Diferenciación de integrales definidas sobre conjuntos dependientes de un parámetro

José Luis Fernández-Chapou y Carlos Alejandro Vargas*

Differentiation of Defined Integrals About Depending Sets of a Parameter

Abstract. *Integrals that are dependent on a parameter, have been long used as mathematical tools to solve problems of fluid physics and electromagnetic theory. However, the introduction of derivation properties of these integrals in vector calculation and physics textbooks are overlooked or partially presented. This paper gives a detailed mathematical formalism and suggests the physical context of these integrals. So it provides a teaching strategy to show how problems are approached with a rigorous mathematical background. A series of theorems and lemmae with their demonstrations are included together with the Reynolds theorem and three physical applications.*

Introducción

En el estudio de la física de los fluidos y en el electromagnetismo frecuentemente hay que resolver problemas que involucran integrales cuyo integrando y región de integración son variables temporales. Así por ejemplo, en la física de los fluidos, la masa contenida en una región tridimensional se establece mediante una integral definida de la densidad del fluido sobre tal región, si el fluido se encuentra en movimiento entonces la región de integración puede depender del tiempo así como de la densidad de masa. La ley de conservación de la masa nos conduce a reconocer que la derivada con respecto al tiempo de aquella debe ser igual a cero, en este caso se trata con el problema de derivar con respecto al tiempo a una integral definida sobre una región variable en el tiempo. Asimismo al considerar la ecuación de balance de momentos también se enfrenta uno con el mismo problema de derivar una integral de volumen sobre un volumen que depende del tiempo. De lo anterior se llega al Teorema de Reynolds de la mecánica de fluidos. Aplicando este torema al principio de conservación de la masa y a la ecuación de balance de momentos, se obtienen la ecuación de continuidad y las ecuaciones de movimiento de Cauchy.

En electromagnetismo, por su parte, es posible encontrarse con integrales de superficie e integrales de línea. Por ejemplo, para la ley de inducción de Faraday se trata con una integral de superficie para definir el flujo magnético a través de una superficie. Este flujo puede depender del tiempo, y la ley de inducción de Faraday asegura que la derivada con respecto al tiempo del flujo magnético es igual en valor absoluto a la fuerza electromotriz (fem) generada a lo largo de la frontera de la superficie de integración. La variación de este flujo puede deberse a la variación temporal del campo magnético o bien a la variación temporal de la superficie de integración, o debida a ambas. Si el campo es estático pero la superficie es variable, entonces es posible demostrar usando la fuerza de Lorentz que si la frontera de la superficie se deforma en función del tiempo de tal manera que el flujo magnético sea variable, entonces se cumple la ley de inducción de Faraday. Sin embargo, si la frontera de la superficie está fija debido a que la divergencia del campo magnético es cero, el flujo magnético no cambia aún cuando la superficie en su conjunto se encuentre en movimiento.

En los textos tradicionales de varias variables o de cálculo vectorial, no tratan por lo general el problema de la derivación de integrales definidas sobre regiones o con-

* *Laboratorio de Sistemas Dinámicos, Departamento de Ciencias Básicas, UAM-A. Apartado Postal 13-499, C. P. 03501 México, D. F.*
Correo electrónico: cvargas@hp9000a1.uam.mx
Los autores agradecen ampliamente los comentarios y sugerencias que hicieron los árbitros anónimos. Carlos Alejandro Vargas dedica este trabajo a Anaid Adriana y a Carlos Alberto.

juntos que dependen del tiempo (o de un parámetro). Por otra parte en los textos de física donde presentan estos problemas, la obtención de las fórmulas correspondientes a la derivada de este tipo de integrales se hace con poco rigor desde el punto de vista matemático.

El propósito de este trabajo es justamente complementar el material que se presenta en los cursos de cálculo vectorial, proporcionando una obtención rigurosa desde el punto de vista matemático, pero sin excederse del nivel de un curso ordinario de cálculo vectorial dirigido a estudiantes de ciencias e ingeniería.

Para abordar el problema, se comenzó por definir rigurosamente lo que se entiende por una región (conjunto) de integración que depende continuamente de un parámetro, para esto se introdujo el concepto de "flujo paramétrico" definido por un campo vectorial, que es justamente la definición del concepto de líneas de campo que se ofrece en física. En la tercera sección se enuncian los teoremas correspondientes a la derivación de integrales definidas sobre conjuntos que dependen continuamente de un parámetro. Las demostraciones subsecuentes de estos teoremas se desarrollan una vez que se demuestran una serie de lemas auxiliares, para finalmente completar la demostración de una manera digamos "elegante" desde el punto de vista matemático. Por último en la cuarta sección a manera de ejemplo, se incluyen aplicaciones en física de los teoremas que aquí se demuestran.

I. Definiciones

Se considera el problema de la diferenciación de funciones reales de variable real tales como:

$$\phi(t) = \int_{C(t)} \vec{F}[t,\vec{r}(t)]\cdot d\vec{r} \ ,$$

$$\psi(t) = \int_{S(t)} \vec{G}[t,\vec{r}(t)]\cdot d\vec{s} \ ,$$

$$\xi(t) = \int_{D(t)} \rho[t,\vec{r}(t)]dV \ ,$$

donde $C(t) \subset \Re^3$, $S(t) \subset \Re^3$ son una curva y una superficie suaves y $D(t)$ es una región en $\Re^n$, las cuales dependen de un parámetro t. $\vec{F}$ y $\vec{G}$ son campos vectoriales definidos en $I \times C(t)$ e $I \times S(t)$ respectivamente, con $I \subset \Re$. Para comenzar es conveniente introducir las definiciones que permiten establecer aquello que se entiende por una curva, superficie o región, dependiente de un parámetro t.

Definición 1. Sea $\vec{\upsilon}$ un campo vectorial C^1 en $I \times D_n$, donde I es un intervalo y D_n es un subconjunto abierto de $\Re^n$. Las soluciones que se obtienen integrando el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}[t,\vec{r}(t)],$$

se llaman curvas integrales del campo vectorial $\vec{\upsilon}$.

El teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias asegura que por cada punto $\vec{r} \in D_n$ pasa una y sólo una curva integral del campo vectorial $\vec{\upsilon}$.

Sea $\vec{\phi}_t : D_n \to D_n$ una función definida como sigue:

Para cada punto fijo $\vec{r} \in D_n$, la función $\vec{\phi}_t = \vec{\phi}_t(\vec{r})$ con $t \in I$ ($\vec{\phi}_t : I \to D_n$) es una parametrización de la curva integral del campo vectorial $\vec{\upsilon}$ que pasa por $\vec{r}$. Además para cada $t \in I$ fija, el punto $\vec{\phi}_t(\vec{r})$ corresponde a un punto sobre la curva integral que pasa por $\vec{r}$ que se encuentra a una distancia $d(t)$ contada a partir de $\vec{r}$ y medida a lo largo de dicha curva integral. Si $t > 0$, la "traslación" del punto $\vec{r}$ al punto $\vec{\phi}_t(\vec{r})$ es en la dirección que señala el vector $\vec{\upsilon}(t, \vec{r})$ tangente a la curva en $\vec{r}$; si $t < 0$, la traslación es en la dirección contraria.

Las funciones $\vec{\phi}_t$ son de clase C^1, biyectivas y sus inversas son también de clase C^1 y satisfacen las relaciones siguientes:

$$\vec{\phi}_{t+s} = \vec{\phi}_s \circ \vec{\phi}_t = \vec{\phi}_t \circ \vec{\phi}_s \ ,$$

$$\phi_t^{-1} = \vec{\phi}_{-t} \ ,$$

$$\vec{\phi}_0 = \text{identidad}.$$

Definición 2. El "flujo" paramétrico generado por el campo vectorial $\vec{\upsilon}$ es el conjunto de funciones $\{\vec{\phi}_t\}$ donde $\vec{\phi}_t$ son las funciones definidas antes. Estas funciones desplazan a cada punto $\vec{r} \in D_n$ en $d(t)$ unidades a lo largo de la curva integral del campo vectorial $\vec{\upsilon}$ que pasa por $\vec{r}$.

Definición 3. Sea $\{\vec{\phi}_t\}$ el flujo generado por el campo vectorial $\vec{\upsilon}$ definido en $I \times D_n$ con $I \subset \Re$ un intervalo y D_n un conjunto abierto de $\Re^n$. Supóngase además que $B_0 \subset D_n$, de aquí se define al conjunto $B(t)$ como $B(t) = B(t) = \{\vec{r}\varepsilon D_n \,|\, \vec{r} = \phi_t(\vec{r}_0)$ para algún $r_0 \in B_0\}$ o equivalentemente que $B(t) = \vec{\phi}_t(B_0)$.

Así, si $C_0 \subset \Re^3$ y $S_0 \subset \Re^3$ son una curva y una superficie suave respectivamente, mismas que están contenidas en D_3 sobre el cual está definido el campo vectorial $\vec{\upsilon}$, entonces

$$C(t) = \{\vec{r} \in D_3 \,|\, \vec{r} = \vec{\phi}_t(\vec{r}_0) \text{ para algún } \vec{r}_0 \in C_0\} \equiv \vec{\phi}_t(C_0), \qquad (1)$$

$$S(t) = \{\vec{r} \in D_3 \,|\, \vec{r} = \vec{\phi}_t(\vec{r}_0) \text{ para algún}$$

$\vec{r}_0 \in S_0\} \equiv \vec{\phi}_t(S_0)$. (2)

Si $D_0 \subset D \subset \Re^n$ es una región contenida en el conjunto abierto D_n de $\Re^n$ donde está definido el campo vectorial $\vec{\upsilon}$, entonces es posible definir

$D(t) = \{\vec{r} \in D_n \mid \vec{r} = \vec{\phi}_t(\vec{r}_0)$ para algún

$\vec{r}_0 \in D_0\} \equiv \vec{\phi}_t(D_0)$. (3)

Las tres definiciones anteriores expresan que $C(t)$, $S(t)$ y $D(t)$ son el conjunto de los puntos que se obtienen al desplazar en $d(t)$ unidades a cada punto, $\vec{r}_0 \in C_0$, S_0 y D_0 respectivamente, a lo largo de la curva integral del campo vectorial $\vec{\upsilon}$ que pasa por $\vec{r}_0$.

En esta sección se han definido las curvas, superficies y regiones que dependen continuamente de un parámetro $t \in I$.

II. Propiedades de las Integrales

A continuación se presentan los enunciados y las demostraciones de una serie de teoremas y lemas fundamentales, de donde se siguen las propiedades de diferenciación de integrales definidas sobre conjuntos que dependen continuamente de un parámetro. El plan fue enunciar los dos teoremas cruciales para el problema que se pretende mostrar, a continuación se enuncian un teorema y un par de lemas (junto con sus demostraciones) que son necesarios para proceder a la realización de las demostraciones de los dos primeros teoremas.

Teorema I: Sea $\vec{\upsilon}$ un campo vectorial de clase C^1 definido en $I \times D_3$ donde $I \subset \Re$ y D_3 es un subconjunto abierto de $\Re^3$. Sea $\{\vec{\phi}_t\}$ el flujo generado por el campo vectorial $\vec{\upsilon}$ definido sobre D_3 de acuerdo a la ecuación (2). Considérense $C(t) \subset D_3$ y $S(t) \subset D_3$ una curva y una superficie suave, respectivamente, que dependen de t en la forma descrita en las ecuaciones (1) y (2). Supóngase que F y G son dos campos vectoriales de clase C^1 definidos en $I \times C(t)$ e $I \times S(t)$, respectivamente, entonces

$$\frac{d}{dt}\int_{C(t)} \vec{F}[t,\vec{r}(t)]\cdot d\vec{r} = \int_{C(t)}\left[\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} - \vec{\upsilon}\times(\nabla\times\vec{F}) + \nabla(\vec{\upsilon}\cdot\vec{F})\right]\cdot d\vec{r},$$

$$\frac{d}{dt}\int_{S(t)} \vec{G}[t,\vec{r}(t)]\cdot d\vec{s} = \int_{S(t)}\left[\frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + (\nabla\cdot\vec{G})\vec{\upsilon} - \nabla\times(\vec{\upsilon}\times\vec{G})\right]\cdot d\vec{r},$$

donde $\vec{A}\cdot\vec{B}$ y $\vec{A}\times\vec{B}$ son el producto interno y el producto vectorial de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ respectivamente.

Teorema II (Reynolds): Sea $\vec{\upsilon}$ un campo vectorial de clase C^1 definido en $I \times D_n$, donde $I \subset \Re$ y D_n es un subconjunto de $\Re^n$. Sea $\vec{\phi}_t$ el flujo generado por el campo vectorial $\vec{\upsilon}$ definido sobre D_n. Considérese $D(t) \subset D_n$ como una región que depende de t en la forma descrita en la ecuación (3). Supóngase que ρ es un campo escalar C^1 definido en $I \times D(t)$. Entonces

$$\frac{d}{dt}\int_{D(t)} \rho[t,\vec{r}(t)]dV = \int_{D(t)}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{\upsilon})\right]dV$$

Teorema III (diferenciación bajo el signo integral) (Apostol, 1957):

Sea $R = \{(\vec{x}, \vec{y}) \mid \vec{x} \in A, \vec{y} \in B; A \subset \Re^n$ y $B \subset \Re^m\} \equiv A \times B$, donde

A y B son conjuntos cerrados y acotados. Supóngase que para cada $\vec{y}$ fijo en B, la integral múltiple $\phi(\vec{y}) = \int_A f(\vec{x},\vec{y})d^n x$ existe. Si la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ es continua en R para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, la derivada $\frac{\partial \phi}{\partial y_i}$ existe para cada $\vec{y} \in B$ y viene dada por

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_i} = \int_A \frac{\partial f}{\partial y_i}(\vec{x},\vec{y})d^n x .$$

Para demostrar el teorema anterior se requiere del siguiente (*ibid.*).

Lema I: Sea f continua en cada punto $(\vec{x}, \vec{y}) \in R = A \times B$, con A y B subconjuntos cerrados y acotados de $\Re^n$ y $\Re^m$ respectivamente. Sea ϕ la función definida en B mediante

$$\phi(\vec{y}) = \int_A f(\vec{x},\vec{y})d^n x .$$

Entonces ϕ es continua en B. En otras palabras, si $\vec{y}_0 \in B$ se tiene

$$\lim_{\vec{y}\to\vec{y}_0}\int_A f(\vec{x},\vec{y})d^n x = \int_A \lim_{\vec{y}\to\vec{y}_0} f(\vec{x},\vec{y})d^n x = \int_A f(\vec{x},\vec{y}_0)d^n x \equiv \phi(\vec{y}_0).$$

Demostración:

Puesto que R es un conjunto cerrado y acotado, f es uniformemente continua en R. Dado $\epsilon > 0$, existe una $\delta(\epsilon)$ tal que para todo par de puntos $\vec{z} = (\vec{x}, \vec{y})$ y $\vec{z}' = (\vec{x}', \vec{y}')$ en R que cumplen la condición $|\vec{z} - \vec{z}'| < \delta$, se tiene $|f(\vec{z}) - f(\vec{z}')| < \epsilon$. Si $|\vec{y} - \vec{y}'| < \delta$, es

$$|\phi(\vec{y}) - \phi(\vec{y}')| \le \int_A |f(\vec{x},\vec{y}) - f(\vec{x}',\vec{y}')|d^n x < \varepsilon\int_A d^n x = \varepsilon \,\mathrm{Vol}(A)$$

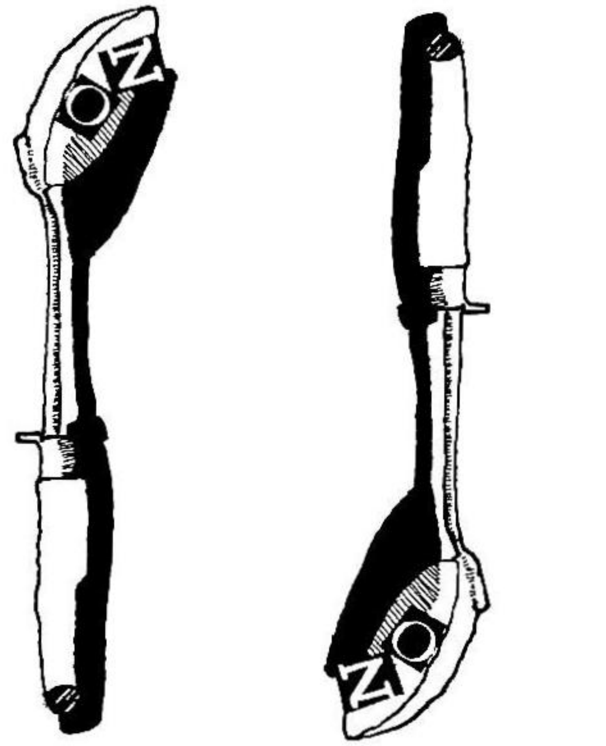
Esto establece la continuidad de ϕ en B.

Demostración del Teorema III:

Si $\vec{y}_0 = (y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_m) \in B$ e $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_i + h, \ldots, y_m) \in B$ con $h \neq 0$, se tiene

$$\frac{\phi(\vec{y}) - \phi(\vec{y}_0)}{h} = \int_A \frac{f(\vec{x},\vec{y}) - f(\vec{x},\vec{y}_0)}{h}d^n x = \int_A \frac{\partial}{\partial y_i}(\vec{x},\vec{\xi})d^n x,$$

donde $\vec{\xi} = y_1, \ldots, \xi, \ldots, y_m$ con ξ comprendido entre y_i e $y_i + h$ (¡teorema del valor medio!). Puesto que $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ es



continua, se demuestra el teorema haciendo $h \to 0$ y aplicando el Lema I.

Como se dijo al principio de esta sección, con el propósito de demostrar los Teoremas I y II, se requieren establecer los lemas siguientes:

Lema II: Sea $\vec{\upsilon}$ un campo vectorial definido en $I \times D$ con $I \subset \Re$ y D_3 un subconjunto abierto de $\Re^3$. Sean $C(t)$ y $S(t)$ una curva y una superficie suaves respectivamente (contenidas en D_3), las que dependen de t en la forma descrita en las ecuaciones (1) y (2). Supóngase que $\vec{T}(t)$ es un vector tangente a $C(t)$ en cada punto y sea $\vec{N}(t)$ un vector normal a $S(t)$ en cada punto. Entonces

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = (\vec{T} \cdot \nabla) \cdot \vec{\upsilon} = \vec{T} \cdot (\nabla \vec{\upsilon})$$

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = (\nabla \cdot \vec{\upsilon})\, \vec{N} - (\nabla \vec{\upsilon}) \cdot \vec{N}\,.$$

Demostración:

i) Sea $\vec{r} = \vec{\sigma}(t,\theta)$ con $\theta \in [a,b]$ una parametrización de $C(t)$. Entonces (Marsden y Tromba, 1991)

$\vec{T}(t) = \frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial \theta}$ es un vector tangente a $C(t)$ en cada punto, así

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t \partial \theta} = \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \cdot \nabla\right)\vec{\upsilon} = (\vec{T} \cdot \nabla)\vec{\upsilon} = \vec{T} \cdot (\nabla \vec{\upsilon})\,.$$

ii) Sea $\vec{r} = \vec{\Phi}(t, \alpha, \beta)$ con $(\alpha, \beta) \in D \subset \Re^2$, una parametrización de la superficie, entonces (*ibid.*)

$$\vec{N}(t) = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}\right)(t) = \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(\alpha,\beta)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(\alpha,\beta)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)}\right]$$

$$\equiv (N_1, N_2, N_3) \qquad (4)$$

es un vector normal a $S(t)$ en cada punto. Ahora

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t \partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t \partial \beta} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}$$

$$= \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} - \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial \beta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}$$

Usando la regla de la cadena y ordenando términos se obtiene

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial x} \times \left(0, \frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)}, -\frac{\partial(z,x)}{\partial(\alpha,\beta)}\right) + \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial y} \times \left(-\frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)}, 0, \frac{\partial(y,z)}{\partial(\alpha,\beta)}\right)$$
$$+ \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial z} \times \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(\alpha,\beta)}, -\frac{\partial(y,z)}{\partial(\alpha,\beta)}, 0\right)$$

separando en componentes a $\vec{\upsilon}$ y empleando la ecuación (4) se obtiene

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x}, \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x}, \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x}\right) \times (0, N_3, -N_2) + \left(\frac{\partial \upsilon_1}{\partial y}, \frac{\partial \upsilon_2}{\partial y}, \frac{\partial \upsilon_3}{\partial y}\right) \times (-N_3, 0, N_1)$$
$$+ \left(\frac{\partial \upsilon_1}{\partial z}, \frac{\partial \upsilon_2}{\partial z}, \frac{\partial \upsilon_3}{\partial z}\right) \times (N_2, -N_1, 0)$$
$$= \left[\left(\frac{\partial \upsilon_2}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_3}{\partial z}\right)N_1 - \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x}N_2 - \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x}N_3, \left(\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_3}{\partial z}\right)N_2 - \frac{\partial \upsilon_1}{\partial y}N_1\right.$$
$$\left. - \frac{\partial \upsilon_3}{\partial y}N_3, \left(\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_2}{\partial y}\right)N_3 - \frac{\partial \upsilon_1}{\partial z}N_1 - \frac{\partial \upsilon_2}{\partial z}N_2\right]$$
$$= \left[(\nabla \cdot \vec{\upsilon})N_1 - \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial x} \cdot \vec{N}, (\nabla \cdot \vec{\upsilon})N_2 - \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial y} \cdot \vec{N}, (\nabla \cdot \vec{\upsilon})N_3 - \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial z} \cdot \vec{N}\right]$$
$$= (\nabla \cdot \vec{\upsilon})\vec{N} - (\nabla \vec{\upsilon}) \cdot \vec{N}\,.$$

Con lo cual queda demostrado el Lema II.

Lema III: Sea $\vec{\upsilon}$ un campo vectorial definido en $I \times D_n$ con $I \subset \Re$ y D_n un conjunto abierto de $\Re^n$. Sea $D(t)$ una región, contenida en D_n, que depende de un parámetro t en la forma definida en la ecuación (3). Sea F: $I \times D \to D(t)$ una transformación definida como $F(t, \vec{\xi}_0) = \vec{\phi}_t(\vec{\xi})$ donde $\vec{\xi}_0 \in D_0$. Entonces $\frac{\partial J}{\partial t} = (\nabla \cdot \vec{\upsilon})J$ donde $J = \frac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(\xi_1,\ldots,\xi_n)}$ es el jacobiano (Apostol, *op. cit.*) de la transformación F para cada $t \in I$ fija.

Demostración:

Para hacer la demostración se desarrolla el determinante jacobiano en cofactores con respecto al k-ésimo renglón con lo que se tiene

$$J = C_{k1}j_{1k} + \ldots + C_{ki}j_{ik} + \ldots + C_{kn}j_{nk}, \qquad (5)$$

donde C_{kl} es el cofactor del elemento $j_{kl} = \frac{\partial x_l}{\partial \xi_k}$, pero ningún cofactor C_{ks} contiene al elemento j_{ik}, entonces de la ecuación (5) se sigue que

$$\frac{\partial J}{\partial j_{ik}} = C_{ki} \qquad (6)$$

Usando la regla de la cadena, se tiene

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial j_{ik}} \frac{\partial j_{ik}}{\partial t}, \qquad (7)$$

pero por hipótesis ξ_k no depende de t, $\forall k = 1, \ldots, n$, entonces

$$\frac{\partial j_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial \xi_k} = \frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial \upsilon_i}{\partial \xi_k} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial \xi_k} = \sum_{l=1}^{n} j_{lk}\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_l}, \qquad (8)$$

ya que $\upsilon_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}$ (nótese que en el penúltimo miembro se usó la regla de la cadena); sustituyendo las ecuaciones (6) y (8) en (7) se obtiene

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} C_{ki}\, j_{lk} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_l}. \qquad (9)$$

Considérese ahora la sumatoria

$$\sum_{k=1}^{n} C_{ki}\, j_{lk} = C_{1i}\, j_{l1} + \ldots + C_{ni}\, j_{ln}. \qquad (10)$$

Si $i = l$ entonces la ecuación (10) corresponde al desarrollo del determinante jacobiano en cofactores con respecto a la i-ésima columna y por lo tanto es igual a J. Si $i \neq l$ entonces la ecuación (10) corresponde en este caso al desarrollo en cofactores con respecto a la i-ésima columna del determinante jacobiano con la i-ésima columna igual a la l-ésima columna y por lo tanto es igual a cero. De donde

$$\sum_{k=1}^{n} C_{ki}\, j_{lk} = \begin{cases} J, & \text{si } i = l; \\ 0, & \text{si } i \neq l, \end{cases}$$

e introduciendo el símbolo

$$\delta_{il} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = l; \\ 0, & \text{si } i \neq l, \end{cases}$$

se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} C_{ki}\, j_{kl} = J\delta_{il}. \qquad (11)$$

Sustituyendo la ecuación (11) en (9) se obtiene

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} C_{ki}\, j_{lk} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_l} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} J\delta_{il} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_l} \qquad (12)$$

pero

$$\sum_{l=1}^{n} \delta_{il} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_l} = \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_i}, \qquad (13)$$

ya que $\delta_i^l = 0$, $\forall l \neq i$ y $\delta_i^i = 1$. Sustituyendo la ecuación (13) en (12) se obtiene

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} J \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_i} = J\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_i} = J(\nabla \cdot \vec{\upsilon})$$

Queda demostrado así este Lema.

Con los lemas ya establecidos se procede a continuación a demostrar el Teorema I.

Demostración:

i) Sea $\vec{r} = \vec{\sigma}\ (t, \theta)$ con $\theta \in [a, b]$ una parametrización de la curva $C(t)$, entonces, de la definición de integral de línea (Apostol, *op. cit.*; Marsden y Tromba, *op. cit.* y Spivak, 1972) se tiene

$$\frac{d}{dt}\int_{C(t)} \vec{F}[t, \vec{r}(t)] \cdot d\vec{r} = \frac{d}{dt}\int_a^b \left[(\vec{F} \circ \sigma)(t,\theta)\right] \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\int_a^b \left[(\vec{F} \circ \vec{\sigma})(t,\theta)\right] \cdot \vec{T}(t,\theta)\, d\theta, \qquad (14)$$

donde $(\vec{F} \circ \vec{\sigma})(t, \theta) \equiv \vec{F}[t, \vec{\sigma}\ (t, \theta)]$. Como ahora el integrando depende solamente de t y θ, pero θ a su vez no depende de t, entonces es posible aplicar el Teorema III y obtener

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \left[(\vec{F} \circ \vec{\sigma})(t,\theta)\right] \cdot \vec{T}(t,\theta)\, d\theta = \int_a^b \frac{\partial\left[(\vec{F} \circ \vec{\sigma}) \cdot \vec{T}\right]}{\partial t}(t,\theta)\, d\theta$$

$$= \int_a^b \frac{\partial(\vec{F} \circ \vec{\sigma})}{\partial t} \cdot \vec{T} + (\vec{F} \circ \vec{\sigma}) \cdot \frac{\partial \vec{T}}{\partial t}\,]d\theta, \qquad (15)$$

al hacer uso de la regla de la cadena se tiene

$$\frac{(\partial \vec{F} \circ \vec{\sigma})}{\partial t} \cdot \vec{T} = \left[\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \circ \vec{\sigma} + \left(\left.\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}\right|_{\vec{\sigma}} \frac{\partial x}{\partial t} + \left.\frac{\partial \vec{F}}{\partial y}\right|_{\vec{\sigma}} \frac{\partial y}{\partial t} + \left.\frac{\partial \vec{F}}{\partial z}\right|_{\vec{\sigma}} \frac{\partial z}{\partial t}\right)\right] \cdot T$$

$$= \left\{\left[\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + (\vec{\upsilon} \cdot \nabla)\vec{F}\right] \circ \vec{\sigma}\right\} \cdot \vec{T} \qquad (16)$$

debido a que $\vec{\upsilon} = \dfrac{\partial \vec{r}(t, \theta)}{\partial t}$. Ahora valiéndose del Lema II se obtiene

$$(\vec{F} \circ \vec{\sigma}) \cdot \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} = (\vec{F} \circ \vec{\sigma}) \cdot [\vec{T} \cdot (\nabla \vec{\upsilon})] = [\vec{T} \cdot (\nabla \vec{\upsilon})] \cdot (\vec{F} \circ \vec{\sigma}) = \vec{T} \cdot [(\nabla \vec{\upsilon}) \cdot (\vec{F} \circ \vec{\sigma})]$$

$$= [(\nabla \vec{\upsilon}) \cdot (\vec{F} \circ \vec{\sigma})] \cdot \vec{T} = \{[(\vec{F} \cdot \nabla)\vec{\upsilon} + \vec{F} \times (\nabla \times \vec{\upsilon})] \circ \vec{\sigma}\} \cdot T \qquad (17)$$

en este último paso se ha utilizado la identidad vectorial (Clemmow, 1973)

$$(\nabla \vec{A}) \cdot (\vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}).$$

Si se sustituye (16) y (17) en (15), se obtiene

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \left[(\vec{F} \circ \vec{\sigma})(t,\theta)\right] \cdot \vec{T}(t,\theta)\, d\theta = \int_a^b \left\{\left[\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + (\vec{\upsilon} \cdot \nabla)\vec{F} + (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{\upsilon} + \vec{F} \times (\nabla \times \vec{\upsilon})\right] \circ \vec{\sigma}\right\} \cdot \vec{T} d\theta$$

$$= \int_{c(t)} \left[\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + (\vec{\upsilon} \cdot \nabla)\vec{F} + (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{\upsilon} + \vec{F} \times (\nabla \times \vec{\upsilon})\right] \cdot d\vec{r}$$

invocando la identidad vectorial (*ibid.*)

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A})$$

se consigue

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \left[(\vec{F} \circ \vec{\sigma})(t,\theta)\right] \cdot \vec{T}(t,\theta)\, d\theta = \int_{c(t)} \left[\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} - \vec{\upsilon} \times (\nabla \times \vec{F}) + \nabla(\vec{\upsilon} \cdot \vec{F})\right] \cdot d\vec{r}.$$

Al sustituir en la ecuación (14) se concluye que

$$\frac{d}{dt}\int_{(t)}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{(t)}\left[\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{F}) + \nabla(\vec{v}\cdot\vec{F})\right]\cdot d\vec{r}.$$

ii) Sea $\vec{r} = \vec{\Phi}(t,\alpha,\beta)$ con $(\alpha,\beta)\in A\subset\Re^2$ una parametrización de la superficie suave $S(t)$. Entonces de la definición de integral sobre una superficie de una campo vectorial $\vec{G}$ (Apostol, 1957; Marsden y Tromba, 1991; Spivak, 1972), se tiene

$$\frac{d}{dt}\int_{S(t)}\vec{G}\cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt}\iint_A\left[(\vec{G}\circ\vec{\Phi})(t,\alpha,\beta)\right]\cdot\vec{N}(t,\alpha,\beta)d\alpha d\beta, \quad (18)$$

donde $(\vec{G}\circ\vec{\Phi})(t,\alpha,\beta) = \vec{G}[t,\vec{\Phi}(t,\alpha,\beta)]$. Como ahora el integrando depende solamente de t, α, β y además α y β no dependen de t, es posible aplicar el Teorema III:

$$\frac{d}{dt}\int_A\left[(\vec{G}\circ\vec{\Phi})(t,\alpha,\beta)\right]\cdot\vec{N}(t,\alpha,\beta)d\alpha d\beta = \int_A\frac{\partial\left[(\vec{G}\circ\vec{\Phi})\cdot\vec{N}\right]}{\partial t}(t,\alpha,\beta)d\alpha d\beta$$
$$= \int_A\left[\frac{\partial(\vec{G}\circ\vec{\Phi})}{\partial t}\cdot\vec{N} + (\vec{G}\circ\vec{\Phi})\cdot\frac{\partial\vec{N}}{\partial t}\right](t,\alpha,\beta)d\alpha d\beta, \quad (19)$$

De la regla de la cadena se tiene

$$\vec{N}\cdot\left[\frac{\partial(\vec{G}\circ\vec{\Phi})}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial\vec{G}}{\partial t}\circ\vec{\Phi} + \left.\frac{\partial\vec{G}}{\partial x}\right|_{\vec{\Phi}}\frac{\partial x}{\partial t} + \left.\frac{\partial\vec{G}}{\partial y}\right|_{\vec{\Phi}}\frac{\partial y}{\partial t} + \left.\frac{\partial\vec{G}}{\partial z}\right|_{\vec{\Phi}}\frac{\partial z}{\partial t}\right]\cdot\vec{N}$$
$$= \left\{\left[\frac{\partial\vec{G}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{G}\right]\circ\vec{\Phi}\right\}\cdot\vec{N} \quad (20)$$

ahora de acuerdo con el Lema II, se sigue:

$$(\vec{G}\circ\Phi)\cdot\frac{\partial\vec{N}}{\partial t} = (\vec{G}\circ\vec{\Phi})\cdot[(\nabla\cdot\vec{v})\vec{N} - (\nabla\vec{v})\cdot\vec{N}]$$
$$= \{[(\nabla\cdot\vec{v})\vec{G} - \vec{G}\cdot(\nabla\vec{v})]\circ\vec{\Phi}\}\cdot\vec{N}$$
$$= \{[(\nabla\cdot\vec{v})\vec{G} - (\vec{G}\cdot\nabla)\vec{v}]\circ\vec{\Phi}\}\cdot\vec{N}, \quad (21)$$

donde se ha empleado la identidad vectorial $\vec{G}\cdot(\nabla\vec{v}) = (\vec{G}\cdot\nabla)\vec{v}$.

Sustituyendo las ecuaciones (20) y (21) en (19) se obtiene

$$\int_A\left[(\vec{G}\circ\vec{\Phi})(t,\alpha,\beta)\right]\cdot\vec{N}(t,\alpha,\beta)d\alpha d\beta =$$
$$= \int_A\left\{\left[\frac{\partial\vec{G}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{G} + (\nabla\cdot\vec{v})\vec{G} - (\vec{G}\cdot\nabla)\vec{v}\right]\circ\vec{\Phi}(t,\alpha,\beta)\right\}\cdot\vec{N}(t,\alpha,\beta)d\alpha d\beta.$$

De la identidad vectorial (Clemmow, *op. cit.*),

$$\nabla\times(\vec{B}\times\vec{A}) = \vec{B}(\nabla\cdot\vec{A}) - \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B}) + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} - (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$$

se sigue

$$\frac{d}{dt}\int_D\left[(\vec{G}\circ\vec{\Phi})(t,\alpha,\beta)\right]\cdot\vec{N}(t,\alpha,\beta)d\alpha d\beta =$$
$$= \int_D\left\{\left[\frac{\partial\vec{G}}{\partial t} + (\nabla\cdot\vec{G})\right]\circ\vec{\Phi}(t,\alpha,\beta)\right\}\cdot\vec{N}(t,\alpha,\beta)d\alpha d\beta$$
$$= \int_{S(t)}\left[\frac{\partial\vec{G}}{\partial t} + (\nabla\cdot\vec{G})\vec{v} - \nabla\times(\vec{v}\times\vec{G})\right]\cdot d\vec{s}.$$

sustituyendo en la ecuación (18) se concluye que

$$\frac{d}{dt}\int_{S(t)}\vec{G}\cdot d\vec{s} = \int_{S(t)}\left[\frac{\partial\vec{G}}{\partial t} + (\nabla\cdot\vec{G})\vec{v} - \nabla\times(\vec{v}\times\vec{G})\right]\cdot d\vec{s}.$$

Lo que demuestra el teorema.

Con los elementos desarrollados en las subsecciones anteriores, es posible hacer la demostración del Teorema II de Reynolds:

Sea $F: I\times D_0 \to D(t)$ una transformación entre la región D_0 y la región $D(t)$ para toda t fija definida como $F(t,\vec{\xi}) = \vec{\phi}_t(\vec{\xi})$ con $\vec{\xi}\in D_0$. Del teorema de cambio de variable en integrales múltiples se obtiene

$$\frac{d}{dt}\int_{D(t)}\rho dV = \frac{d}{dt}\int_{D_0}\rho[t,F(t,\vec{\xi})]J(t,\vec{\xi})dV_0\,, \quad (22)$$

ahora se puede aplicar el Teorema III, porque D_0 es fijo. Así se tiene

$$\frac{d}{dt}\int_{D_0}\rho[t,F(t,\vec{\xi})]J(t,\vec{\xi})dV_0 = \int_{D_0}\frac{\partial[(\rho\circ F)(t,\vec{\xi})J(t,\vec{\xi})]}{\partial t}dV_0$$
$$= \int_{D_0}\left\{\left[\frac{\partial(\rho\circ F)(t,\vec{\xi})}{\partial t}\right]J\right.$$
$$\left. + \rho\circ F(t,\vec{\xi})\frac{\partial J}{\partial t}\right\}dV_0, \quad (23)$$

por la regla de la cadena

$$\frac{\partial(\rho\circ F)(t,\vec{\xi})}{\partial t}J = \left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\circ F(t,\vec{\xi}) + \sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right|_F\frac{\partial x_i}{\partial t}\right]J$$
$$= \left\{\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\rho\right]\circ F(t,\vec{\xi})\right\}J, \quad (24)$$

debido a que $\frac{\partial x_i}{\partial t} = v_i$. Luego del Lema III se tiene que

$$[\rho\circ F(t,\vec{\xi})]\frac{\partial J}{\partial t} = [\rho\circ F(t,\vec{\xi})](\nabla\cdot\vec{v})J\,, \quad (25)$$

y sustituyendo las ecuaciones (24) y (25) en (23), se obtiene

$$\frac{d}{dt}\int_{D_0}\rho[t,F(t,\vec{\xi})]J(t,\vec{\xi})dV_0 = \int_{D_0}\left\{\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\rho + \rho(\nabla\cdot\vec{v})\right]\circ F(t,\vec{\xi})\right\}JdV_0$$
$$= \int_{D(t)}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\rho + \rho(\nabla\cdot\vec{v})\right]dV, \quad (26)$$

para llegar a este último término se aplicó el teorema del cambio de variable. Ahora, usando la identidad (*ibid.*) $\nabla\cdot(\Psi\vec{A}) = \vec{A}\cdot\nabla\Psi + \Psi\nabla\cdot\vec{A}$ (con Ψ una función escalar y $\vec{A}$ un vector), en la ecuación (26) y sustituyendo el resultado en la ecuación (19) se concluye que

$$\frac{d}{dt}\int_{D(t)}\rho dV = \int_{D(t)}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v})\right]dV.$$

De esta manera queda demostrado el Teorema de Reynolds.

III. Aplicaciones

A manera de ejemplo se presentan a continuación tres aplicaciones en las que es fácil reconocer la utilidad de los argumentos matemáticos presentados en las secciones anteriores.

a) En electromagnetismo se definen integrales como las siguientes (Clemmow, *op. cit.*; Paul y Nasar, 1987; Tamm, 1979):

$$\varepsilon = \int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$
$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}, \qquad (27)$$

donde ε representa la fuerza electromotriz (fem) que produce el campo $\vec{E}$ a lo largo del contorno cerrado ∂S de S y Φ_B el flujo del campo magnético $\vec{B}$ a través de la superficie S.

La ley de inducción de Faraday (*ibid.*) establece que

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\Phi_B, \qquad (28)$$

y si S es una superficie que depende del tiempo, de la forma explícita como se ha planteado a lo largo de este trabajo, entonces de acuerdo con el Teorema I y las ecuaciones (27), se tiene que

$$\int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{S(t)} \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{B})\vec{v} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \right] \cdot d\vec{a}. \qquad (29)$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación (29) es cero pues $(\nabla \cdot \vec{B}) = 0$ debido a que no existen monopolos magnéticos (*ibid.*). A la integral del tercer término del lado derecho de (29) es posible aplicarle el teorema de Stokes (Apostol, *op. cit.*; Marsden y Tromba, *op. cit.*; Spivak, *op. cit.*) de tal manera que la ecuación (29) se puede escribir como

$$\int_{\partial S(t)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{S(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a} + \int_{\partial S(t)} \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{r}. \qquad (30)$$

Esta expresión permite reconocer que la fem inducida sobre $\partial S(t)$ se produce por la variación de Φ_B debido a la variación de $\vec{B}$ con el tiempo y por el movimiento del contorno $\partial S(t)$ de S a través de $\vec{B}$. Es de notarse que por ser $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, la fem inducida no depende de la variación con el tiempo de S. Si $\partial S(t)$ es fija, entonces $\vec{v} = 0$ y de acuerdo con la ecuación (30),

$$\varepsilon = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

para cualquier superficie S que tenga como contorno a la curva cerrada ∂S. Si $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, entonces la relación $\varepsilon = +\int_{\partial S(t)} \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{a}$ es consecuencia de la fuerza de Lorentz.

b) Dada una distribución de masa (carga eléctrica) ρ (Malven, 1969 y White, 1991), la cantidad de masa (carga) contenida dentro de un volumen V viene dada por

$$\int_V \rho dV,$$

pero el principio de conservación de la masa (carga) establece que

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = 0,$$

por lo que aplicando el Teorema II, se tiene que

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV = 0, \qquad (31)$$

o bien, aplicando el Teorema de Gauss (Apostol, *op. cit.*; Marsden y Tromba, *op. cit.*; Spivak, *op. cit.*) a la integral del segundo término se tiene que

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot d\vec{a}, \qquad (32)$$

donde ∂V es una superficie cerrada que contiene al volumen V. La ecuación (31) es válida para todo V, por lo tanto se tiene que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0, \qquad (33)$$

donde $\vec{J} = \rho \vec{v}$ representa la densidad de flujo de materia (carga). La ecuación (32) indica que el aumento o disminución de materia (carga) a través de la frontera ∂V del volumen V. Mientras que la ecuación (33) es la diferencial de continuidad que expresa la ley de conservación *local* de la masa (carga).

c) Como en el ejemplo anterior, ahora se considera una distribución de masa ρ. La Cantidad de movimiento o momento de un volumen de fluido V viene dado por (Malven, *op. cit.* y White, *op. cit.*)

$$\int_V \rho \vec{u} dV,$$

de acuerdo con la segunda ley de Newton, en mecánica de fluidos o medios continuos se establece la ecuación de balance de momentos como sigue:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \vec{u} dV = \vec{F}, \qquad (34)$$

donde $\vec{F}$ denota las fuerzas que actúan en el volumen de fluido V. aplicando el Teorema II a cada componente cartesiana de esta ecuación vectorial, se tiene que

$$\int_V \left(\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_i \vec{v}) \right) dV = F_i,$$

aplicando la regla de derivación, para el producto de dos funciones, al primer término y la identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\phi \vec{A}) = \phi \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla \phi,$$

al segundo término del integrando, respectivamente, se obtiene

$$\int_V \left[\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v_i \right) + v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) \right] dV = F_i ,$$

tomando en cuenta la ecuación de continuidad (33) y expresando en forma vectorial esta ecuación, se tiene que

$$\int_V \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) dV = \vec{F}. \qquad (35)$$

Ahora bien, en toería de fluidos la fuerza $\vec{F}$ se expresa como sigue (*ibid.*)

$$\vec{F} = \int_{\partial V} \vec{t}(\vec{r}, t, \hat{n}) da + \int_V \rho \vec{b}(\vec{r}, t) dV , \qquad (36)$$

donde $\vec{t}(\vec{r}, t, \hat{n})$ es la fuerza por unidad de área en la posición $\vec{r}$ al tiempo t a través del elemento de área da con dirección normal unitaria $\hat{n}$ y $\vec{b}(\vec{r}, t)$ es la fuerza por unidad de masa que actúa sobre el elemento de volumen de fluido dV en la posición $\vec{r}$ al tiempo t. El teorema de Cuachy establece que si la ecuación de balance de momentos (34) se cumple, entonces $\vec{t}$ depende linealmente de $\hat{n}$ y por lo tanto las componentes del vector $\vec{t}$ se pueden escribir como $t_i = \sum_{i=1}^{3} \sigma^{ij} n_j$ que vectorialmente se puede expresar como $\vec{t} = \vec{\vec{\sigma}} \cdot \hat{n}$, donde $\vec{\vec{\sigma}}(\vec{r}, t)$ es una matriz 3×3 llamada tensor de esfuerzos de Cauchy cuyos elementos σ^{ij}, que son la medida de la i-ésima componente de la fuerza por unidad de área a través del elemento de superficie con normal unitaria $\hat{j}$, j-ésimo vector de la base cartesiana estándar. Sustituyendo esta expresión para $\vec{t}$ en la ecuación (36) y usando el teorema de la divergencia se tiene que

$$\vec{F} = \int_V \left(\nabla \cdot \vec{\vec{\sigma}} + \rho \vec{b} \right) dV ,$$

donde $\nabla \cdot \vec{\vec{\sigma}}$ es un vector cuya i-ésima componente es $\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x_j}$. Sustituyendo en la ecuación (35) se obtiene la ecuación integral:

$$\int_V \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) dV = \int_V \left(\nabla \cdot \vec{\vec{\sigma}} + \rho \vec{b} \right) dV ,$$

como esta ecuación es válida para todo volumen V, se llega así a las ecuaciones de Cauchy:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = \nabla \cdot \vec{\vec{\sigma}} + \rho \vec{b}$$

Considerando la ecuación de balance del momento angular (*ibid.*) se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{r} \times \vec{\rho} \vec{v} dV = \int_{\partial V} \vec{r} \times \vec{t} da + \int_V \vec{r} \times \rho \vec{b} dV ,$$

es posible demostrar que la matriz (tensor de esfuerzos) es una matriz simétrica tal que $\sigma^{ij} = \sigma^{ji}$.

Conclusiones

Se demostraron una serie de teoremas y lemas, que tienen implicaciones importantes en las aplicaciones del electromagnetismo y de la teoría de los fluidos, relativos con las integrales definidas sobre conjuntos dependientes del tiempo. Se destacó como parte central del trabajo una demostración rigurosa del teorema de Reynolds. Se incluyeron tres ejemplos donde se requieren las citadas integrales. Este trabajo planteó la necesidad de corregir en la medida de lo posible las omisiones que existen tanto en los libros de cálculo vectorial donde no incluye el problema de la derivación de integrales definidas sobre regiones que dependen del tiempo (o parámetro), y se sugirió superar las deficiencias que exhiben la mayoría de los textos de física donde la obtención de las fórmulas correspondientes a la derivada de este tipo de integrales se hace sin el debido rigor matemático. Se presentaron las propiedades de las integrales definidas sobre conjuntos que dependen continuamente de un parámetro, siguiendo un camino lógico que requiere el formalismo matemático que en ocasiones se sacrifica durante la impartición de cursos de electromagnetismo y de fluidos que son parte de los curricula de carreras tanto de ingeniería, de química e inclusive de física.

Bibliografía

Apostol, T. (1957). *Mathematical Analysis.* Addison-Wesley, Reading Massachusetts, USA.

Clemmow, P. (1973). *An Introduction to Electromagnetic Theory.* Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain.

Malven, L. (1969). *Introduction to the Mechanics of Continuous Medium.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs N. J., USA.

Marsden, J.; Tromba, A. (1991). *Cálculo Vectorial.* 3ª Ed., Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington Delawere, USA.

Paul, C. y Nasar, S. (1987). *Introduction to Electromagnetic Fields.* McGraw-Hill, New York, USA.

Spivak, M. (1972). *Cálculo en Variedades.* Reverté, Barcelona.

Tamm, I. (1979). *Fundamentos de la Teoría de la Electricidad.* Mir, Moscú.

White, F. (1991). *Viscous Fluid Flow.* 2ª Ed., McGraw-Hill, Singapore.