DOI: http://dx.doi.org/10.5007/2175-7941.2014v31n1p149

Evoluções numéricas a perder de vista[+*]

Guilherme de Almeida
Colégio Militar
Associação Portuguesa de Astrônomos Amadores (APAA)
Lisboa – Portugal

Resumo

As situações do dia-a-dia deram-nos um treino suficiente para lidar com evoluções numéricas em progressão aritmética, e conseguimos fazer previsões razoáveis nesse domínio. Mas o nosso senso comum não está geralmente preparado para lidar com valores que crescem ou decrescem em progressão geométrica. Nestas condições, a nossa intuição falha estrondosamente, mostrando a inadequação dos raciocínios precipitados. Também falhamos na comparação de outras situações para as quais também não estamos treinados. Este artigo destina-se a mostrar alguns desses casos limites.

Palavras-chave: *Progressão aritmética. Progressão geométrica. Senso comum. Unidade astronômica. Ano-luz. Diâmetro da Via Láctea.*

Abstract

The everyday life situations gave us a good enough training to deal with numerical evolutions operated by arithmetic progressions, so in this specific case we can make good numerical predictions. But our common sense is not usually prepared to deal with numbers

---

[+] Numerical evolutions beyond our belief

[*] *Recebido: setembro de 2013.*
Aceito: novembro de 2013.

that grow, or shrink, according to geometrical progressions. In the last cases, our intuition strongly fails, showing that our intuition is not always right. We also fail in comparing some other situations which we are not trained. This article shows some of that limiting cases.

Keywords: *Arithmetic progression. Geometric progression. Common sense. Astronomical unit. Light year. Milky Way diameter.*

I. Uma questão de hábito e senso comum

Estamos habituados, desde muito novos, a fazer previsões ou estimativas baseadas em progressões *aritméticas*, nas quais cada novo termo se obtém somando uma quantidade fixa, positiva ou negativa, ao termo anterior. Por exemplo, 1, 3, 5, 7, … No nosso dia-a-dia quase nunca pensamos nas progressões *geométricas*, nas quais cada novo termo se obtém multiplicando o termo anterior por uma quantidade fixa, maior ou menor do que a unidade. Por exemplo, 1, 2, 4, 8, … Quando somos confrontados com fatos ligados a progressões geométricas, ou desafiados a fazer estimativas nesse contexto, as nossas previsões, em geral obtidas com base no senso comum e no hábito enraizado, *falham estrondosamente*. Também falhamos redondamente na comparação de *outras* situações para as quais também não estamos treinados. Este artigo destina-se a mostrar alguns desses casos limite.

II. Crescimento inesperado da espessura de uma folha de papel

Admita-se que tínhamos uma fita de papel muito comprida, com a espessura e = 0,1 mm. Dobrando a fita ao meio, pela *primeira* vez, teremos o dobro da espessura (0,2 mm), ou seja e x2^1; dobrando outra vez a fita, após a *segunda* dobragem a espessura do papel atingirá 4 vezes a espessura inicial, ou seja, e x2^2 ; à *terceira* dobragem chegaremos à espessura e x2^3. É fácil concluir que ao fim de n dobragens, a espessura atingida será e x2^n. Parece que estamos sempre nas pequenas espessuras. Por mais vezes que se dobre o papel, a espessura será sempre insignificante, *pensamos* nós.

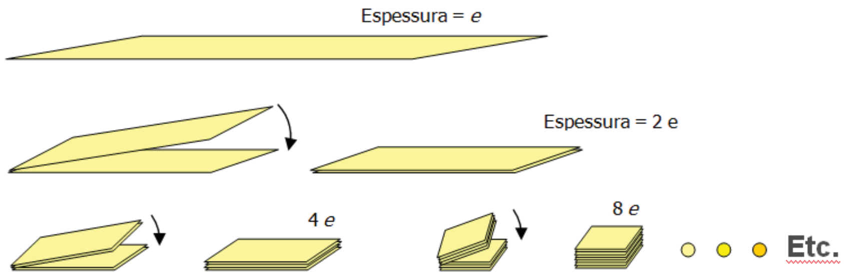


Fig. 1 – Sequência idealizada das dobragens do papel (Figura de Guilherme de Almeida).

É claro que todos sabemos que ao fim de algumas dobragens será preciso uma força enorme para dobrar o papel, e seria necessário ter à partida uma tira enorme para o poder dobrar sucessivamente. Vamos desprezar esses fatos e pensar no modo como cresce a espessura de papel, à medida que este vai sendo sucessivamente dobrado, pois o nosso interesse fundamental é ver como é que a espessura vai aumentando.

Podemos colocar uma primeira pergunta: quantas vezes seria preciso dobrar o papel para obter uma espessura igual à distância média da Terra à Lua (384 400 km)? Parece que teríamos de fazê-lo milhares de vezes, ou provavelmente milhões de vezes (o senso comum diz-nos isso), mas... ao fim de 42 dobragens a espessura do papel dobrado já excedeu essa distância. Vejamos como:

A distância da Terra à Lua, em média, é d_{Lua}=384 400 km=3,844x10^8 m. A espessura da folha de papel (uma só camada) mede 0,1 mm=0,1x10^{-3} m.

Ao fim de n dobragens a espessura global de papel atingirá finalmente 3,844x10^8 m. Mas, afinal quantas vezes termos de dobrar? Teremos de o dobrar n vezes, de tal modo que $e \times 2^n = d_{\text{Lua}}$, ou seja,

$$0{,}1\text{x}10^{-3} \text{ x } 2^n = 3{,}844\text{x}10^8 \text{ m, o que significa que } 2^n = 3{,}844\text{x}10^8/0{,}1\text{x}10^{-3}.$$

Resta saber qual é o número n que torna possível a anterior condição. Aplicando logaritmos de base 10 (que atualmente se aprendem, em Portugal, no 12.º ano) a esta última expressão, teremos:

$$2^n = 3{,}844\text{x}10^8/0{,}1\text{x}10^{-3} \Leftrightarrow n \log 2 = \log\left(3{,}844\text{x}10^{12}\right) \Leftrightarrow n = 41{,}806.$$

Mas como n tem de ser um número inteiro (não há meias dobragens), a espessura de papel ultrapassa a distância da Terra à Lua à 42.ª dobragem. Este resultado é uma surpresa enorme. Qualquer jovem, ou menos jovem, pode verificar facilmente este resultado utilizando uma vulgar máquina de calcular com funções científicas básicas, usando a tecla x^y. Comprovaremos facilmente que 2^{42} ultrapassa $3{,}844 \times 10^{12}$. É claro que a solução (valor de n) pode variar ligeiramente consoante a espessura do papel considerado no cálculo.

III. Ainda mais longe

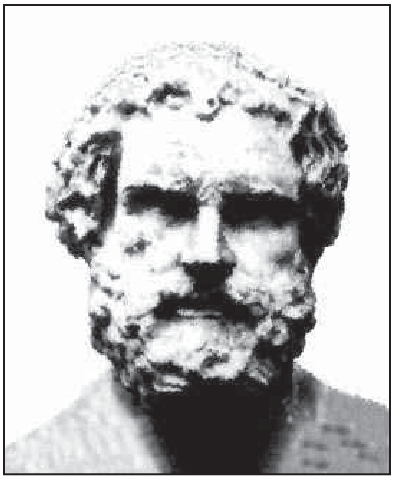
À 51.ª dobragem (contada desde o início), já a espessura de papel excede uma unidade astronómica (distância média da Terra ao Sol), que vale aproximadamente 150 milhões de km ($1{,}5 \times 10^{11}$ m). O cálculo a fazer é semelhante ao que fizemos anteriormente para a distância da Terra à Lua, utilizando agora a distância da Terra ao (d_{Sol}).

À 67.ª dobragem (contada desde o início), a espessura do papel excede um ano-luz (1 ano luz=$9{,}461 \times 10^{15}$ m, correspondendo a 63 200 vezes a distância da Terra ao Sol.

À 83.ª dobragem (contada desde o início), a espessura do papel excede o diâmetro tradicionalmente considerado da Via Láctea, a nossa galáxia! (100 000 anos-luz). Quem diria?

IV. Caminhando para o "infinitamente pequeno"

Também podemos andar no sentido inverso, em busca de dimensões sucessivamente menores. Conta-se que Demócrito, filósofo grego que viveu em Abdera (cidade grega na costa da Trácia) entre 460 a.C. e 370 a.C., foi uma das primeiras pessoas a pensar que a matéria não podia ser infinitamente dividida. Teve uma primeira ideia de átomo, considerando-o como a menor porção de matéria que ainda mantinha as propriedades da substância original, se esta fosse uma substância simples (diríamos agora). Considerou o átomo



Demócrito

indivisível (do grego "*a"* = negação e "*tomo*" = divisível, ou seja, átomo = indivisível).

Dizia Demócrito que se alguém cortasse uma maçã ao meio, com uma faca afiada, dividindo depois uma das metades ao meio, depois dividindo um dos quartos ao meio, e assim sucessivamente, teríamos de *parar* a certa altura, pois só restaria um átomo, já não divisível (para Demócrito). Não colocaremos a questão de saber da dificuldade técnica de cortar fragmentos minúsculos (ou até da real impossibilidade de fazê-lo com uma faca, por mais afiada que esta seja), pois não é esse o nosso objetivo. Quantas vezes poderemos cortar a maçã até se chegar a um só átomo? Também *parece* que precisaremos cortá-la milhares de vezes, ou mesmo milhões, de vezes, para consegui-lo. Será assim?

Vamos partir de uma maçã grande, com 216 cm^3 de volume (como uma bola de 7,4 cm de diâmetro). Para facilitar as contas consideraremos a maçã com a forma de um cubo deste volume, ou seja, com 6 cm de aresta (6^3 cm^3= 216 cm^3).

Um átomo, que vamos considerar de hidrogênio, por ser o menor de todos, tem um "diâmetro" de cerca de 100 picômetros (100 pm), ou seja, $100x10^{-12}$ m=$1x10^{-10}$ m =$1x10^{-8}$ cm. Supondo esse átomo também cúbico, para simplificar, o seu volume seria $(1x10^{-8})^3$ cm^3 = $1x10^{-24}$ cm^3.

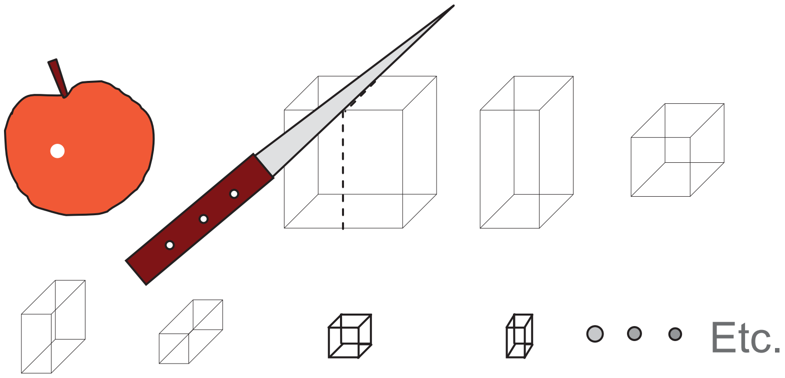


Fig. 2 – Sequência idealizada de cortes de uma maçã, aproximada à forma cúbica (Figura de Guilherme de Almeida).

Após o *primeiro* corte, o volume será $216/2^1$ cm^3. Ao *segundo* corte, teremos $216/2^2$ cm^3. E, ao fim de *m* cortes, o volume residual ($216/2^m$ cm^3) ficará em $1x10^{-24}$ cm^3, que é o volume de um só átomo.

Portanto, $(1x10^{-8})^3 = 216/2^m \Leftrightarrow 2^m = 216/10^{-24}$, ou ainda $2^m = 2{,}16x10^{26}$. Recorrendo ao método já citado (logaritmos de base 10), obteremos:

$$m \log 2 = \log (2{,}16x10^{26}), \text{ ou seja, } m = 87{,}48.$$

Mais uma vez, como, *m* tem de ser um número inteiro, isto significa que ao fim de 88 cortes teremos chegado ao átomo. Concretizando: ao fim de 88 cortes estaria à nossa frente um único átomo. Parece inacreditável que tenhamos de cortar tão poucas vezes. Quem diria?

Para obrigar a mais cortes, este cálculo pressupõe que se cortaria até ao mais pequeno dos átomos, o de hidrogênio (volume de 10^{-24} cm3), equiparável a um pequeno "cubo" de 0,000 000 01 cm de aresta. Mas convém referir que, além de átomos de hidrogênio, nas diferentes moléculas que existem na maçã também há outros átomos bem maiores: de carbono, de oxigénio, de azoto, etc.

V. Uma outra surpresa

Vamos ver agora outro fato surpreendente e inesperado. Admita-se que alguém conseguia enrolar um arame em volta da Terra, passando, por exemplo, pelo equador. O diâmetro médio da Terra é aproximadamente 12756 km.

Para simplificar os cálculos, consideremos a Terra perfeitamente esférica, sem montanhas. O arame estará, por isso sempre encostado à Terra em todo o seu perímetro. Aumentemos um metro ao comprimento do arame. Voltando a dar-lhe forma circular, e mantendo-o igualmente afastado do chão em todo o seu comprimento, (suportando-o por estacas, por exemplo), o arame passará a uma altura de quanto relativamente ao chão? Esse não é o problema em si, pois essa altura vale 0,15915… m, como mostraremos mais adiante.

Podemos repetir a experiência, agora mais fácil de realizar, circundando uma laranja esférica de (por exemplo) 8 cm de diâmetro, com um arame fino, de modo a ficar justo. Aumentando depois um metro ao comprimento desse arame, e dando-lhe a forma circular (e concêntrica com a laranja) a que altura passa o arame acima da superfície da laranja? Será muito mais do que no caso da Terra? Na realidade obteremos os mesmos 0,15915… m.

Na verdade, veja que a medida do raio do arame, dando a volta ao equador de uma esfera de raio *r*, vale

$$\frac{2\pi\, r}{2\pi} = r \ ,$$

quando encostado à esfera; e valerá

$$\frac{2\pi\, r + 1}{2\pi} ,$$

quando o comprimento do arame é alongado 1 m (considerando *r* expresso em metros). O que procuramos saber é *diferença* entre o segundo e o primeiro valor. Feitas as contas, *essa diferença* vale 1/2π = 0,15915… m. E, para nossa surpresa, tal diferença é *independente* de *r*. Ou seja, Terra ou laranja, tanto faz!

VI. Conclusão

Apresentamos neste artigo alguns exemplos mostrando como e até que ponto o nosso senso comum pode falhar quando pretendemos usar a nossa intuição para fazer previsões em situações menos habituais. A experiência do dia-a-dia não nos prepara para situações deste tipo e as nossas expectativas falham estrondosamente. Como conclusão, podemos afirmar que o senso comum não deve ser aplicado de ânimo leve.