ÁNGULOS PLANOS: ¿POR QUÉ EL RADIÁN DEBE TENER UNA MEDIDA IGUAL A LA UNIDAD?[+*]

H. O. Di Rocco
Fac. Cs. Exactas – UNCPBA
Tandil – Argentina

Resumen

En este artículo se trata de un asunto que genera polémicas en la enseñanza de la Física: por qué el radián debe tener asignada una medida igual a la unidad. El radián no es una de las tantas posibles unidades de ángulos, sino la única para la cual se cumplen las relaciones trigonométricas y del Cálculo Infinitesimal, aunque la Geometría Analítica no necesite de esta unidad. Se muestra que la respuesta debe buscarse en algunos sencillos conceptos del Cálculo Infinitesimal, donde las nociones analíticas se hacen independientes de las geométricas.

Palabras-clave: *Enseñanza, radián.*

Abstract

In this article is discussed a subject that generates controversies in the teaching of Physics: why the radian must be the correct unit for the measurements of plane angles. The answer is, in our opinion, in the concepts of Calculus, where the analytical notions are independent of the geometrical ones.

Keywords: *Education, radian.*

[+] Plane Angles: why must the radian have a measure equal to the unity?

* *Recebido: junho de 2008.*
Aceito: outubro de 2008.

I. Introducción

Hemos trabajado desde el primer curso de Física convencidos de que la unidad más adecuada para medir los ángulos planos es el radián, que tiene una medida igual a la unidad cuando el arco $s = arc(AP)$ es igual al radio r (Fig. 1). Pero una lectura de los textos más comunes de Física muestra que en éstos aparecen expresiones del tipo "el radián es una unidad *conveniente"*, o *"*el radián es *una manera* de medir los ángulos", y otras expresiones similares. Vamos a mostrar en este trabajo que el radián no es una manera más de medir los ángulos ni solamente conveniente, sino la única unidad correcta de medida de ángulos, o sea que, efectivamente, éste tiene medida $\mu_\theta = 1$ cuando el arco s es igual al radio r. Usaremos la palabra *medida* para indicar el número (sin dimensiones) que se le debe asignar a las magnitudes geométricas. Por ejemplo, para un círculo de radio $r = 1$, indicaremos la medida de la longitud con $\mu_L = 2\pi$ y la medida del área mediante $\mu_A = \pi$, mientras que, en el sistema MKS, por ejemplo, $L = 2\pi\,[m]$ y $A = \pi\,[m^2]$, respectivamente.

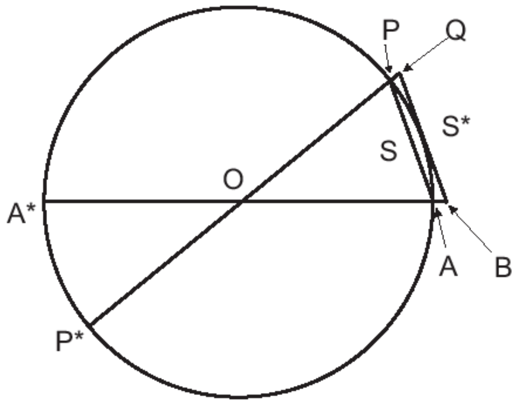

Fig. 1 - El doble sector circular $APOP^*A^*$ definiendo un ángulo de θ radianes. Los triángulos $A\overset{\Delta}{P}O$ y $B\overset{\Delta}{O}Q$ son similares.

Consideremos los siguientes sencillos ejemplos para ilustrar el objeto de nuestro trabajo:

i) Podemos verificar rápidamente con una modesta calculadora de mano que la medida del seno cumple, en relación a la medida del ángulo, la relación $lim_{\theta \to 0}(sen\theta/\theta) = 1$ solamente cuando los ángulos se expresan en radianes.

ii) Si acudimos al Cálculo Infinitesimal, donde las nociones analíticas se hacen independientes de las geométricas, podemos calcular mediante desarrollos en serie de Taylor los valores para *sen*(θ = *1*) y *cos*(θ = *1*) y preguntarnos: ¿cuánto vale la relación *s/r* tal que el seno y el coseno tengan los valores *sen*(θ =*1*)$\approx$ *0.84147* y *cos*(θ =*1*)$\approx$ *0.54030*? Pero, una búsqueda en los manuales de Tablas y Fórmulas Matemáticas o en los capítulos de los libros de Análisis Matemático donde se calcula la longitud de arco, se da por sentado que los ángulos se miden en radianes (ver las referencias que indicaremos en las próximas secciones). Esto, en mi opinión, no es satisfactorio.

iii) si la noción de ángulo plano y la medida que debe asignársele se la vincula con la noción del área de una cierta configuración geométrica construída a partir de un círculo, puede demostrarse que la relación $\theta = s/r$ es, entonces, un corolario. Sin embargo, esta solución no resulta satisfactoria por lo simétrico del argumento presentado: definir $\theta = s/r$ y concluir que tal ángulo podría ser pensado como un cociente entre el área del doble sector circular y el cuadrado del radio (ver Sección 3).

A nuestro entender, la respuesta está en el Cálculo Infinitesimal: diversas relaciones entre las funciones trigonométricas y sus correspondientes derivadas se cumplen solamente cuando θ se mide en radianes (ver Sección 4).

En cuanto al uso o no del símbolo *rad* en las ecuaciones cinemáticas y dinámicas, no es la intención de esta nota abogar por una posición u otra, para lo cual el lector puede consultar los artículos que figuran en las Referencias que indicaremos en la próxima sección; de cualquier manera hago una pequeña disquisición en las Conclusiones.

II. Una búsqueda en artículos y en libros

En unas pocas oportunidades las revistas dedicadas a los aspectos educacionales de la Física han publicado artículos sobre la unidad de ángulo plano, que suele causar desconcierto en lo que concierne al uso o no de la unidad "radián" (o de su símbolo, *rad*) en las ecuaciones [BRINSMADE, 1936]-[BROWNSTEIN, 1997]**.** En dichos trabajos algunos autores abogan por el uso del símbolo *rad* en algunas de las ecuaciones mientras que no en otras; se suele distinguir entre las ecuaciones puramente cinemáticas de las de la dinámica, se las inserta o borra tal que las unidades de ambos miembros concuerden, etc. Algunas hilarantes consecuencias del uso de tal unidad está en el artículo de Brownstein [BROWNSTEIN, 1997]**.** La gema es que, partiendo de la ecuación por todos conocida, $w = 2\pi f$, luego de unos pocos pasos auto-consistentes, degenera en $w = f$! Esto indica, claramente, que el radián es una unidad problemática. Por otro lado, los libros de textos más conocidos han sido "inmunes" a esta preocupación manifestada por los autores de las citadas referencias, como si no mereciera más que frases del estilo "$\Delta\theta$ se mide en radianes" (INGAARD-KRAUSHAAR, 1966), "el radián se define como s/r "(SERWAY, 2003; TIPLER, 1995), "existe una unidad natural" (KITTEL, 1982), etc. En el libro de Resnick and Halliday (RESNICK-HALLIDAY, 1970) aparece la palabra radián en un ejemplo sobre velocidad angular, dando a entender que no hay misterio alguno en tal unidad; lo mismo sucede con libros en otros idiomas: un buen texto en italiano (MAZZOLDI y cols., 1998) también menciona *rad* solamente en un ejemplo. Otros libros no lo mencionan en absoluto (SEARS y cols., 1981). Un libro dedicado al análisis dimensional, simplemente dice que *"el radián se define..."* (SENA, 1979). Da la impresión de que los autores de los citados textos han dejado para los cursos de Cálculo y/o de Geometría Analítica tal cuestión. Inclusive, algunos autores expresan que "el radián es solamente una de las muchas posibilidades de medida de ángulos", llamando al radián *that troublesome unit* (AUBRECHT y cols., 1993).

Una búsqueda somera por algunos libros de Cálculo Infinitesimal muestra que la explicación suele no ser clara. En el Tomo 1 del conocido libro de T. M. Apostol (APOSTOL, 1967) se considera un círculo de centro O y radio r y dos puntos A,P (Fig. 1); esto determina una configuración geométrica que se denomina *ángulo*, a la cual hay que asignarle un número real positivo, μ_θ (en nuestra notación). En el Capítulo 2, Apostol define la medida de $\widehat{AOP}$ como el doble del área del sector AOP dividido entre r^2 y a la unidad de medida la llama *el radián.* Esta definición está basada en que para un círculo de radio $r = 1$, las medidas de la longitud y del área están en relación 2: $\mu_L = 2\pi$, $\mu_A = \pi$. Claramente, esto es insatisfactorio y el mismo autor lo reconoce, y pospone la discusión hasta el Capítulo 14. Más adelante, al tratar la longitud de arco en la Sección 14.12, encuentra precisamente que para círculos de radio $r = 1$, la medida que le corresponde a un arco de ángulo θ y radio a, es $l = \theta\, a$ (pero, ¡presuponiendo que θ está en radianes!). La gran obra, clásica en lengua española, de Rey Pastor y colaboradores, establece, en el Tomo 1 sobre Análisis Matemático (REY PASTOR; PI CALLEJA; TREJO, 1969), una noción análoga a la de Apostol, mientras que en el Tomo dedicado a la Geometría Analítica (REY PASTOR; SANTALÓ; BALANZAT, 1969), expresa que el radián es una unidad artificial e innecesaria, indicando que la unidad natural debería ser el ángulo recto! Los resultados de la Geometría Analítica son, ciertamente, independientes del ángulo de medida unidad pero, a mi entender, los resultados del Cálculo (y de la Física) sí deben hacer uso de un ángulo plano de medida unidad: el radián.

III. Algunas "inferencias" que indican que al radián debe asignársele la medida unidad

III.1 La longitud del arco correspondiente a un ángulo unidad (sin presuponer que se mide en radianes)

Como hemos dicho antes, para que se cumpla la relación:
$lim_{\theta \to 0} (sen\theta / \theta) = 1$

(que se demuestra trigonométricamente y surge, además, del primer término del desarrollo en serie, $sen(\theta)/\theta + ...$), los ángulos deben medirse en radianes. Más en general, supongamos que existe um ángulo θ tal que, cuando valga la unidad ($\mu_\theta=1$) se deba cumplir, evaluando mediante suficientes términos en los desarrollos en serie de Taylor, que $sen(\theta =1)\approx 0.84147$, $cos(\theta =1)\approx 0.54030$ y $tg(\theta)\approx 1.55741$. Si ahora nos preguntamos, desde el punto de vista geométrico, cuánto vale el arco s correspondiente a dicho ángulo θ, las fórmulas que figuran en los manuales ya presuponen que θ se mide en radianes (SPIEGEL, 1970). Lo que sí podemos demostrar geométricamente (Fig. 1) es que el arco s> $\overline{AP}$ por el teorema del coseno, $AP = \sqrt{2r^2(1-\cos(\theta=1))} \approx 0.9589r$, luego (s/r) > 0.9589. Por otro lado, si consideramos el triángulo $\overset{\Delta}{BOQ}$, semejante al triángulo $\overset{\Delta}{APO}$, la longitud de s está acotada superiormente por $\overline{BQ} \approx 1.0927r$. Es decir que hemos acotado 1.0927 > (s/r) > 0.9589. Podríamos seguir con este método arquimediano de exhaución y llegaríamos a inferir (en forma prácticamente "experimental") que cuando $\theta = 1, s \approx r$.

Este procedimiento no es, a mi entender, satisfactorio: claramente podemos preguntarnos, ¿es, con mucha aproximación, $s \approx r$ o se cumple rigurosamente que $s = r$?

III.2 Otra manera de definir el radián

La definición clásica es que un ángulo tiene medida $\mu_\theta = 1$ cuando $s = r$. Algunos autores de Análisis Matemático (APOSTOL, 1967), (REY PASTOR, 1969) proponen considerar el siguiente concepto, basado en que la noción de área plana es más sencilla que la de longitud de un arco. Sea el *doble sector circular* (*APOP'A'*) de la Fig. 1, y consideremos los segmentos $\overline{AA'}$ y $\overline{PP'}$; a dicha configuración le corresponde la noción que llamamos ángulo, que denominamos θ, de medida μ_θ. Para asignarle tal medida, o sea, un número real $\mu_\theta > 0$, definimos:

$$\mu_\theta = \frac{\acute{a}rea\ \sec tor\ (APOP'A')}{r^2}, \tag{1}$$

la que la hace, como debe ser, independiente del radio, y por lo tanto podemos tomar $r = 1$. Esto es equivalente a decir que las longitudes se miden en unidades de r, con lo cual $L/r \rightarrow L$. Para $r = 1$, la medida de la magnitud que denominamos ángulo será la misma que la del área del doble sector *APOP'A'*.

Si ahora nos preguntamos cuánto valdrá el arco s = *arco (AP)* cuando $\mu_\theta = 1$, la respuesta es sencilla. Dado que al área de un círculo de radio $r = 1$ le corresponde la medida $\mu_A = \pi$ mientras que a la longitud le corresponde la medida $\mu_L = 2\pi$, será $\mu_\theta = 1$ cuando, efectivamente, s = *arco (AP)* $=1$ (en unidades de r). Esta condición,

$$\mu_\theta = \frac{s}{r} \tag{2}$$

es, entonces, un *corolario* de la definición dada por la Eq. (1).

Sin embargo, este punto de vista no es, tampoco, satisfactorio. La situación sería simétrica a la de definir, como se hace normalmente, $\theta = s/r$, y concluir que tal ángulo podría ser pensado como un cociente entre el área del doble sector circular y el cuadrado del radio.

IV. Una posible respuesta, basada en el Cálculo Infinitesimal

Si suponemos que la longitud de arco s tiene la forma generalizada $s = kr\theta$, y por lo tanto $\theta = (s/r)/k$, que puede escribirse en la forma sugestiva: $\theta = \theta_{rad}/k$, entonces:

$$\frac{d(\sin(\theta))}{d\theta} = \frac{\cos(\theta)}{k} \equiv \frac{\cos(\theta_{rad}/k)}{k}, \tag{3}$$

$$\frac{d(\cos(\theta))}{d\theta} = -\frac{\sin(\theta)}{k} \equiv \frac{\sin(\theta_{rad}/k)}{k}; \tag{4}$$

si tenemos en cuenta las relaciones provenientes del Cálculo, válida para z arbitrario (aún complejo):

$$\frac{d(\sin(z))}{dz} = \cos(z), \qquad \frac{d(\cos(z))}{dz} = -\sin(z)\,, \tag{5}$$

entonces es claro que, para que se cumplan las relaciones dadas por la ecuación (5), $\overset{\downarrow}{k=1}$ y por lo tanto $\theta \overset{\downarrow}{=} \theta_{rad}$ (el símbolo $\overset{\downarrow}{k=1}$ significa "debe ser igual a"; es, entonces, una imposición más que una mera igualdad).

Lógicamente, también se va a cumplir la relación fundamental: $[\sin(\theta)]^2 + [\cos(\theta)]^2 = 1$, escrita en las formas:

$$[\sin(\theta)]^2 + \left[\frac{d(\sin(\theta))}{d\theta}\right]^2 = 1 \quad \text{y} \quad [\cos(\theta)]^2 + \left[\frac{d(\cos(\theta))}{d\theta}\right]^2 = 1 \tag{6}$$

cuando $k = 1$ y por lo tanto $\theta = \theta_{rad}$.

V. Conclusiones

En este trabajo se muestra que la medida de un ángulo plano *debe* medirse en radianes, ya que es la única unidad para la cual se cumplen las relaciones del Cálculo Infinitesimal, válidas para z arbitrario, aún complejo, dadas por las ecuaciones (3), (4) y (6).

En cuanto al uso o no del símbolo rad en las ecuaciones, tengamos en cuenta los siguientes ejemplos análogos: estamos acostumbrados a usar (en el Sistema MKS) unidades como *Nt, J o W*, etc. indicando que es el resultado de calcular, respectivamente, fuerzas, energías, potencias, etc. Sin embargo, si dados como datos la energía cinética (en *Joules*) de un cierto cuerpo de masa m y se nos pide calcular su velocidad v, la unidad J nos sirve de poco y tenemos que transformarlo previamente en las unidades fundamentales ML^2T^{-2} para que al final del cálculo concuerden las unidades. Desde este punto de vista, el uso del símbolo *rad* es ni más ni menos útil que el uso de las unidades *Nt, J, W,* etc.

En definitiva, el radián es una unidad necesaria y adimensional, mientras que el uso de la palabra o del símbolo *rad* en las ecuaciones es innecesario pero innocuo, puesto que no tiene dimensiones.

Agradecimientos

Agradezco a varios colegas de los Departamentos de Física y de Matemática de nuestra Facultad, por las cordiales discusiones acerca de este tema,

aparentemente “trivial”. Asimismo agradezco las sugerencias de los árbitros, que permitieron una mejora sustancial de este artículo.

References

APOSTOL, T. M. **Calculus.** 2. ed. New York: Editorial John Wiley, 1967. v. 1.

AUBRECHT, G. J.; FRENCH, A. P.; IONA, M.; WELCH, D. W. The Radian-That Troublesome Unit. **Phys. Teach.,** v. 31, p. 84-87, 1993.

BRISNMADE, J. B. Plane and Solid Angles. **Am. Phys. Teach**., v. 4, p. 175-179, 1936. (The American Physics Teacher later became The American Journal of Physics).

BRONSHTEIN, I.; SEMENDIAEV, K. **Manual de Matemáticas.** Moscú: Editorial Mir, 1973.

BROWNSTEIN, K. R. Angles-Let's treat them squarely. **Am. J. Phys.**, v. 65, p. 605-614, 1997.

BUTKOV, E. **Mathematical Physics.** Reading: Editorial Addison-Wesley, 1973.

DE BOER, J. Group Properties of Quantities and Units. **Am. J. Phys.**, v. 47, p. 818-819, 1979.

FRENCH, A. P. What Happens to the 'Radians'? **Phys. Teach.**, v. 30, p. 260-261, 1992.

INGAARD, U.; KRAUSHAAR, W. L. **Introducción al Estudio de la Mecánica, Materia y Ondas**. Barcelona: Editorial Reverté, 1966.

KITTEL, C.; KNIGHT, W. D.; RUDERMAN, M. A. **Mecánica.** Berkeley Physics Course. Barcelona: Editorial Reverté, 1982. v. 1.

MAZZOLDI, P.; NIGRO, M.; VOCI, C. **Fisica.** Napoli: Edises, 1998. v. 1.

OBERHOFER, E. S. What Happens to the 'Radians'? **Phys. Teach.**, v. 30, p. 170-171, 1992.

PAGE, C. H. Classes of Units in the SI. **Am. J. Phys**., v. 46, p. 78-79, 1978.

PAGE, C. H. Rebuttal to de Boer's 'Group Properties of Quantities and Units'. **Am. J. Phys.,** v. 47, p. 820, 1979.

RESNICK, R.; HALLIDAY, D. **Física.** México: Editorial CECSA, 1970. v.1.

REY PASTOR, J.; PI CALLEJA, P.; TREJO, C. **Análisis Matemático.** Buenos Aires: Editorial Kapelusz, 1969. v. 1.

REY PASTOR, J.; SANTALÓ, L. A.; BALANZAT, M. **Geometría Analítica.** Buenos Aires: Editorial Kapelusz, 1969.

SCOTT, B. L. It's Obvious-Now. **Phys. Teach**., v. 30, p. 170-171, 1992.

SCOTT, B. L. Letter to the Editor. **Am. J. Phys.,** v. 53, p. 520, 1985.

SEARS, F. W.; ZEMANSI, M. W.; YOUNG, H. D. **Física**. Madrid: Editorial Aguilar, 1981.

SENA, L. A. **Unidades de las magnitudes físicas y sus dimensiones.** Moscú: Editorial Mir, 1979.

SERWAY, R. A.; JEWETT, J. W. **Física I**. México: Editorial Thomson, 2003.

SPIEGEL, M. R. **Cálculo Superior**. México: Editorial McGraw-Hill, 1970.

SPIEGEL, M. R. **Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas**. México: Editorial McGraw-Hill, 1970.

TIPLER, P. A. **Física T1**. Barcelona: Editorial Reverté, 1995).