

# Principios matemáticos de la reconstrucción de imágenes tomográficas

Salvador Galindo Uribarri\*

Recepción: marzo 4 de 2003

Aceptación: abril 25 de 2003

\* Departamento de Física, Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares, ININ.  
Facultad de Ingeniería, posgrado, Universidad Autónoma del Estado de México.  
Correo electrónico: sgu@nuclear.inin.mx

**Resumen.** Por tomografía de un objeto nos referimos a una imagen de una sección transversal del mismo. Dicha sección ha sido reconstruida a partir de datos de transmisión o de reflexión producidos al hacer incidir sobre el objeto, desde varias direcciones, la emisión de una fuente de iluminación. La fuente puede ser de rayos X, rayos gama, ultrasonido y para el caso de resonancia magnética, radiofrecuencia.

El presente trabajo aborda los principios de reconstrucción de imágenes de objetos que no difractan la irradiación recibida: es el caso de la tomografía con rayos gama, en el cual la difracción es despreciable. Para los propósitos de este trabajo, primero se expone cómo se desarrolló la técnica y después se sintetizan sus principios matemáticos, junto con el algoritmo de reconstrucción de imágenes conocido como algoritmo de convolución-retroproyección

**Palabras clave:** Tomografía Gama, convolución, retroproyección.

## Mathematical Principles of Tomographic Image Reconstruction

**Abstract.** By means of a gamma tomograph of a sample, we infer its cross sectional image. This image has been drawn together from transmission or reflection data, collected as a light source emission impinges from several paths on the sample. The source can give out x-rays, gamma rays and, in the case of magnetic resonance, radio frequency waves. This paper deals exclusively with the image reconstruction basics of non-diffracting objects. This is the gamma ray case, where diffraction effects are negligible. This work first describes how the technique developed, and then presents a synthesis of its mathematical principles, together with the "image reconstruction" algorithm known by the name of the convolution - back projection algorithm.

**Key words:** gamma tomography, convolution, back projection.

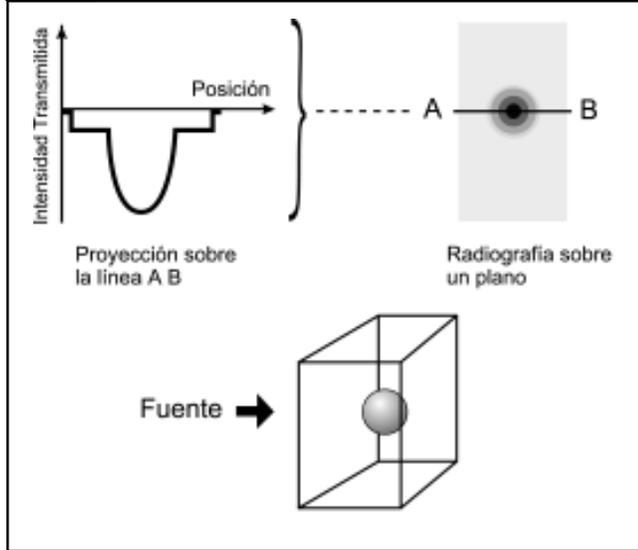
## Introducción

Una tomografía bidimensional, esencialmente es la reconstrucción de la imagen de una sección transversal (o 'rebanaada') de un objeto a partir de sus proyecciones. Para aclarar lo que se entiende por proyección, citamos como ejemplo las radiografías médicas (véase figura 1). Una radiografía puede ser considerada como un conjunto de proyecio-

nes sobre las rectas que forman el plano de la placa radiográfica. En este sentido, una proyección sería una radiografía sobre una sola recta (línea AB en la figura 1).

La tomografía utiliza muchas proyecciones sobre líneas en un mismo plano (no necesariamente rectas), para reconstruir una sección transversal del objeto examinado. La reconstrucción de una imagen a partir de dichas proyecciones es un asunto matemáticamente elaborado. En un sen-

Figura 1. Ejemplo de proyección sobre una línea recta.



tido estricto y desde un punto de vista matemático, la solución al problema de reconstrucción de una imagen a partir de un número infinito de proyecciones es conocida desde principios del siglo XX.

En 1917 Johann Radon publicó un artículo matemático donde apareció la transformada que hoy lleva su nombre (Radon, 1917). Esta transformada es la solución matemática al problema de la reconstrucción tomográfica de imágenes. La transformada nos indica que la imagen de un objeto está precisa e inequívocamente determinada por el conjunto infinito de todas sus proyecciones. Sin embargo, en la práctica no existe un número infinito de proyecciones, las proyecciones no son infinitamente delgadas y además poseen errores experimentales. Por lo tanto, lo que se precisa no es una fórmula matemática idealizada, sino un algoritmo eficiente para evaluarla. Así, la transformada fue olvidada por muchos años y tuvo que ser conceptualmente reinventada e instrumentada medio siglo después por Allan Cormack y otros investigadores (Cormack, 1975). A continuación veremos cómo la tomografía es uno entre muchos campos de investigación en el que se desarrollaron de manera paralela e independiente, tanto el hardware como los software.

### 1. Desarrollo preliminar

La idea de fabricar un tomógrafo escáner de rayos X fue concebida en 1967 por Godfrey N. Hounsfield quien un poco más tarde construyó el primer aparato (Hounsfield, 1972, 1973, 1979). Las imágenes obtenidas por aquel tomógrafo eran muy ruidosas y tenían una resolución de 80 x 80 cuadros. Dichas limitaciones no sólo dependían del equipo

utilizado sino también, como veremos más adelante, de los procedimientos utilizados para reconstruir las primeras tomografías. En aquellos años, Hounsfield, se valió de técnicas algebraicas similares a las que usó en trabajos pioneros de reconocimiento de patrones para reconstruir las primeras imágenes tomográficas.

Conceptualmente, las técnicas algebraicas son simples de entender. En estas técnicas se sobrepone una cuadrícula imaginaria encima del plano en el que se encuentra la sección del objeto por reconstruir. De esta manera el objeto queda hipotéticamente dividido en celdas. A cada celda le corresponde una densidad promedio. Dichas densidades son las que debemos encontrar, es decir, son las incógnitas del problema. Las proyecciones se convierten, entonces, en sumas de muchos términos sobre direcciones en la cuadrícula. Dichas direcciones son delgadas bandas que atraviesan la cuadrícula a diversos ángulos. Las bandas representan los rayos que se transmiten a través del objeto de estudio. En consecuencia, cada término (de la sumatoria que forma una proyección) es el producto de un factor de peso multiplicado por la densidad del cuadro (que es la incógnita). Los correspondientes valores de peso para cada cuadro son conocidos y están determinados por la geometría del caso, esto es: ancho del haz de irradiación (es decir, la banda), ángulo de irradiación (entre la banda y los cuadrillos), y tamaño de la cuadrícula. A partir las proyecciones, es posible establecer un conjunto de ecuaciones simultáneas que se intentan resolver mediante algún algoritmo adecuado. Apparentemente este procedimiento que acabamos de describir resulta muy sencillo, pero a pesar de su simplicidad, la técnica contiene sus limitantes.

La figura 2 ilustra una rejilla sobrepuesta a una imagen desconocida. La idea es representar la imagen por una función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  cuyos valores son constantes en cada celda, por supuesto que esto no quiere decir que dos celdas no puedan tener el mismo valor de  $f$ . La rejilla mide  $n$  celdas por lado, por lo que el correspondiente número total de celdas es  $n \times n = N$ .

Pensemos ahora que el objeto es barrido por un conjunto de rayos que corren paralelos haciendo un ángulo de inclinación establecido con respecto a alguno de los ejes de la cuadrícula. En este caso un rayo cualquiera  $j_i$  puede ser representado como una delgada banda que cruza la cuadrícula (figura 2).

Basados en esta representación, definimos la proyección de  $p_i$  del rayo  $j_i$  como

$$\sum_{j=1}^N w_{ij} f_j = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, M \tag{1}$$

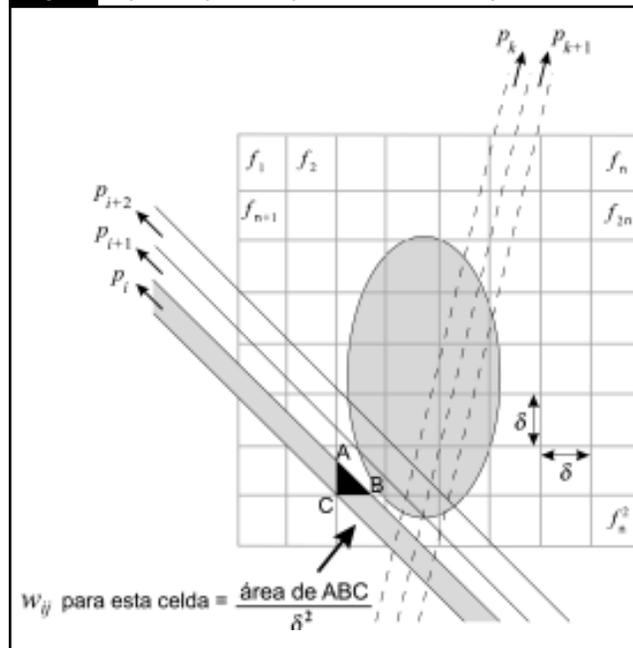
donde  $M$  es el número total de rayos (para todas las proyecciones) y  $w_{ij}$  es un factor de peso que corresponde a la fracción de área correspondiente a cada celda interceptada por un rayo en particular. El triángulo sombreado ABC (figura 2) indica esta área, para una celda en particular. Es evidente que la mayoría de estos factores  $w_{ij}$  son iguales a cero.

La solución del problema, es decir, la obtención de la tomografía, consiste simplemente en determinar todos los valores  $f_j$  conociendo los factores de peso  $w_{ij}$ . Si fuera pequeño el número total de rayos  $M$  y el tamaño de la cuadrícula  $N$ , entonces podríamos en principio utilizar técnicas de inversión de matrices para resolver las ecuaciones simultáneas dadas por la ecuación 1. Sin embargo, para una cuadrícula de tamaño moderado, por ejemplo de  $256 \times 256$ , el valor de  $N$  es  $256 \times 256 = 65,536$ . Si a esto agregamos que el ancho de un rayo debe ser del orden de la longitud de las celdas, entonces el número total de rayos que tenemos que utilizar debe ser del mismo orden que el número total  $N$  de las celdas. En pocas palabras,  $M$  es de la dimensión de  $N$ . Esto implica que para el caso que nos ocupa ( $256 \times 256$  píxeles), se tienen que resolver alrededor de  $65,000 \times 65,000 = 4.2 \times 10^9$  ecuaciones simultáneas. Manejar tantas ecuaciones es inoperante, aun para las computadoras modernas, ya que si se requiere de cálculos de doble precisión cada elemento de matriz ocuparía 8 bytes, y ello implicaría que una sola matriz ocupara  $8 \times 4.2$  Gigabytes de almacenamiento. Y no se diga del prolongado tiempo de cálculo para la solución de las ecuaciones. Aunque cabe señalar que existen métodos de solución iterativos que ahorran tiempo (véase, por ejemplo, Lent *et al.*, 1973).

En efecto, el problema de almacenaje y procesamiento se vislumbró desde la obtención de las primeras tomografías por Hounsfield. Sus imágenes tenían una resolución de  $80 \times 80$  y tomaban 9 días en procesar. Claramente las técnicas algebraicas no eran la alternativa de aquella época, aunque es pertinente aclarar que hoy en día hay computadoras de mayor capacidad y se han desarrollado algunos algoritmos algebraicos eficientes. Por lo que las técnicas algebraicas (ART por sus siglas en inglés: *Algebraic Reconstruction Technique*) no se han abandonado, y por el contrario, actualmente constituyen uno de los extensos temas de investigación (Herman y Kuba, 1999).

Hemos mencionado que tanto el equipo como los procedimientos de reconstrucción se desarrollaron paralelamente. El hallazgo de dichos procedimientos tomográficos (más eficaces que los algebraicos) se debió a una afortunada combinación de sucesos fortuitos que a continuación relataremos.

Figura 2. Proyección representada por una banda sobre una rejilla.



## 2. Caminos al Nobel

Un día de 1955 durante el verano austral sudafricano, el encargado de seguridad radiológica del hospital Groote Schuur, de Ciudad del Cabo, presentó su renuncia. Como la reglamentación sudafricana requería que un físico calificado supervisara el uso y manejo de fuentes radiactivas, Allan M. Cormack fue llamado a ocupar parcialmente el puesto por un día y medio cada semana. En la década de los cincuenta había pocos físicos en Sudáfrica y Allan Cormack, quien trabajaba para la Universidad del Cabo, era el único en 200 km a la redonda, y además su especialidad no era precisamente la física relacionada con la radioterapia. Sin embargo, el entrenamiento que había recibido como físico nuclear en Harvard trabajando con Otto Frish lo hacían suficientemente capacitado para ocupar el puesto mientras el hospital encontraba un relevo a quién pasar la estafeta.

Cormack trabajó el primer semestre de 1956 en el Departamento de Radiología observando la preparación de los tratamientos de radioterapia. El procedimiento era el siguiente: antes de realizar una irradiación sobre un paciente, los médicos hacían estimaciones muy burdas sobre los tiempos y formas de irradiación que debían aplicar al paciente para que el tejido afectado recibiera la dosis adecuada. El cuerpo humano está formado por diversos tejidos con sus respectivas inhomogeneidades, hecho que todos los médicos saben, sin embargo, para propósitos de irradia-

ción las estimaciones que se hacían consideraban al cuerpo humano formado por material homogéneo. Por lo tanto, el tratamiento por radioterapia resultaba en aquella época aún muy primitivo y seguramente dañaba otros órganos sanos del paciente.

Con el propósito de mejorar la radioterapia, Cormack pensó que sería muy útil conocer con precisión la distribución interna de los tejidos del cuerpo, ya que esto serviría en los cálculos del tratamiento (Cormack, 1979). Además, pronto pensó que la información sería útil para propósitos de diagnóstico de otras enfermedades. Lo que se le ocurrió es que esa información podría ser extraída a partir de una serie de proyecciones de rayos X o de rayos gama. Es decir, a partir de una tomografía, palabra acuñada, cabe aclarar, años más tarde.

Como los cálculos de la atenuación de rayos gama y X en materiales homogéneos tenían muchos años de ser conocidos y eran cotidianamente utilizados en estimaciones de blindajes para la radiación, Cormack supuso que la generalización de los cálculos a partir de proyecciones para materiales no homogéneos ya había sido realizada con anterioridad. Tras una búsqueda en la literatura disponible, no encontró que el fundamento para los cálculos hubiera sido descubierto por Radon en 1917, y por lo tanto optó por emprender la tarea de deducirlos. Los trabajos de Cormack representan hoy en día la base de los algoritmos de reconstrucción de imágenes. Dos cosas son dignas de mencionar: Cormack y Hounsfield, ambos pioneros de la tomografía, compartieron el premio Nobel de Medicina en 1979, y los dos se conocieron en persona durante la ceremonia de entrega del premio.

### 3. La proyección ideal de un rayo gama

En esta sección resumiremos algunas de las particularidades de la tomografía gama. Aquí, una proyección es obtenida midiendo la transmisión de rayos gama a través del objeto. Para este propósito, una fuente de radiación gama se sitúa frente a la muestra. La distribución del flujo de radiación que atraviesa a la muestra es medida en diferentes posiciones por uno o más detectores de radiación. Así, las distintas proyecciones se obtienen cambiando la geometría del arreglo (fuente-objeto-detectores).

El flujo de los fotones gama emitidos por la fuente decrece cuando éste atraviesa el objeto. Esto se debe al hecho de que el rayo se atenúa por la muestra y también, en mucho menor medida, a que el rayo es dispersado por la misma. La atenuación se puede expresar de manera cuantitativa por la relación de Beer-Lambert,

$$T = \frac{I}{I_0} = e^{-\rho\mu l} = e^{-A} \tag{2}$$

donde  $I_0$  representa la intensidad incidente de un rayo monoenergético sobre un material homogéneo,  $I$  es la intensidad de la radiación gama transmitida a través dicho material y  $T$  es la razón o tasa de transmisión entre ambas. En esta relación,  $\mu$  es el coeficiente de atenuación másico,  $\rho$  es la densidad del medio y  $l$  es la longitud de la trayectoria a través del material homogéneo. El producto  $\rho\mu$  es conocido como el coeficiente de atenuación lineal del medio y el producto  $A = \rho\mu l$  es la **absorbancia** del medio.

Si en la práctica medimos, en lugar de  $T$ , el logaritmo de la tasa de transmisión:  $\text{Ln } T = -\rho\mu l$  para una dirección particular de un solo rayo gama, la cuestión se reduce a un problema lineal donde la cantidad medida, o ‘proyección puntual’ es la suma de los productos del coeficiente de atenuación lineal a lo largo de una parte de la trayectoria del rayo gama, por la longitud  $\delta l$  de dicha parte. En este caso,  $\delta l$  sería el análogo a los factores de peso ( $w_{ij}$  en la sumatoria dada en la ecuación (1) y el coeficiente de atenuación lineal  $\rho\mu$  sería equivalente a los valores  $f_i$  para cada punto a lo largo de la trayectoria del rayo. Ahora bien, si hacemos a los segmentos  $\delta l$  infinitesimales  $ds$ , en el límite la sumatoria (ecuación 1) se convierte en una integral de línea a lo largo de la trayectoria  $i$  del rayo gama.

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) ds \tag{3}$$

Esta  $p$  depende de la trayectoria del rayo gama correspondiente. Como un haz de rayos gama se compone de un número infinito de rayos, todas las distintas  $p_i$  procedentes de cada rayo  $i$  tienen que ser función de un parámetro continuo. Esta función definiría a la proyección del haz sobre una línea de proyección. En la sumatoria de la ecuación (1) el parámetro a variar es discreto y corresponde al índice  $i=1, 2, \dots, W$ , donde  $W$  es el número total de rayos para una sola de las proyecciones.

Con el propósito de parametrizar a la ecuación (3), utilizaremos el sistema de coordenadas definido en la figura 3. Formalmente, y como ya se ha mencionado, una imagen puede ser representada por una función  $f(x, y)$  donde las coordenadas  $(x, y)$  nos indican la posición de un punto de la imagen y en el caso de la tomografía gama, el valor de  $f$  representa el coeficiente de atenuación lineal del medio en dicho punto.

La dirección del rayo AB mostrado en la figura 3 define una dirección perpendicular  $t$  donde se proyecta el rayo. La línea  $t$  hace un ángulo  $\theta$  en el eje X. La ecuación del rayo AB está dada por

$$x \cos \theta + y \sin \theta = t$$

La proyección particular generada (a un ángulo  $\theta$ ) es función de una variable  $t$ . La proyección se calcula a partir de las integrales de línea de  $f(x, y)$  a lo largo de líneas paralelas que pasan a través de la imagen. Esto es,

$$\begin{aligned} p_{\theta}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x(s, t), y(s, t)) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, s \cos \theta + t \sin \theta) ds \end{aligned} \quad (4)$$

Es claro, entonces, que para poder precisar todas las proyecciones es necesario el uso de un parámetro más, en este caso el ángulo  $\theta$ .

#### 4. La proyección real de un rayo gama

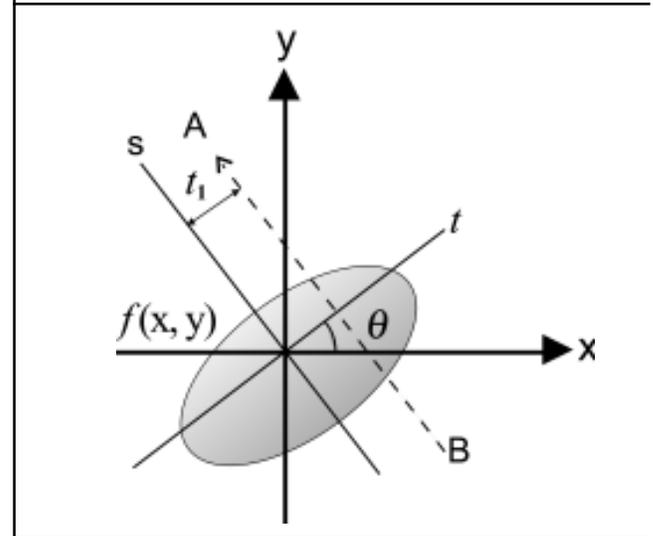
En la práctica, ni el ángulo  $\theta$  ni el parámetro  $t$  resultan ser variables continuas (por obvias limitaciones instrumentales). Por lo tanto, la medición experimental con la que se cuenta es un conjunto de proyecciones para un número finito de ángulos  $\{\theta_j(t_k), j, k = 0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , y a partir de este conjunto, la cuestión es buscar un algoritmo para reconstruir la imagen  $f'(x, y)$ . Es evidente que el algoritmo deberá reconstruir exactamente a la imagen si se tienen datos continuos. Además, si el número de proyecciones disponibles se incrementa, la imagen  $f'$  reconstruida deberá ser muy similar a  $f$ . En la práctica se procura que los datos experimentales estén repartidos de manera regular a lo largo de una rejilla polar de radio unitario. Esto es,

$$\theta_{jj} = \frac{j\pi}{(n-1)}$$

$$t_k = \frac{2k - (n-1)}{(n-1)}$$

Antes de proseguir con el algoritmo que utilizaremos en la reconstrucción, debemos de construir una imagen virtual con el fin de probar la validez de la instrumentación de dicho algoritmo.

Figura 3. Sistema de coordenadas e imagen de un objeto cuya sección transversal es una elipse.



#### 5. La construcción de imágenes de prueba

Para validar los algoritmos de reconstrucción es práctica común simular por computadora imágenes artificiales. Se acepta por conveniencia que la imagen se localiza dentro de un círculo unitario, en otras palabras  $f(x, y) = 0$  para  $x^2 + y^2 > 1$ . Dichas imágenes se simulan traslapando elipses y asignando a cada una diferentes coeficientes de atenuación. La razón de utilizar elipses es que la proyección de una elipse puede ser calculada exactamente. En otras palabras, si la imagen no puede ser reconstruida razonablemente mediante un algoritmo propuesto, el fracaso no se deberá a proyecciones defectuosas sino a algún defecto en el propio algoritmo.

Sea  $e$  una elipse centrada en el origen, con su eje mayor a lo largo del eje X y de longitud  $2A$  y su eje menor de longitud  $2B$  en el eje Y;

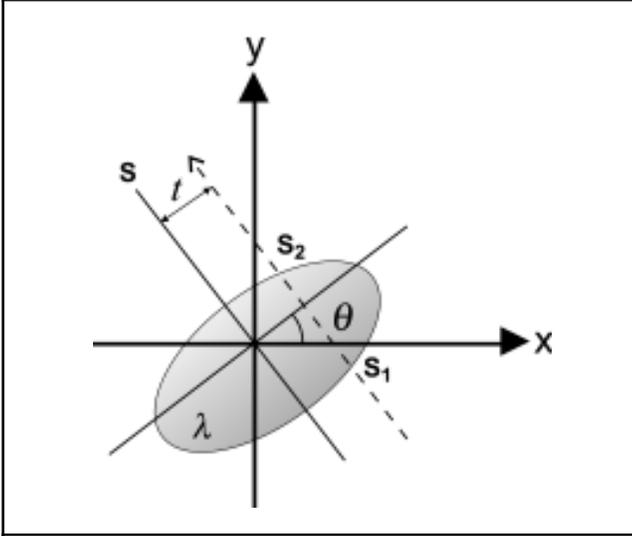
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (5)$$

Definamos ahora una función  $f$  que tiene una propiedad determinada, por ejemplo un valor de atenuación  $\lambda$  dentro de la elipse y cero fuera de la misma. Para esta función su proyección es

$$p_{\theta}^e(t) = \int_{s_1}^{s_2} \lambda ds = \lambda (s_2 - s_1)$$

donde  $s_1$  y  $s_2$  son los puntos de intersección de la elipse con la línea de proyección en  $t$  (véase figura 4).

Figura 4. Sistema de coordenadas y puntos de intersección de un rayo con la imagen de un objeto cuya sección transversal es una elipse.



riormente hacemos una translación del centro de la elipse a un punto  $(x_1 - y_1)$  en el plano  $xy$ . Una proyección de esa elipse está dada por

$$p_{\theta-\alpha}^e(t - \delta) \tag{7}$$

donde

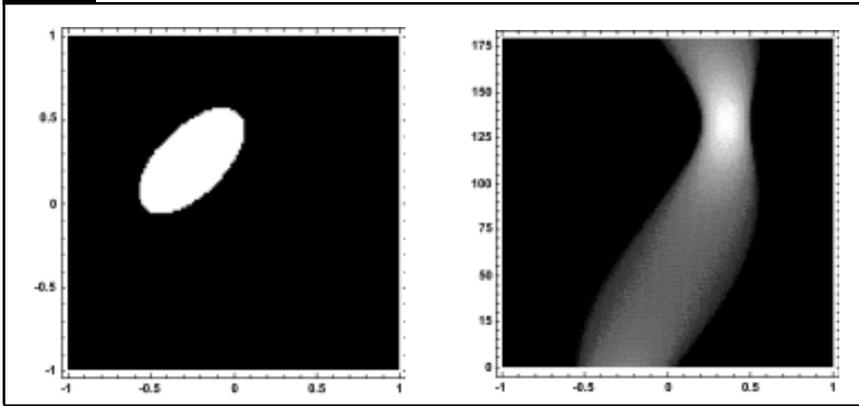
$$\delta = x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta$$

La figura 5 muestra una elipse y sus proyecciones. La elipse se encuentra situada en un cuadro que inscribe al círculo unitario de acuerdo con la convención ya mencionada ( $x^2 + y^2 > 1$ ). Las proyecciones de la elipse se presentan como una serie de líneas que toman valores desde  $t = -1$  a  $t = 1$ . Cada una de las proyecciones corres-

pone a un ángulo de proyección particular. El ángulo varía desde  $\theta = 0^\circ$  hasta  $\theta = 180^\circ$  y sus diferentes grises corresponden a la escala de intensidad de la proyección. Esta representación recibe el nombre de sinograma.

Es posible representar figuras más elaboradas superponiendo elipses de distinto coeficiente de atenuación y formar una proyección compuesta de varias de ellas. Esto se debe al hecho de que el operador de proyección es lineal, por lo que simplemente se suman las proyecciones de cada una de las elipses.

Figura 5. Elipse y su sinograma.



Si calculamos las coordenadas  $(x, y)$  de los puntos  $(t, s_1)$  y  $(t, s_2)$  y se sustituyen en la ecuación (5) para la elipse y posteriormente se calcula el valor de  $(s_1 - s_2)$  y se multiplica por  $\lambda$ , se obtiene la siguiente expresión para la proyección

$$p_\theta^e = \frac{2AB\lambda}{a^2(\theta)} \sqrt{a^2(\theta) - t^2} \tag{6}$$

donde

$$a^2(\theta) = A^2 \cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta$$

De esta manera, una proyección sobre una elipse puede ser calculada exactamente para cualquier ángulo  $\theta$ . Ahora vamos a considerar que rotamos la elipse alrededor del origen por un ángulo  $a$  con respecto a su eje mayor y poste-

En 1974 Shepp y Logan fueron los primeros en utilizar estas ideas para probar algoritmos tomográficos (Shepp y Logan, 1974). Los datos para su imagen de prueba constituyen actualmente el estándar utilizado para validación de algoritmos. La idea de estos investigadores fue proporcionar una imagen que representara una cabeza humana. La razón se debe a que el área de aplicación más extensa de la tomografía es la radiología y dentro de esta área la cabeza es la que más ha sido explorada. El *fantomas* —como le llamaron a su imagen Shepp y Logan— contiene tumores, un hematoma, ventrículos y el cráneo que rodea al cerebro. El material de referencia es el aire que rodea a la cabeza, que para propósitos prácticos su coeficiente de atenuación se considera cero. La tabla 1 proporciona dichos valores.

La figura 6 muestra la imagen del fantomas de Shepp-Logan y su correspondiente sinograma. El fantomas fue generado a partir de los valores de la tabla.

### 6. El teorema de corte de Fourier

La tarea ahora es reconstruir el fantomas. Para este propósito repasaremos el teorema de corte de Fourier (véase por ejemplo Kak, 1985).

Comenzamos escribiendo la transformada bidimensional de Fourier de la función  $f(x, y)$  que representa al objeto

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{2\pi i(ux+vy)} dx dy \quad (8)$$

y escribimos además la transformada de la proyección

$$P_{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\theta}(t) e^{2\pi i w t} dt$$

usando la definición de proyección de la ecuación (4), se obtiene

$$P_{\theta}(w) = \iint f(t \cos \theta - s \sin \theta, s \cos \theta + t \sin \theta) e^{2\pi i w t} ds dt$$

Haciendo las siguientes sustituciones

$$x = t \cos \theta - s \sin \theta, \quad y = t \sin \theta + s \cos \theta$$

cuyo jacobiano es unitario, para obtener,

$$P_{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{2\pi i w(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \quad (9)$$

Una comparación entre las ecuaciones (8) y (9) nos lleva al teorema

$$P_{\theta}(w) = F(w \cos \theta, w \sin \theta) \quad (10)$$

En palabras, el teorema nos dice la siguiente: La transformada de Fourier de una proyección paralela de una imagen  $f(x, y)$  tomada a un ángulo  $q$  nos da un corte de la transformada bidimensional  $F(u, v)$ , subtendiendo el mismo ángulo  $q$  con el eje  $u$ . En otras palabras, la transformada de Fourier de las proyecciones  $P_q(t)$  nos da los valores de  $F(u, v)$  a lo largo de la línea BB (Véase figura 7).

La utilidad del teorema radica en que tomando las proyecciones de un objeto a ángulos  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  y tomando la

Figura 6. Fantomas de Shepp-Logan y su sinograma.

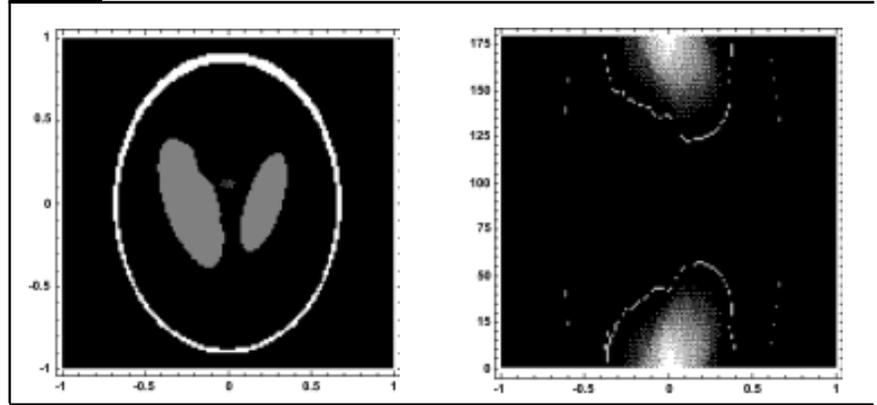


Tabla 1. Parámetros del fantomas de Shepp-Logan.

Centro de coordenadas	Eje mayor	Eje menor	Ángulo de rotación	Coefficiente de atenuación
(0, 0)	0.92	0.69	90	2.0
(0, -0.0184)	0.874	0.6624	90	-0.98*
(0.22, 0)	0.31	0.11	72	-0.02*
(-0.22, 0)	0.41	0.16	108	-0.02*
(0, 0.35)	0.25	0.21	90	0.01
(0, 0.1)	0.046	0.046	0	0.01
(0, -0.1)	0.046	0.046	0	0.01
(-0.08, -0.605)	0.046	0.023	0	0.01
(0, -0.605)	0.023	0.023	0	0.01
(0.06, -0.605)	0.046	0.023	90	0.01

\* Estrictamente los valores son índices de refracción para rayos X. Un índice negativo en gamas implica que el medio atenúa menos que el aire.

transformada de Fourier de las mismas, podemos determinar los valores de la transformada bidimensional  $F(u, v)$  en líneas radiales del plano  $uv$  (dominio de frecuencias espaciales).

Si pudiéramos tomar un número infinito de proyecciones, entonces conoceríamos  $F(u, v)$  en todo el plano y tomando su transformada inversa encontraríamos la imagen  $f(x, y)$  del objeto.

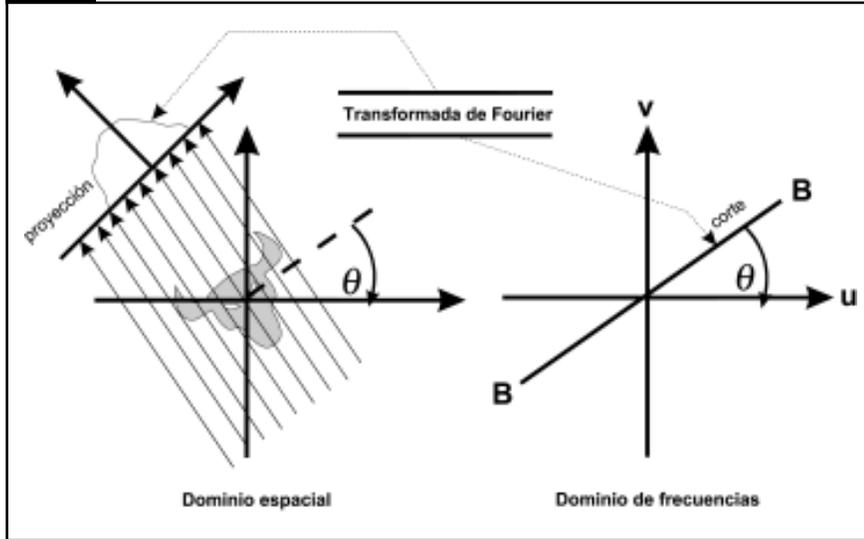
La transformada inversa está dada por,

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi i j(ux+vy)} dudv \quad (11)$$

Como la imagen  $f(x, y)$  está acotada dentro de un cuadrado de lado igual a 2, esto es, por  $-1 < x < 1$  y  $-1 < y < 1$ , y como en la práctica sólo se puede conocer un número finito de proyecciones la ecuación (11) puede ser aproximada como

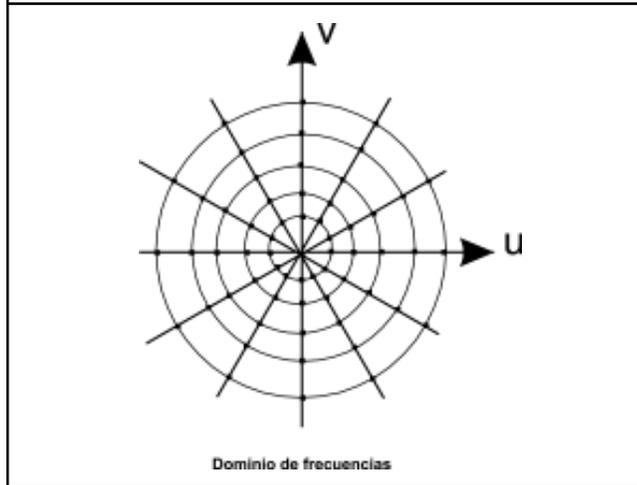
$$f(x, y) \approx \frac{1}{2^2} \sum_{m=-N/2}^{N/2} \sum_{n=-N/2}^{N/2} F(m, n) e^{2\pi j((m)x+(n)y)} \quad (12)$$

Figura 7. Representación esquemática del teorema de corte de Fourier.



$F(u, v)$  igual al de los coeficientes. Sin embargo, el principal problema que se presenta al utilizar la ecuación (12) es que para las frecuencias altas, los puntos experimentales se encuentran muy separados. Esto se ilustra de manera muy clara en la figura 8. Los puntos cercanos al origen, en el plano  $uv$ , se hallan relativamente juntos, pero conforme nos alejamos del centro, hacia las altas frecuencias, los puntos muestreados aparecen muy apartados. Esto implica que se requiere una interpolación con puntos muy despegados entre sí, lo que puede inducir un error considerable.

Figura 8. Representación esquemática de las proyecciones. Los puntos representan el objeto en el dominio de frecuencias espaciales.



para  $-1 < x < 1$  y  $-1 < y < 1$ , donde hemos asumido que  $N$  es un entero par.

En síntesis, el teorema de corte relaciona a la transformada de Fourier de una proyección con la transformada de su imagen (a lo largo de una línea radial). Por lo tanto, si se tienen las transformadas de Fourier de las proyecciones, a muchos ángulos, se puede ‘ensamblar’ el conjunto para cubrir el plano del dominio de frecuencias (véase la figura 8). Con esto se tendría una estimación de la transformada bidimensional y, por lo tanto, usando la ecuación 12, invertiríamos la transformada para obtener una estimación de la imagen del objeto.

La ecuación 12 puede ser instrumentada utilizando la transformada rápida de Fourier conociendo los  $N^2$  coeficientes de  $F(m, n)$ . Estos coeficientes pueden ser calculados siempre y cuando se cuente con un número de valores de la función

Una manera de atacar el problema es dando a cada punto, en el dominio de las frecuencias, un distinto peso para que su influencia sea diferente a la hora de tomar la transformada inversa y reconstruir la imagen. Este mecanismo se conoce como *filtraje* y no es otra cosa sino una ponderación de cada punto de una proyección en el dominio de las frecuencias. Después del filtraje, se pueden entonces reconstruir los puntos en el dominio espacial correspondientes a cada una de las líneas radiales del dominio de las frecuencias. Este último mecanismo se conoce como *retroproyectar*.

### 7. El algoritmo de retroproyección filtrado

El algoritmo implica dos pasos: la parte del filtraje y la de retroproyección (Kak y Slaney, 2001). Como veremos más adelante, este algoritmo requiere sólo una interpolación unidimensional. Para su instrumentación computacional, se requiere escribir la transformada de Fourier inversa en coordenadas polares y recomponer los límites de integración.

Comenzamos escribiendo la siguiente transformada inversa bidimensional de Fourier.

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{-2\pi i(ux+vy)} dudv \tag{13}$$

Cambiamos la expresión a coordenadas polares con la transformación  $u = w \cos \theta, v = w \sen \theta$ , con el jacobiano  $w$ , es decir,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} w F(w \cos \theta, w \sen \theta) e^{2\pi i w(x \cos \theta + y \sen \theta)} dw d\theta$$

En lugar de integrar a lo largo de medias direcciones radiales alrededor de todo el círculo, podemos integrar medio círculo y direcciones radiales completas, esto es,

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \|w\| F(w \cos \theta, w \sin \theta) e^{-2\pi i w(x \cos \theta + y \sin \theta)} dw d\theta$$

Ahora utilizamos el teorema de corte de Fourier para transformar la expresión de arriba a

$$f(x, y) = \int_0^\pi \underbrace{\left[ \int_{-\infty}^\infty \|w\| P_\theta(w) e^{-2\pi i w(x \cos \theta + y \sin \theta)} dw \right]}_{\text{Filtraje}} d\theta \quad (14)$$

Esta ecuación constituye una retroproyección filtrada. La primera integración constituye un *filtraje* a las proyecciones  $p_\theta(t)$  para generar proyecciones filtradas  $p_\theta^w(t)$

$$p_\theta^w(t) = \int_{-\infty}^\infty \|w\| P_\theta(w) e^{-2\pi i w t} dw \quad (15)$$

donde el factor de ponderación es el filtro  $\|w\|$ .

El segundo paso implica reconstruir la imagen a partir de las proyecciones filtradas, calculando la segunda integración,

$$f(x, y) = \int_0^\pi p_\theta^w(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta \quad (16)$$

Resta, entonces, construir el algoritmo de retroproyección filtrada. Esto se verá en las dos secciones siguientes. En la sección próxima inmediata veremos que la primera integración (ecuación 15) será instrumentada con técnicas estándar de filtraje de Fourier. La sección subsecuente tratará la segunda parte de la evaluación (ecuación 16). Esta última requiere un método de integración numérica que tiene la ventaja de tan solo usar una interpolación unidimensional en la variable  $t$ .

### 8. Implementación del filtro $\|w\|$

En teoría, la integración de la ecuación 15 debe en principio hacerse sobre todas las frecuencias. En la práctica, la información contenida por las componentes de Fourier arriba de cierta frecuencia  $W$  es despreciable, de manera que para propósitos prácticos las proyecciones están limitadas

en una banda de ancho  $W$ . Esto es,  $p_\theta(w) = 0$  para  $\|w\| > W$  donde el tamaño de muestreo  $t$  depende de  $W$ , en otras palabras,  $t < 1/(2W)$ . La existencia de esta limitante nos permite expresar la ecuación 15 como

$$p_\theta^w(t) = \int_{-\infty}^\infty H(w) P_\theta(w) e^{-2\pi i w t} dw \quad (17)$$

donde

$$H(w) = \|w\| b_w(w) \quad (18)$$

con

$$b_w(w) = \begin{cases} 1 & \|w\| \leq W \\ 0 & \|w\| > W \end{cases} \quad (19)$$

La figura 9 representa la función  $H(w)$  (ecuación 18) que es la función de transferencia de un filtro de *rampa* con el cual las proyecciones deben procesarse.

La función impulso de este filtro está dada por la transformada inversa de Fourier de la función de transferencia  $H(w)$ .

$$h(t) = \int_{-\infty}^\infty H(w) e^{+j2\pi w t} dw \quad (20)$$

$$= \frac{1}{2\tau^2} \frac{\text{sen } 2\pi t/2\tau}{2\pi t/2\tau} - \frac{1}{4\tau^2} \left( \frac{\text{sen } \pi t/2\tau}{\pi t/2\tau} \right)^2 \quad (21)$$

La función  $h(t)$  no necesita ser calculada en todo el intervalo de frecuencias, sino sólo en intervalos  $t = j\tau$  ( $j = 0, +1, +2, \dots, +1/2W$ ) donde se realiza la toma de datos. En este caso

$$h(j\tau) = \begin{cases} 1/4\tau^2 & j = 0 \\ 0 & j \text{ par} \\ -1/j^2 \pi^2 \tau^2 & j \text{ impar} \end{cases} \quad (22)$$

La figura 10 muestra la gráfica de la función  $h(j\tau)$ , para  $t=1$ ,

Por lo tanto, de acuerdo con la ecuaciones 17, 20 y 22, las proyecciones filtradas se reducen a

Figura 9. Función de transferencia de un filtro de rampa.

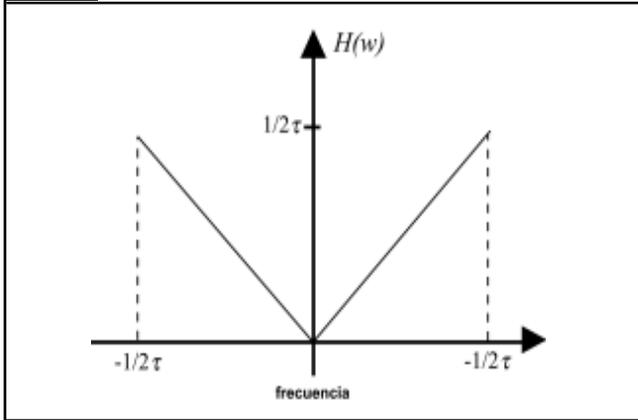
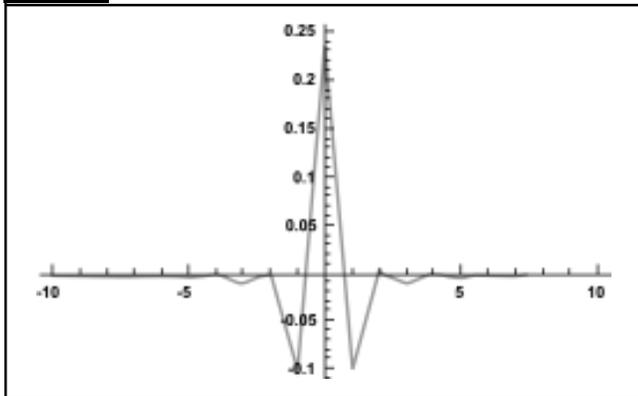


Figura 10. La función de respuesta impulso de un filtro rampa.



$$p_{\theta}^w(t) = p_{\theta}^w(j \tau) = \frac{1}{\tau} \left[ \frac{1}{4} p_{\theta}(j \tau) - \sum_{\substack{k=-\infty \\ (k-j) = \text{impar}}}^{\infty} \frac{p_{\theta}(k \tau)}{\pi^2 (k-j)^2} \right] \quad (23)$$

En otras palabras, los valores de la proyección filtrada  $\{p_{\theta}^w(t = j\tau)\}$ , se calculan convolucionando los datos de las proyecciones  $\{p_{\theta}(k), k = -\infty \dots \infty\}$  con el kernel dado por la ecuación 22.

La expresión dada por la ecuación 23 es directamente implementable en computadora. El resultado de filtrar todas las proyecciones del fantomas de Shepp-Logan usando el filtro de rampa se muestra en la figura 11.

### 9. Reconstrucción de la imagen

Hemos mencionado que el último paso del algoritmo de retroproyección implica reconstruir la imagen a partir de las proyecciones filtradas: esto es, calcular la integral dada por la ecuación 16. Esta integración puede efectuarse nu-

Figura 11. Filtrado del fantomas Shepp-Logan con el kernel de la figura 10 (ecuación 22).

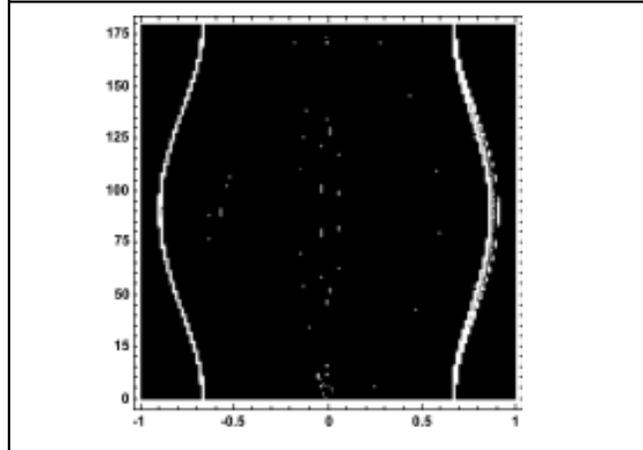
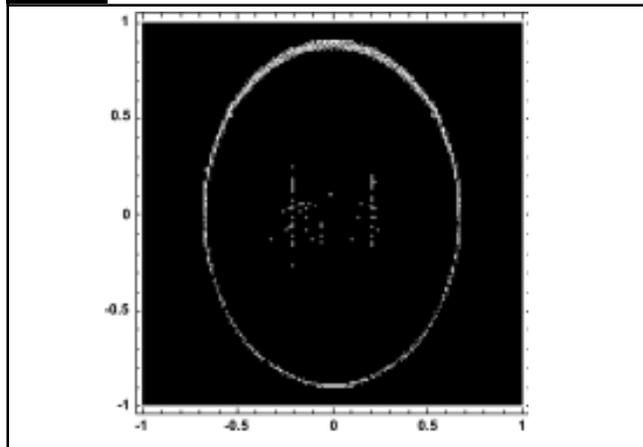


Figura 12. Reconstrucción tomográfica.



méricamente, lo que implica básicamente ir sumando las contribuciones de cada proyección a la intensidad de cada pixel  $(x, y)$ . Como no todo el plano  $x$ - $y$  es cubierto, se requiere de una interpolación lineal unidimensional para calcular la aproximación a  $p_{\theta}^w(t)$  en  $t = x \cos \theta + y \sin \theta$ . La figura 12 muestra el resultado de la integración de las proyecciones mostradas en la figura 11.

### Conclusión

Hemos presentado los principios generales de la reconstrucción de imágenes a partir de un algoritmo de retroproyección que utiliza un filtro de rampa. Existen muchos otros algoritmos como los algebraicos (ART) y muchas otras geometrías para los arreglos fuente-objeto-detector. En particular, aquí hemos tratado la geometría más sencilla, es decir, la de rayos paralelos.

Para aquellos lectores interesados en profundizar sobre el tema, sugerimos consultar el libro de Herman (Herman, 1980) y el de Kak y Slaney (2001).

## Bibliografía

- Cormack, A. M.  
 \_\_\_\_\_ (1975). "Reconstruction of Densities From Their Projections, With Applications in Radiological Physics", *Physics in Medicine and Biology*. Vol. 18. pp. 195-207.  
 \_\_\_\_\_ (1979). [www.nobel.se/medicine/laurates/1979/cormack-autobio.html](http://www.nobel.se/medicine/laurates/1979/cormack-autobio.html)
- Herman G. T.  
 \_\_\_\_\_ (1980). "Image Reconstruction from Projections", *Computer Science and Applied Mathematics*. Academic Press, N.Y.  
 \_\_\_\_\_ y Kuba A. (Eds.) (1999). "Discrete Tomography", *Springer Verlag*. Berlín
- Housenfield, G. N.  
 \_\_\_\_\_ (1972) "A Method and Apparatus for Examination of a Body by Radiation Such as X or Gamma Radiation", *Patent specification 1283915*. The Patent Office, London, England.  
 \_\_\_\_\_ (1973) "Computarized Transverse Axial Scanning Tomography: Part 1, Description of the System", *Br. J. Radiol.* Vol. 46 , pp. 1016-1022.  
 \_\_\_\_\_ (1979). [www.nobel.se/medicine/laurates/1979/housenfield-autobio.html](http://www.nobel.se/medicine/laurates/1979/housenfield-autobio.html)
- Kak, A., C.  
 \_\_\_\_\_ (1985). "Tomographic Imaging with Diffracting and non-Diffracting Sources", en Haykin, S. (ed.) *Array Signal Processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs N. J.  
 \_\_\_\_\_ y M. Slaney (2001). *Principles of Computational Tomographic Imaging Serie: Classics in Applied Mathematics*. No. 33. Society for Industrial and Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia.
- Lent, A.; S. Rowland y G. T. Herman (1973). "ART: Mathematics and Applications (A Report on the Mathematical Foundations and on the Applicability to Real Data of The Algebraic Reconstruction Techniques)", *Journal of Theoretical Biology*. Vol. 42 pp1-32.
- Radon, J. (1917). "Über Die Bestimmung von Funktionen Durch Ihre Integralwerte", reimpresso en Gindkin, S. y Michor, P. (eds.) (1994). *75 Years of Radon Transform*. American Mathematical Society, International Press.
- Shepp L. A. y B. F. Logan (1974). "The Fourier Reconstruction of a Head Section", *IEEE Trans. Nucl. Sci.* Vol. NS-21, pp. 21-43.