aplicada – Laboratório Central de Metrologia (LCM) do IPQ
Caparica – Portugal
Guilherme de Almeida
Colégio Militar
Lisboa – Portugal
Jorge Valadares
Departamento de Ciências Exactas e Tecnológicas – Universidade Aberta
Lisboa – Portugal
Olivier Pellegrino
Unidade de Metrologia Científica e Aplicada – LCM do IPQ
Caparica – Portugal

Resumo

O presente artigo introduz, de uma forma didáctica e progressiva, as metodologias e as regras hoje internacionalmente consagradas para a determinação da incerteza de medição e a consideração da significância dos algarismos, através de dois exemplos simples de uma medição directa e de uma medição indirecta.

Palavras-chave: *Metrologia; incerteza de medição.*

[+] Measurements and the measurement uncertainty: a contribution based on conventions and international resolutions

[*] *Recebido: junho de 2008.*
Aceito: novembro de 2008.

Abstract

This article introduces the updated internationally adopted methodologies for the calculation of the measurement uncertainty, in a didactic and progressively way, through two simplified examples of a direct and an indirect measurement.

Keywords: *Metrology; measurement uncertainty.*

I. Introdução

Ao longo dos anos têm surgido, em textos sobre erros, incertezas e algarismos significativos, as mais variadas abordagens baseadas em diversas convenções *ad hoc.* Vem este artigo a propósito de alguns textos escolares onde conceitos e regras elementares sobre esses conceitos se confundem aparentemente e onde, ao sabor de eventuais correntes de opinião, desde há décadas, se cometem incorrecções susceptíveis de dificultar o entendimento desta temática. Essas incorrecções são provenientes, em grande parte, da confusão na aplicação dos conceitos na vertente experimental, seja da Física ou da Química, e também na vertente da Matemática, pela aproximação feita quando se simplifica a representação dos números, tratando-os como se fossem quantidades ou dados obtidos experimentalmente.

Os conceitos de "erro" e de "incerteza" aplicados ao trabalho experimental estão hoje estabilizados em documentos internacionalmente sufragados por todas as organizações relevantes da Metrologia e da Normalização, bem como dos domínios da Física e da Química [1], [2], [3]. Na determinação de um e de outro, devem ser usadas as regras de definição de "algarismo significativo" e de "arredondamento" definidas na Normalização, nomeadamente nas normas internacionalmente aceites [3]. A finalidade deste artigo é mostrar qual é a abordagem recomendável pela terminologia, por símbolos e recomendações internacionalmente consagradas, por amplo consenso, a partir de dois exemplos concretos.

II. Medição simples

Tomemos um caso experimental concreto, numa operação intuitivamente ao alcance de todos, mas extrapolável para qualquer situação, por mais complexa e sofisticada que seja. Como qualquer valor individual obtido numa medição tem sempre um carácter aleatório, este carácter só pode ser reduzido obtendo uma série de valores e analisando posteriormente a respectiva dispersão.

Imaginemos então uma pesagem[1] com uma balança de pesar pessoas, digital, de divisão 10 g. Recolhemos sucessivamente 10 valores referentes à massa de um adulto, numa sala fechada e de temperatura, pressão e humidade estabilizadas, isenta de gradientes dessas grandezas e da influência conhecida de outras grandezas nos resultados das medições.

Consideremos os resultados seguintes, em quilogramas (kg), para 10 repetições:

m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}
64,20	64,18	64,23	64,19	64,19	64,20	64,21	64,21	64,18	64,18

Vamos admitir que a balança tem erro zero[2], porque foi previamente ajustada e calibrada.

Se calcularmos matematicamente a média da série dos 10 resultados, obtemos com o Microsoft® Office Excel 2003 e com o MATLAB[3] versão 2005:

$$\overline{m} = 64{,}197 \text{ kg}$$

Este valor médio, representado convencionalmente por "$\overline{m}$", é considerado o resultado da medição, cujo rigor é avaliado do ponto de vista qualitativo por um parâmetro denominado "incerteza", a partir da informação recolhida da dispersão dos resultados. O valor convencionalmente usado para caracterizar a dispersão dos resultados é o desvio-padrão experimental (que doravante referiremos apenas por desvio-padrão), representado por "s_m". Para "n" resultados de medição "m_i", a expressão de cálculo do desvio-padrão é [2, §3.2.2]:

[1] Deve ficar perfeitamente claro que o termo "pesagem" (embora seja uma palavra derivada de "peso") é o termo consagrado internacionalmente para a medição que tem por objectivo determinar a massa de um dado corpo, visto que não existe o substantivo "massagem" para esse fim.

[2] Noutro artigo, veremos como tratar o conceito de erro, e as suas diferentes componentes, segundo as duas abordagens mais conhecidas, a "tradicional" e a "da incerteza".

[3] Designação comercial de um programa utilizado em cálculo científico.

$$s_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(m_i - \overline{m}\right)^2}{n-1}} \qquad (1)$$

No exemplo anteriormente referido da pesagem de um adulto, o desvio-padrão calculado pelos mesmos programas tem o valor:

s_m = 0,016 363 916 944 8425 kg.

Porém, esses resultados das operações matemáticas de cálculo da média e do desvio-padrão, obtidos com um ou outro meio informático, têm de ser tratados, para se poder apresentar o resultado de acordo com as regras internacionalmente consagradas e com o bom senso. Primeiro, porque utilizando um instrumento que, pelas suas características, não permite pesar quantidades inferiores a 10 g, não pode apresentar-se uma casa decimal correspondente ao grama. Segundo, porque não é prático, nem faz sentido, trabalhar com um desvio-padrão com 15 casas decimais. Terceiro, porque sequer o protótipo internacional do quilograma apresenta um valor com mais de 8 casas decimais.

É então aqui que deve entrar o conceito de "algarismo significativo" e as regras de arredondamento internacionalmente consagradas, nomeadamente nas normas ISO 31 - 0, Anexo B [4] e ASTM E29 [5]. Significativo porquê? Porque justamente não faz sentido atribuir os resultados matemáticos dos cálculos efectuados ao valor apresentado, já que eles estão para além das próprias capacidades do instrumento utilizado.

Então como proceder ao arredondamento no valor da média? Numa primeira análise, o arredondamento lógico, de bom senso, a efectuar no valor da média, de acordo com as referidas regras convencionais de arredondamento, é para a dezena de gramas mais próxima, ou seja:

$\overline{m}$ = 64,20 kg.

Vejamos agora o que fazer com o valor matematicamente calculado do desvio-padrão para determinar a incerteza[4] da pesagem. Desde logo, recordemos que a incerteza da medição[5] é um parâmetro que avalia quantitativamente a

---

[4] Consideraremos aqui o termo "incerteza", como designação abreviada do conceito de "incerteza-padrão" utilizado na bibliografia citada anteriormente.

[5] VIM, § 2.26: "Parâmetro não-negativo que caracteriza a dispersão dos valores da grandeza que são atribuídos à mensuranda a partir das informações usadas".

qualidade metrológica do resultado dessa medição, tendo em vista proporcionar ao seu utilizador um determinado grau de confiança no mesmo. Com efeito, a probabilidade de que o intervalo simetricamente centrado no valor médio dos resultados contenha o valor verdadeiro da massa impõe a definição do valor da largura deste intervalo. Aqui entra o conceito de "incerteza de medição expandida" ou, simplesmente, "incerteza expandida" – designada por U – que depende da incerteza de modo variável consoante a natureza das medições. Segundo os Guias citados atrás[6], na hipótese justificada pelo "teorema do limite central" duma lei de distribuição de probabilidade normal ou gaussiana dos valores médios[7] [3], a incerteza expandida, U, obtém-se multiplicando a incerteza por um "factor de expansão" k_p, associado ao grau de confiança p. Assim, a incerteza de medição expandida U, associada ao resultado, corresponde a meia largura do intervalo $[\overline{m} - k_p u, \overline{m} + k_p u]$, onde u é a incerteza-padrão da estimativa da grandeza de entrada $\overline{m}$, i.e. o desvio-padrão experimental da média [2, §3.2.2]:

$$u(\overline{m}) = \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (2)$$

Em medições correntes nos laboratórios de calibração e na maioria dos casos o factor de expansão, definindo um intervalo $[\overline{m} - k_p u, \overline{m} + k_p u]$, com um grau de confiança de aproximadamente 95 %. Isso significa que existe uma probabilidade de apenas 5 % dos valores a obter nas pesagens estarem fora do intervalo $[\overline{m} - k_p u, \overline{m} + k_p u]$.

[6] O GUM (Anexo G) apresenta um procedimento para deduzir o factor de expansão k_p associado a um grau de confiança p na hipótese suficiente duma lei de probabilidade t de Student; esse procedimento consiste em calcular o número efectivo de graus de liberdade, ν_{ef}, da incerteza padrão e efectuar: $k_p = t_p(\nu_{ef})$.

[7] O conjunto dos valores recolhidos é uma amostra de uma população imensa de valores que poderiam ser recolhidos. O valor médio obtido é um dos elementos de uma infinidade de valores médios que, teoricamente, poderiam ser obtidos com amostras de dimensão igual a esta (10 valores). O "teorema do limite central" determina que a distribuição dos valores médios das amostras se aproxima cada vez mais de uma distribuição normal à medida que a dimensão das amostras aumenta, independentemente da forma da distribuição da população.

No caso considerado aqui, do desvio-padrão ser multiplicado pelo factor de expansão 2 para se obter a expressão da incerteza expandida de medição[8], teremos:

U = 0,010 349 449 797 505 kg.

Então como apresentar o valor da incerteza U? As regras a salientar na sua apresentação, hoje universalmente aceites e consagradas na publicação citada [2], são as seguintes (GUM, §7.2.6):

- a estimativa da incerteza deve ser apresentada no máximo com dois algarismos significativos;
- a posição do último algarismo significativo do valor da média deve ser a mesma que a do último algarismo significativo da incerteza.

Relativamente ao arredondamento da incerteza, muito embora exista uma orientação genérica de que se deve arredondar por excesso, devem ser utilizadas as regras habituais (para detalhe sobre os arredondamentos ver ISO 31- 0:1992, anexo B). Contudo, se o arredondamento provocar uma redução superior a 5 % do valor numérico da incerteza de medição, deve ser utilizada a regra anterior.

Daí resulta que, no exemplo considerado, a incerteza "U" é:

U = 0,01 kg.

E o resultado da massa obtida na pesagem seria apresentado na forma:

m = 64,20 kg ± 0,01 kg ou m = (64,20 ± 0,01) kg.

Se quiséssemos, a partir desse resultado, fazer um juízo de valor sobre a qualidade da balança, poderíamos afirmar que se trata de um instrumento de medição adequado ao uso, porque a incerteza do resultado apenas afecta a última casa decimal do valor de indicação. Se imaginarmos uma situação em que apareçam dois algarismos significativos na incerteza de medição, por exemplo, U = 0,23 kg, aí já o valor da centena de gramas poderia estar em causa. A balança já não seria adequada para avaliar a evolução fina da massa de uma pessoa, para quem fosse importante, por razões de saúde por exemplo, registar essa progressão.

III. Medição indirecta

Vamos agora considerar a determinação experimental do valor de uma grandeza com base na medição de outras grandezas. Tomemos, então, o exemplo

---

[8] Consideradas as simplificações já referidas para esta pesagem.

da medição da área de um rectângulo de chapa mediante à medição dos comprimentos dos seus dois lados, através de um paquímetro (também conhecido como "craveira") com resolução[9] de 0,01 mm e, para simplificar, vamos supor que o rectângulo é perfeito, que as medições são independentes e realizadas em condições em que não há grandezas de influência relevantes[10].

Consideremos os resultados seguintes, obtidos em medições repetidas, para o comprimento dos lados "A" e "B", em milímetros (mm):

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
13,50	13,58	13,63	13,59	13,59	13,60	13,61	13,61	13,58	13,58
B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}
7,40	7,41	7,41	7,38	7,38	7,40	7,38	7,43	7,39	7,39

Vamos primeiro determinar os valores dos comprimentos dos lados do rectângulo, com base nas medições directas efectuadas.

Seguindo o procedimento anterior[11], utilizando os mesmos programas do exemplo anterior, os resultados obtidos para os valores médios e para os desvios-padrão das medições do comprimento dos lados "A" e "B" serão, em mm:

Média		**Incerteza-padrão**	
$\overline{A}$	13,587	u_A	0,010 959 521 481 849 100
$\overline{B}$	7,397	u_B	0,005 174 724 898 753 350

Então, efectuando tratamento de arredondamento idêntico ao anterior, para o cálculo e a apresentação do resultado e da incerteza (com o factor de expansão $k = 2$), teríamos como resultados da medição dos comprimentos dos lados do rectângulo, para cada uma das duas séries de medições, os seguintes valores médios e incertezas U:

$A = (13{,}59 \pm 0{,}02)$ mm; $B = (7{,}40 \pm 0{,}01)$ mm

[9] VIM, § 4.14: "A menor variação numa grandeza a medir que provoca uma variação perceptível na correspondente indicação".

[10] Para evitar a correcção da dilatação e as suas consequências na determinação da incerteza.

[11] Este procedimento é mais exacto do que o de considerar o valor médio e o desvio-padrão das áreas calculadas para cada par (A_i; B_i).

Vejamos agora como obter o resultado da medição indirecta da grandeza área *S,* que é função dos resultados das medições dos comprimentos dos lados, um caso de função de formulação simples, em que a grandeza é obtida pelo produto de duas outras:

$$S = A \times B \tag{3}$$

O valor médio da área $\overline{S}$ será, necessariamente, obtido a partir do produto, $\overline{A} \times \overline{B}$, dos valores médios dos comprimentos dos lados do rectângulo. Que valores tomar? Os não arredondados ou os arredondados? Tomando por agora[12], de acordo com a regra de que os arredondamentos se devem efectuar de um passo apenas [4, §B4], os valores médios não arredondados atrás determinados como valores verdadeiros dos lados, vem:

$$\overline{A} \times \overline{B} = 100{,}503039 \text{ mm}^2$$

E que valor deverá ser atribuído à área *S* com base naquele resultado matemático? Ou seja, o resultado deve ser apresentado com quantas casas decimais? Se medimos os lados com duas casas decimais, naturalmente deveremos ter um critério para arredondar o resultado da área, em função das medidas daqueles lados.

Vejamos primeiro o que resulta para a incerteza. Numa situação em que a grandeza resulta do produto de duas outras consideradas independentes[13], a determinação da incerteza implica o conhecimento das derivadas parciais da função *S* em relação a *A* e a *B,* além das incertezas associadas a essas grandezas *A* e *B*. A fórmula genérica aplicável para o cálculo da incerteza, que se obtém a partir do desenvolvimento em série de Taylor em torno do valor médio da grandeza dependente[14], é:

$$u_y^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} p_i^2 u_{x_i}^{\,2} \tag{4}$$

em que "u_y" representa a incerteza da grandeza y (no exemplo, seria: $u_y = u_S$), p_i os coeficientes de sensibilidade de y em relação a cada uma das grandezas x_i (i.e. as

---

[12] Adiante, verificaremos que, se tomássemos antecipadamente os valores já arredondados, perderíamos informação.

[13] É este o caso. Isto simplifica o problema, evitando a correlação entre as medições.

[14] Na hipótese, verificada aqui, da linearidade dessa grandeza.

derivadas parciais de, neste exemplo, S em relação a cada um dos comprimentos dos lados A e B) e "u_{x_i}" as incertezas das N grandezas x_i (neste caso, as incertezas associadas aos comprimentos dos lados, designadas no exemplo por u_A e u_B)[15].

Portanto, temos sucessivamente:

$$u_S^2 = \overline{B}^2 \times u_A^2 + \overline{A}^2 \times u_B^2 \tag{5}$$

no que resulta, para u_S, efectuando as contas com os mesmos programas, para os resultados atrás referidos e arredondando para dois algarismos significativos:

$u_S = 0{,}11 \text{ mm}^2$

E pretendendo-se um grau de confiança de aproximadamente 95 %, multiplica-se a incerteza u_S por um factor de expansão igual a 2, pelo que, mantendo apresentação com dois algarismos significativos, o resultado é o seguinte:

$S = (100{,}50 \pm 0{,}21) \text{ mm}^2$

Se tivéssemos utilizado os valores médios $\overline{A}$ e $\overline{B}$ truncados com duas casas decimais para determinar o de S, obteríamos o valor 100,57 mm^2, resultado este que, sendo mais grosseiro, manter-se-ia dentro do intervalo de confiança, uma vez que a primeira casa decimal já é afectada pela incerteza.

Dividindo ambos os membros da expressão

$$u_S^2 = \overline{B}^2 \times u_A^2 + \overline{A}^2 \times u_B^2 \tag{6}$$

pelo quadrado do valor médio da área S obtém-se imediatamente:

$$\left(\frac{u_S}{\overline{S}}\right)^2 = \left(\frac{u_A}{\overline{A}}\right)^2 + \left(\frac{u_B}{\overline{B}}\right)^2 \tag{7}$$

Essa expressão, válida para o caso particular de a grandeza S, medida indirectamente, ser o produto de duas grandezas, era igualmente válida se a grandeza S fosse o quociente das grandezas A e B. Nos casos de ser a soma ou a diferença de duas grandezas X e Y, a expressão geral atrás aplicada redundaria na expressão:

$$u_S^2 = u_X^2 + u_Y^2. \tag{8}$$

[15] Nota-se o uso de u para as incertezas - padrão serem distinguidas das incertezas expandidas U.

No caso frequente de a grandeza *S* ser expressa com potências, como:

$$S = A^m \times B^n \tag{9}$$

tem-se:

$$\left(\frac{u_S}{\overline{S}}\right)^2 = m^2\left(\frac{u_A}{\overline{A}}\right)^2 + n^2\left(\frac{u_B}{\overline{B}}\right)^2 . \tag{10}$$

Outro caso particular importante é a grandeza *S* ser expressa pelo logaritmo duma outra grandeza:

$$S = \ln A \rightarrow u_S = \frac{u_A}{\overline{A}} \tag{11}$$

Outro caso ainda é aquele em que grandeza S vem expressa pela exponencial de uma outra grandeza:

$$S = e^A \rightarrow \frac{u_S}{\overline{S}} = u_A . \tag{12}$$

IV. Metodologia ainda em uso ... mas incorrecta

Em trabalhos experimentais, onde a exigência de rigor não é tão grande como nos laboratórios de calibração, usam-se expressões para a incerteza da grandeza *S* expressa por uma função:

$$S = f(A, B, \ldots), \tag{13}$$

com base na expressão da diferencial exacta da função *S*:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial A} dA + \frac{\partial S}{\partial B} dB + \ldots \tag{14}$$

No entanto, com essa equação, o rigor do ponto de vista qualitativo do resultado da medição deixa de ser avaliado por um parâmetro estatístico da dispersão dos valores experimentais de *S,* a variância, explícito na equação (4), designada por "Lei de Propagação das Incertezas". A equação (14) é, de facto, a "Lei de Propagação dos Erros" [16], que não deve ser utilizada.

Esta regra, por substituição por diferencial exacta para avaliar a incerteza, conduz normalmente a valores de "incerteza" aproximados por excesso.

---

[16] GUM, Anexo E, parágrafo E3.2.

V. Conclusão

Neste texto foram apresentadas as regras internacionalmente consagradas para apresentar resultados experimentais fiáveis que devem ser respeitadas. A principal regra é que os resultados devem incluir o valor médio das medições e a sua incerteza expandida, na maior parte das vezes com um grau de confiança de 95 %.

Referências bibliográficas

1. VIM – Vocabulário Internacional de Metrologia. Conceitos básicos. Conceitos gerais. Termos associados. IPQ, 3. ed. Nov. 2008, ISBN 972-763-00-6; a edição internacional é adoptada e publicada pelas mais importantes Uniões científicas (IUPAP, IUPAC e FICC) e pelas organizações internacionais reguladoras da metrologia (BIPM e OIML), de normalização (ISO e CEI) e de acreditação (ILAC). É a 1ª edição do Guia ISO/IEC 99:2007, em português.

2. Guia para a expressão da incerteza de medição nos laboratórios de calibração. IPQ, 2. ed. Nov. 2005, ISBN 972-95341-9-5.

3. Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM). BIPM, CEI, FICC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML, Ed. ISO, ISBN 92-67-10188-9, 1995; este Guia foi editado na sequência de uma decisão do CIPM de 1977.

4. ISO 31 – Grandezas e unidades, Parte 0 – Princípios gerais, Anexo B – Guia para o arredondamento de números", 3. ed., 1992; esta norma está em revisão e será editada proximamente sob o novo número: ISO 80000.

5. ASTM E29-08 – Standard practice for using significant digits in test data to determine conformance with specifications, Oct. 2008.

Acrónimos

ASTM	American Society for Testing and Materials.
BIPM	Bureau Internacional de Pesos e Medidas.
CEI	Comissão Electrotécnica Internacional.
CIPM	Comité Internacional de Pesos e Medidas.
FICC	Federação Internacional da Química Clínica.
ISO	Organização Internacional de Normalização.
IUPAC	União Internacional da Química Pura e Aplicada.
IUPAP	União Internacional da Física Pura e Aplicada.
OIML	Organização Internacional de Metrologia Legal.