UMA NOTA DE ESCLARECIMENTO SOBRE O OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO

Antonio Soares de Castro
Depto. de Física e Química – UNESP
Guaratinguetá – SP

Resumo

A solução do oscilador harmônico amortecido é tratada exatamente no caso subcrítico. A modulação da amplitude, a envoltória e a energia mecânica são discutidas.

Embora as manipulações algébricas envolvendo a solução da equação diferencial para o problema do oscilador harmônico amortecido (OHA) sejam simples, a maioria dos livros-texto apresenta resultados aproximados, e alguns deles sequer mencionam as aproximações realizadas(1,2,3,4,5). Este fato freqüentemente conduz os estudantes a concluírem que esses resultados são exatos. O presente trabalho trata a solução do OHA exatamente, no caso subcrítico, chamando a atenção dos leitores para as aproximações feitas pelos autores de livros-texto. Embora estes livros-texto apresentem solução exata para a equação diferencial do OHA, os resultados para a modulação da amplitude e da energia são apenas aproximados. A modulação da amplitude apresentada pela maioria dos livros-texto é, na realidade, a envoltória da curva de osci1ação, que no caso limite de amortecimento muito pequeno tende aos mesmos valores numéricos. Parte deste trabalho, em uma versão resumida, apareceu em outro lugar(6).

O OHA é caracterizado pela equação diferencial do movimento

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \varpi_0^2 x = 0 . \qquad (1)$$

Quando $\gamma < \varpi_o$, o caso subcrítico, esta equação tem a solução geral

$$x(t) = A\, e^{-\gamma t} \cos\left(\varpi t + \phi\right) , \qquad (2)$$

onde

$$\varpi = \varpi_o \left[1 - \left(\gamma / \varpi_o \right)^2 \right]^{1/2} . \qquad (3)$$

A e ϕ são as constantes de integração.

A velocidade do OHA é dada pela derivada temporal de (2):

$$v(t) = \dot{x} = -\gamma x - \varpi\, A e^{-\gamma t} sen(\varpi t + \phi) \tag{4}$$

A posição e a velocidade no instante inicial, t = 0, são dadas por

$$x_o = A\cos(\phi) \tag{5.1}$$

e

$$v_o = -\gamma x_o - \omega\, A sen(\phi) \tag{5.2}$$

conduzindo, depois de uma álgebra elementar, ao seguinte resultado para as constantes de integração:

$$A = x_o \left[1 + (\gamma/\omega)^2 \left[1 + \frac{v_o}{\gamma x_o} \right]^2 \right] \tag{6.1}$$

e

$$\phi = -\tan^{-1}\left[\frac{\gamma}{\omega} \left[1 + \frac{v_o}{\gamma x_o} \right] \right], \ -\frac{\pi}{2} < \phi < +\frac{\pi}{2}. \tag{6.2}$$

Deve-se observar que $A = x_o$ e $\phi = 0$ somente quando $v_o = -\gamma x_o$.

Os pontos de retorno da oscilação (máximos e mínimos) ocorrem quando a velocidade é nula. Os instantes correspondentes são obtidos da equação

$$\tan(\omega t_n + \phi) = -\gamma/\omega \tag{7}$$

e são dados por

$$t_n = \left[-\tan^{-1}(\gamma/\omega) - \phi \pm n\pi \right] / \omega, \ \text{n = 0, 1, 2, 3, ...} \tag{8}$$

Os pontos de retorno são obtidos pela substituição de (8) em (2):

$$x(t_n) = \pm A e^{-\gamma t_n} \cos\left[\tan^{-1}(\gamma/\omega)\right]. \tag{9}$$

A curva que passa pelos pontos de máximos e mínimos da curva de oscila-

ção

$$A(t) = \pm A e^{-\gamma t} \cos\left[\tan^{-1}(\gamma/\omega)\right] \quad (10)$$

é chamada de modulação da amplitude.

Nos instantes dados por

$$t_n^{'} = (-\phi \pm n\pi)/\omega \quad (11)$$

a curva

$$A'(t) = \pm\ A e^{-\gamma t} \quad (12)$$

tangencia a curva de oscilação do OHA. Esta curva é chamada de envoltória da curva de oscilação.

As curvas da oscilação, modulação da amplitude e envoltória, no caso em que $\gamma/\omega_o = 0,35$, com a condição inicial $v_o = 0$, estão ilustradas na Fig.1.

A modulação da amplitude e a envoltória interceptam a curva de oscilação em pontos diferentes. As diferenças de tempo entre os pontos de contato da envoltória com a curva de oscilação e os pontos vizinhos mais próximos de amplitude máxima são dados por

$$t_n^{'} - t_n = \tan^{-1}(\gamma/\omega)/\omega. \quad (13)$$

A energia mecânica do OHA é

$$E(t) = 1/2\, m\dot{x}^2 + 1/2\, m\omega_o^2\, x^2. \quad (14)$$

Substituindo (2) e (4) em (14), e efetuando um pouco de malabarismo algébrico, encontramos que

$$E(t) = 1/2\, m\omega_o^2 A^2 e^{-2\gamma t}\left[1 + (\gamma/\omega_o)^2 \cos[2(\omega t + \phi)] + \gamma/\omega_o\left[1 - (\gamma/\omega_o)^2\right]^{1/2} sen[2(\omega t + \phi)]\right]. \quad (15)$$

A Fig.2 ilustra as funções E(t), dada por (15), e $E^{'}(t) = E_0 \exp(-2\gamma t)$, no caso em que $\gamma/\omega_0 = 0{,}35$, com $v_0 = 0$; $E_0 = m\omega_0^2 A^2/2$. Na Ref. 7 consta uma discussão sobre a energia do OHA, e é apresentada uma curva de energia similar à curva sólida da Fig.2. (O autor deste livro-texto não confunde os conceitos de envoltória e modulação da amplitude.)

A taxa de dissipação da energia mecânica é dada por

$$\frac{dE(t)}{dt} = -2m\gamma\dot{x}^2, \quad (16)$$

i.e., o produto da força de atrito pela velocidade. A segunda derivada temporal da energia é

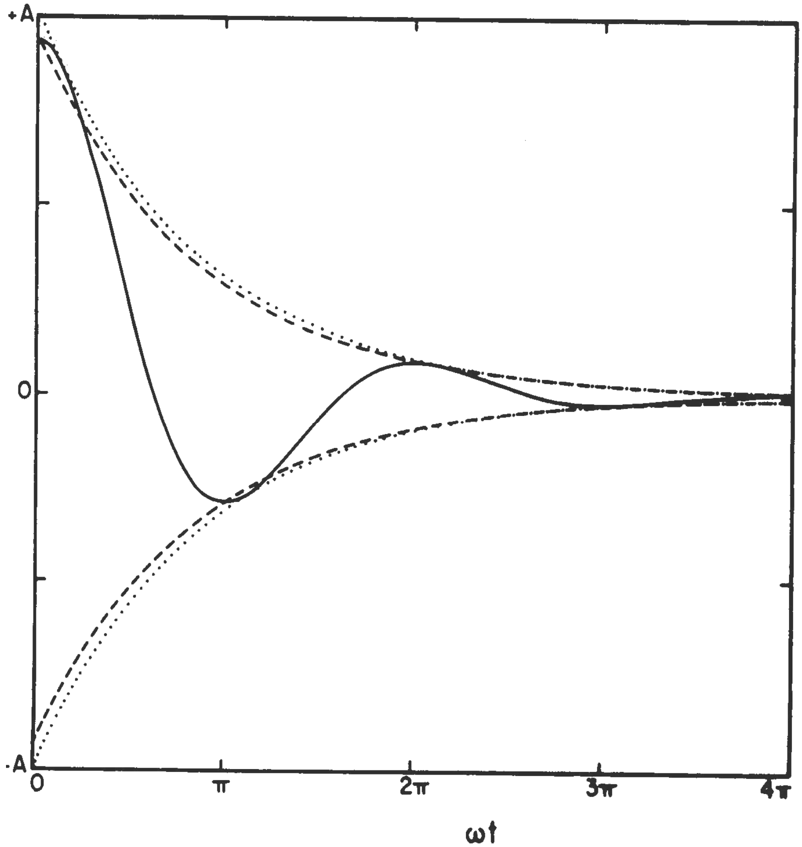

Fig.1- Movimento do oscilador harmônico amortecido para $\gamma / \omega_0 = 0{,}35$ *com a condição inicial* $v_0 = 0$ *. Curva sólida: oscilação. Curva tracejada: modulação da amplitude. Curva pontilhada: envoltória.*

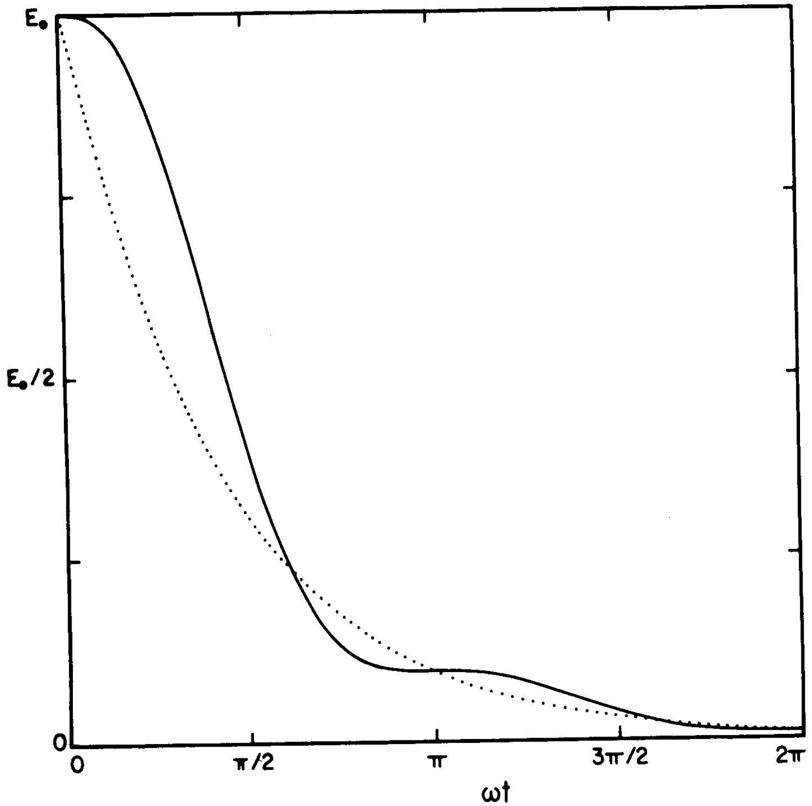

Fig.2- Energia mecânica do oscilador harmônico amortecido para $\gamma / \omega_0 = 0{,}35$ *com* $v_0 = 0$. *Curva sólida: energia mecânica. Curva pontilhada: assíntota fornecida pela simples exponencial temporal.*

$$\frac{d^2 E(t)}{dt^2} = -4m\gamma \dot{x}\ddot{x} \cdot \tag{17}$$

Os pontos com tangente horizontal da curva de energia são os pontos de retorno, cujos instantes correspondentes são dados por (8). De (17) concluímos que os pontos de retorno e os pontos de aceleração nula são os pontos de inflexão da curva de energia. Os instantes correspondentes aos pontos de aceleração nula são calculados pela equação

$$\tan\left(\omega t_n^* + \phi\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\omega}{\gamma} - \frac{\gamma}{\omega}\right]. \tag{18}$$

Usando (7) esta equação pode ser escrita como

$$\tan\left(\omega t_n^* + \phi\right) = -\cot an\left[2\left(\omega t_n + \phi\right)\right], \tag{19}$$

que tem como solução

$$t_n^* = \left[-2\tan^{-1}\left(\gamma/\omega\right) - \phi \pm \left(n + 1/2\right)\pi\right]/\,\omega\,. \tag{20}$$

O intervalo de tempo entre dois pontos sucessivos de inflexão da curva de energia é

$$t_n - t_n^* = \left[\tan^{-1}\left(\gamma/\omega\right) + \pi/2\right]/\,\omega\,. \tag{21}$$

Freqüentemente os estudantes são conduzidos a impor as condições A = x_0 e v_0 = 0. Talvez este impulso seja devido à idéia propagada por alguns autores de livros-texto que a curva descrita por (12) é a modulação da amplitude do OHA. Modulação da amplitude e envo1tória são conceitualmente e numericamente distintas. No caso limite $\gamma << \omega_0$ temos $\gamma/\omega \cong \gamma/\omega_0 \cong 0$, conseqüentemente estas duas curvas tendem ao mesmo limite. A energia do OHA, ao invés de ser representada por uma simples exponencial temporal, o é por uma curva com muitos pontos de inflexão, que tem a simples exponencia1 temporal como assíntota. A diferença entre a energia e a assíntota não mantém o mesmo sinal em todos os instantes, ao invés disto, a energia oscila em torno da assíntota. No caso limite em que $\gamma << \omega_0$ estas duas curvas também tendem para o mesmo limite.

Agradecimento

Parte deste trabalho foi realizado no Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro, ao qual o autor gostaria de expressar sua gratidão.

Referências

1. ALONSO, M.; FINN, E. J. **Física.** São Paulo: Edgard Blücher, 1972. v. 1, p. 370.

2. FRENCH, A. P. **Vibrations and waves.** Cambridge: MIT, 1974. p. 62 (MIT Introductory Physics Series).

3. HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Física.** 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1983. v. 2, p. 26.

4. SYMON, K. R. **Mechanics.** Reading, Addison-Wesley, 1953. p. 44.

5. TIPLER, P. A. **Física.** Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1984. v. 1. p. 323.

6. CASTRO, A. S. Damped harmonic oscillator: a correction in some standard textbooks. **American Journal of Physics,** v. 54, p. 741, 1986.

7. MARION, J. B. **Classical dynamics of particles and systems.** 2. ed. New York: Academic, 1971. p. 101.