

# Efectos de la tensión superficial sobre la superficie libre de un fluido en un cilindro con rotación eje simétrica

ABRAHAM MEDINA OVANDO\*

## *Surface Tension Effects on the Free Surface of a Fluid Within a Cylinder Under Axisymmetric Rotation*

**Abstract.** *We study the steady-state shape of the free surface of a fluid confined within a very small circular cylinder, which rotates vertically. We also have considered low angular velocities, wet angle equal to  $\pi/2$  rad and takes into account surface tension in the balance of normal effort to the free surface. We show how the inclusion of the capillary effects produces important changes in the free surface shape.*

## Introducción

El estudio de la forma superficial que adquiere un fluido contenido en un cilindro circular vertical que rota bajo la acción de la gravedad, alrededor de su eje, es un problema clásico en mecánica de fluidos (Landau y Lifshitz, 1959; Troutman, 1983; White, 1994; Squire, 1956 y Kapoulitsas, 1997). En este caso, es sabido que la superficie estacionaria es un paraboloides de revolución aun para pequeños valores de la velocidad angular. Este comportamiento del fluido ha resultado ser muy útil, por ejemplo, en el diseño de concentradores solares, enfoques ópticos y acelerómetros (White, *op. cit.*; Squire, *op. cit.*).

No obstante, cuando el radio del cilindro circular es muy pequeño resulta necesario tomar en cuenta la influencia de la tensión superficial, pues este parámetro afecta, principalmente a estas escalas, la forma de cualquier sistema fluido con una frontera libre (Middleman, 1995). En efecto, la tensión superficial se origina cuando la energía potencial del sistema incluye la energía de interacción de cualesquiera dos interfases. La energía contenida en cada una de éstas es proporcional al área de la interfase, y el factor de proporcionalidad —que es una propiedad de los materiales que forman la interfase— se

conoce como tensión superficial. En nuestro sistema particular hay energía superficial en las interfases aire-fluido, aire-cilindro y fluido-cilindro. Si la energía de bulto del fluido es mayor que la de las interfases, los efectos de la tensión superficial estarán confinados en la vecindad de los puntos donde el aire, el fluido y el cilindro se encuentran. Muy cerca de estos puntos, las fuerzas superficiales dominan a las demás y determinan propiedades tales como el ángulo entre la interfase fluido-aire y la frontera sólida. De otra manera, si la energía de bulto es igual o mayor que las energías en la interfase, los efectos de la tensión superficial serán importantes a través de todo el fluido, lo que modifica la forma superficial y —por tanto— los niveles de energía potencial y las líneas de acción del campo gravitacional.

La influencia de la tensión superficial sobre la forma superficial ya ha sido analizada, de modo poco claro, al tomar en cuenta la condición de equilibrio mecánico, por medio de la ecuación de Young-Laplace (Ogorlec, 1995). Debido a las dificultades de los cálculos sólo se ha tratado hasta ahora el caso en el cual el ángulo de mojado (medido desde la superficie sólida a la tangente de la interfase, desde el interior del fluido) es igual a  $\pi/2$  rad. Aún así, esta situación produce superficies li-



\* Subdirección de Exploración y Producción, Instituto Mexicano del Petróleo. Eje Central Lázaro Cárdenas 152, C. P. 07730. México, D. F.  
Correo electrónico: amedina@inti.ciencias.unam.mx  
Este trabajo ha sido realizado con el apoyo del CONACYT bajo el proyecto número 405P-E9506. El autor agradece al Prof. César Treviño sus valiosas sugerencias respecto a algunos puntos de este trabajo.

bres con importantes desviaciones respecto a la forma paraboloides. Por otra parte, no es clara la introducción de presiones ficticias y tampoco se discute la importancia del marco de referencia en el tratamiento del problema. Con la finalidad de presentar una discusión cuidadosa de la existencia y forma de la superficie libre dividimos este artículo como sigue: en la sección I estudiamos el problema sin tensión superficial en el marco de referencia que gira con el fluido; en la II construimos y analizamos la superficie libre tomando en cuenta el sistema girando con el fluido y la tensión superficial. Finalmente, exponemos las principales conclusiones y limitaciones de este trabajo.

**I. Ecuaciones de la presión y de la superficie libre en un marco con rotación eje simétrica**

Es conveniente estudiar el problema estacionario de la rotación eje simétrica de un fluido incomprensible desde un marco de referencia no inercial  $(x^*, y^*, z^*)$  que gira con el cilindro a una velocidad angular  $\Omega$ , y cuya coordenada  $z^*$  coincide con el eje de simetría del cilindro y es paralelo al vector aceleración de la gravedad  $g$ . Asociado con este marco, escogemos el sistema de coordenadas cilíndricas  $(r^*, \theta^*, z^*)$ , donde el eje  $z^*$  del sistema cilíndrico coincide con el eje  $z^*$  del sistema cartesiano. En el sistema de referencia que rota con el cilindro, el fluido está en reposo; por tanto, la ecuación de balance de fuerza (por unidad de masa) para cualquier elemento de fluido es

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} = \mathbf{a}_p \text{ o } \nabla p = \rho [\mathbf{f} - \mathbf{a}_p] \tag{1}$$

donde  $\rho(x^*, y^*, z^*)$  es la densidad del fluido;  $p(x^*, y^*, z^*)$ , la presión;  $\mathbf{f}(x^*, y^*, z^*)$ , la fuerza total de cuerpo por unidad de masa actuando en el elemento de fluido, y  $\mathbf{a}_p$  es la aceleración del elemento de fluido relativa a un sistema inercial fijo  $(X^*, Y^*, Z^*)$ , respecto al cual se mueve el sistema no inercial (y el cilindro). Consideraremos de aquí en adelante que ambos marcos de referencia tienen su origen justo en el centro de la base inferior del cilindro.

Si  $p(x^*, y^*, z^*)$  es no nula, a partir de la ecuación (1) se satisface que

$$\nabla \times (\rho [\mathbf{f} - \mathbf{a}_p]) = 0 \tag{2}$$

en cualquier lugar del fluido. Si esta ecuación no se satisface, el fluido no puede estar en equilibrio en el sistema no inercial.

Si el fluido es homogéneo, entonces (en el sistema no inercial) en cualquier punto  $P(x^*, y^*, z^*)$  del fluido existirá una presión  $p(x^*, y^*, z^*)$  (que siempre puede ser supuesta positiva para que sea la presión del fluido), la cual es solución de (1). Por otro lado, para que el fluido tenga una superficie libre  $S_f$ , la función  $p(x^*, y^*, z^*)$  debe ser de la forma

$$p = \rho f(x^*, y^*, z^*) + c \tag{3}$$

donde  $c$  es una constante relacionada con la presión externa que actúa sobre el fluido y  $f$ , en el caso estacionario, es una función sólo de las coordenadas. Así, la ecuación de la superficie libre del fluido es

$$f(x^*, y^*, z^*) = c_1 \tag{4}$$

La constante  $c_1$  puede ser evaluada al igualar el volumen inicial con el volumen ocupado por la forma designada para la superficie  $S_f$  y las paredes del contenedor.

Si  $p$  no satisface la ecuación (3), pero sí obedece la ecuación (2), la solución para la ecuación (1) determina (si  $p = \text{constante}$ ) una superficie de presión constante.

Para el caso de rotación pura (es decir, sin traslación) y uniforme ( $\Omega = \text{constante}$ ), la aceleración  $\mathbf{a}_p$  del punto  $P(x^*, y^*, z^*)$  respecto al sistema inercial fijo  $(X^*, Y^*, Z^*)$  es

$$\mathbf{a}_p = \Omega \times (\Omega \times \mathbf{L}) = -\nabla \left( \frac{1}{2} \Omega^2 r^{*2} \right) = -\Omega^2 \mathbf{r}^* \tag{5}$$

donde  $\Omega = \Omega \mathbf{k}$  es el vector velocidad angular paralelo al eje  $z^*$  y  $\mathbf{L}$  es el vector de posición del punto  $P$  respecto al origen del sistema coordenado  $\mathbf{L} = x^* \mathbf{i} + y^* \mathbf{j} + z^* \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{r}^* = x^* \mathbf{i} + y^* \mathbf{j}$  y  $r^{*2} = \mathbf{r}^* \cdot \mathbf{r}^* = (x^{*2} + y^{*2})$ . Debido a lo anterior, la ecuación (2) asegura que

$$\nabla \times \mathbf{f} = 0 \tag{6}$$

Este resultado permite establecer que, en el caso más general, existe una función potencial  $V(x^*, y^*, z^*)$  en el espacio ocupado por el fluido, tal que

$$\mathbf{f} = -\nabla V \tag{7}$$

El cálculo de la presión en cualquier punto del fluido (en el sistema no inercial) es ahora directo. Si se multiplica internamente la ecuación (1) por  $d\mathbf{L}$  y se usan las ecuaciones (5) y (7), encontramos que

$$\nabla p \cdot d\mathbf{L} = -\rho [\nabla V - \Omega^2 \mathbf{r}^*] \cdot d\mathbf{L} \tag{8}$$

Esto conduce a que la presión en cualquier punto del fluido en el sistema no inercial tenga la forma

$$p(x^*, y^*, z^*) = -\rho \left[ V(x^*, y^*, z^*) - V(0, 0, 0) - \frac{1}{2} \Omega^2 r^{*2} \right] + p(0, 0, 0) \tag{9}$$

Para calcular la superficie libre vemos que de acuerdo con la ecuación (9), si  $V = -\Phi(x^*, y^*, z^*)$ , el campo de presión es simplemente

$$p(x^*, y^*, z^*) = \rho \Phi(x^*, y^*, z^*) + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^{*2} + c \tag{10}$$

esto permite la formulación de la superficie libre de la forma (3), es decir,

$$\Phi(x^*, y^*, z^*) + \frac{1}{2} \Omega^2 r^{*2} = c_1 \tag{11}$$

Es claro que para la rotación del fluido contenido en un cilindro circular de radio  $R$ , bajo la acción de la aceleración de la gravedad ( $g$ ), se satisface que

$$V(x^*, y^*, z^*) = gz^* \tag{12}$$

por tanto,

$$p(x^*, y^*, z^*) = -\rho g z^* + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^{*2} + c \quad (13)$$

donde  $c$  es una constante.

La ecuación de la superficie libre se calcula a partir de la ecuación (11), de donde obtenemos que

$$z = \frac{1}{2} \frac{\Omega^2 r^{*2}}{g} + c' \quad (14)$$

aquí  $c' = c/g$ . El valor de la constante en la ecuación de la superficie libre se encuentra a partir de la conservación del volumen inicial, que para un fluido contenido en un cilindro de radio  $R$  y que alcanza una altura  $h$  es

$$2\pi \int_0^R z^*(r^*) r^* dr^* = \pi R^2 h \quad (15)$$

Sin embargo, por ahora su valor no es importante.

## II. La superficie libre para un cilindro pequeño

Con el propósito de encontrar la deformación de la superficie libre bajo la acción de la tensión superficial vamos a mantenernos en el marco no inercial que gira con el fluido. También debemos recordar que las condiciones de frontera en la superficie libre, para un sistema con estas características (Middleman, *op. cit.*), son: a) La condición puramente cinemática que establece que el fluido no cruza la superficie libre. Debido a que estamos considerando sólo el caso estacionario, la superficie libre en el marco no inercial se mantiene fija en el espacio. Esto implica que la componente de la velocidad normal a la superficie libre es

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (16)$$

aquí  $\mathbf{v}$  es el campo de velocidad en la superficie libre, y  $\mathbf{n}$  el vector unitario normal a la superficie libre; b) las condiciones de frontera sobre el esfuerzo son más complicadas. Físicamente, una condición de frontera establece que (para el caso de la interfase aire-fluido y baja velocidad relativa) no hay esfuerzo cortante en la (dirección tangente a la) interfase. La otra condición de frontera establece que el esfuerzo normal a la interfase, dentro del fluido, debe ser balanceado por el esfuerzo normal debido a la tensión superficial, es decir

$$\sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = p_a - p = p_a + \rho g z^* - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^{*2} - c \quad (17)$$

donde  $\sigma$  es la tensión superficial del fluido;  $(1/R_1 + 1/R_2)$ , la curvatura media de la superficie;  $p_a$ , la presión atmosférica (considerada de ahora en adelante como nula), y  $p$  es la presión hidrostática obtenida en la sección anterior (ecuación (13)). La ecuación (17) es conocida como ecuación de Young-Laplace (*idem.*).

La ecuación diferencial para la curvatura media (Bronstein y Semendyayen, 1985), permite reescribir la ecuación (17) en la forma

$$\sigma \frac{\left[ \frac{d^2 z^*}{dr^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{dz^*}{dr^*} \left\{ 1 + \left( \frac{dz^*}{dr^*} \right)^2 \right\} \right]}{\left[ 1 + \left( \frac{dz^*}{dr^*} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = \rho g z^* - \frac{\rho \Omega^2}{2} r^{*2} - c \quad (18)$$

Por claridad en los cálculos, introducimos en la ecuación (18) un escalamiento en las coordenadas de la forma:  $r = r^*/R$ ,  $z = z^*/FR$ , donde  $F$  es el número de Froude, que se construye mediante el cociente de las fuerzas inerciales ( $\rho \Omega^2 R$ ) a las fuerzas gravitacionales ( $\rho g$ ) (Landau y Lifshitz, *op. cit.*); es decir,  $F = \Omega^2 R/g$ . Este escalamiento nos permite encontrar una ecuación diferencial adimensional del tipo

$$\frac{1}{Bo} \frac{\left[ \frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} \left\{ 1 + F^2 \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right\} \right]}{\left[ 1 + F^2 \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = z - \frac{r^2}{2} - c' \quad (19)$$

donde  $c'$  es ahora una constante adimensional, y  $Bo = \rho g R^2 / \sigma$  relaciona los parámetros del fluido (densidad y tensión superficial) con la gravedad y el radio del cilindro (Middleman, *op. cit.*). El problema planteado por la ecuación diferencial (19) es no lineal; su solución analítica válida para todo  $F$  y  $Bo$  hasta ahora no se conoce. Por tanto, de aquí en adelante limitaremos el problema a soluciones lineales, es decir, imponemos la condición

$$1) \gg F^2 \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \quad (20)$$

Físicamente, esta condición asegura que el problema se resuelve para pequeñas velocidades angulares (bajos  $F$ ) y leves cambios en la pendiente de la superficie libre (pequeños valores de  $dz/dr$ ). En tal caso, la ecuación diferencial (19) se transforma en

$$\frac{1}{Bo} \left[ \frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dz}{dr} \right] = z - \frac{r^2}{2} - c' \quad (21)$$

La solución adimensional de la superficie libre es:

$$z = \frac{1}{2} r^2 + 2 \frac{1}{Bo} - \frac{1}{Bo} MI_0(\sqrt{Bo} r) \quad (22)$$

La cantidad

$$M = \left( \int_0^1 r I_0(\sqrt{Bo} r) dr \right)^{-1} \quad (23)$$

se obtuvo al suponer la conservación del volumen de fluido (ecuación (15)), y  $I_0(\sqrt{Bo} r)$  es la función modificada de Bessel orden cero.

Comúnmente, el número de Bond puede relacionarse también con la constante capilar o longitud capilar  $a = \sqrt{\sigma / \rho g}$ , en la forma  $Bo = R^2/a^2$ . Por tanto, este número da una medida relativa de la longitud de la zona donde la tensión superficial supera a la gravedad. Así, el

caso  $Bo \rightarrow \infty$  ( $a \rightarrow 0$ ) implica que la influencia de la tensión superficial en la superficie libre (ecuación (22)) llega a ser nula. Lo contrario también es cierto: si  $Bo \rightarrow 0$  la zona de influencia de los efectos capilares es del orden de las dimensiones del sistema.

Para mostrar algunos aspectos importantes de los cálculos realizados previamente, graficamos la superficie libre tomando en cuenta un cilindro de radio  $R = 2.6$  cm (o radio adimensional  $R = 1$ ). Supondremos que este sistema fue llenado con mercurio y que rota a una velocidad angular muy baja, de manera que  $F \cong 0.1336$ . En este caso, la longitud capilar es  $a \cong 0.26/\sqrt{2}$ , el número de Bond es  $Bo = 200$  y  $M \cong 9.8848 \times 10^{-5}$ . Estos valores de  $Bo$  y  $M$  cumplen exactamente con el hecho de que el ángulo de mojado,  $\theta_w$ , es  $\theta_w = \pi/2$ .

En efecto, si evaluamos

$$\frac{dz}{dr} = 0 \text{ en } r = 1 \tag{24}$$

mediante la ecuación (22), encontramos que

$$\frac{\sqrt{Bo}}{M} = I_1(\sqrt{Bo}) \tag{25}$$

Esto da como resultado

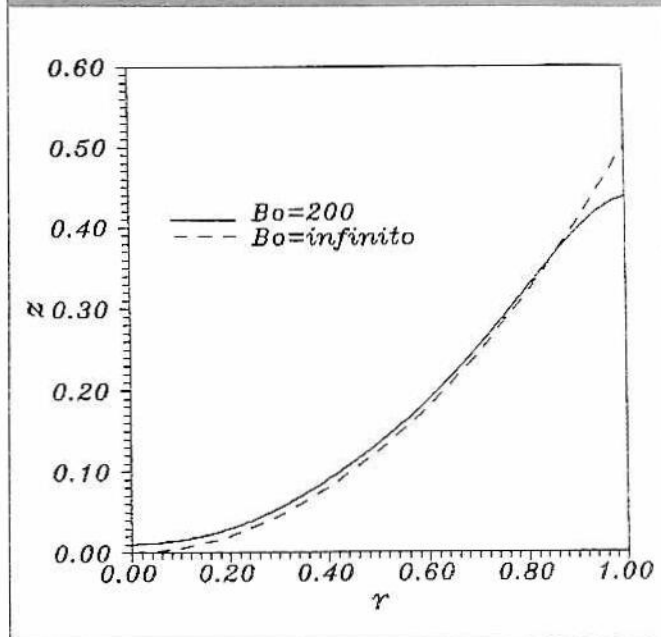
$$Bo = 200 \tag{26}$$

La gráfica (bidimensional) adimensional de la superficie libre (ecuación (22)) para los valores de  $Bo$ ,  $M$  y  $F$  se muestra en la figura 1. Obsérvese que también hemos graficado la superficie libre para el caso sin tensión superficial ( $Bo \rightarrow \infty$ ); aunque en la gráfica bidimensional se aprecian parábolas, las superficies libres son paraboloides. Un aspecto interesante de las superficies libres en las que la tensión superficial no es despreciable, es que la elevación en el centro es inversamente proporcional al número de Bond.

### Conclusiones

El cálculo de la superficie libre con y sin influencia de los efectos capilares es muy cómoda en el sistema no inercial. El aspecto más notorio en el cálculo de la superficie libre es que para cilindros pequeños hay una desviación importante de la nueva forma superficial, respecto al paraboloides de revolución, esto debido a la inclusión de la tensión superficial en la ecuación de balance de esfuerzo normal a la superficie libre. Esta desviación crece si  $R$  disminuye o si  $\sigma$  crece. Más aún, la ecuación de la superficie libre depende de los parámetros del material a través del número de Bond, lo cual no ocurre en el caso ideal ( $Bo \rightarrow \infty$ ); esto implica que la forma superficial depende del fluido y del medio material en el que está inmerso.

FIGURA 1. GRÁFICA ADIMENSIONAL DE LA SUPERFICIE LIBRE DE UN FLUIDO DENTRO DE UN CILINDRO CIRCULAR PEQUEÑO CON ROTACIÓN EJE SIMÉTRICA. LA CURVA CONTINUA CORRESPONDE AL CASO PARA EL CUAL  $Bo = 200$  Y LA CURVA A TRAZOS CORRESPONDE AL CASO SIN TENSIÓN SUPERFICIAL ( $Bo \rightarrow \infty$ ). EN AMBOS, EL NÚMERO DE FROUDE ES  $F = 0.1336$ .



Desde un punto de vista formal también es importante observar que el problema dado por la ecuación (19) tiene una singularidad esencial si  $Bo \rightarrow 0$ , pues el lado izquierdo de dicha ecuación queda indeterminado. De igual manera, si el límite impuesto por la desigualdad (20) no se mantiene, la búsqueda de una solución a la ecuación diferencial no lineal resultante es muy complicada. En ambos casos se requieren técnicas matemáticas especiales (como la teoría singular de perturbaciones y el análisis asintótico), que están fuera del alcance de este trabajo.

### BIBLIOGRAFÍA

Bronshstein, I. N. y Semendyayev, K. A. (1985). *Handbook of Mathematics*. Van Nostrand Reinhold Co., New York.

Kapoulitsas, G. M. (1997). *Acta Mechanica*, (122): 123.

Landau, L. D. y Lifshitz, I. M. (1959). *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, London.

Middleman, S. (1995). *Modeling Axisymmetrical Flows: Dynamics of Films, Jets, and Drops*. Academic-Press, San Diego.

Ogorlec, Z. (1995). *Eur. Jour. Phys.*, (16): 256.

Squire, H. B. (1956). "Rotating Fluids", en *Surveys in Mechanics*, editado por Batchelor, G. K. y Davies, R. M. Cambridge University Press, Londres.

Troutman, J. L. (1983). *Variational Calculus*. Springer-Verlag, New York.

White, F. M. (1994). *Fluid Mechanics*. McGraw Hill, New York.