

Imbibición en papel

ABRAHAM MEDINA OVANDO, JOSÉ ANTONIO CORDOVA Y RAYMUNDO MARTÍNEZ-ANGELES*

Recepción: 21 de julio de 1999

Aceptación: 20 de julio de 1999



Imbibition in Paper

Abstract. *A set of experimental patterns during imbibition were studied. We made measurements of the imbibition fronts (boundary between dry and wet zones), through the recording of these patterns and digitization of selected frames, on paper with several shapes. Good agreement between the experiments and the Washburn Law is obtained for a vertical strip of paper; however this law is not universal and depends critically on the geometry.*

Introducción

Bajo condiciones naturales algunos fluidos pueden penetrar espontáneamente los medios porosos; ejemplos naturales inmediatos de este fenómeno son el movimiento de agua en suelos, la circulación de los fluidos en las plantas o el flujo del petróleo en rocas porosas de alta permeabilidad; están, además, algunos procesos tecnológicos como la impresión por chorro de tinta o la recolección de fluidos derramados. Este mecanismo físico de penetración en el medio poroso se conoce como *imbibición* y, en forma más precisa, ocurre cuando el fluido que moja más al medio poroso desplaza hacia el exterior al que menos lo hace. La humedificación de papel por agua obedece este mecanismo pues ésta (fluido miscible) desplaza el aire (fluido inmisible) hacia el exterior del papel.

La imbibición es un fenómeno complejo originado por el desbalance entre las fuerzas capilares, viscosas y gravitacionales. Hay varios grados de detalle con los que se observan los frentes de imbibición (interfaz entre la zona

ocupada por el fluido que moja y la ocupada por el que no lo hace (ver figura 1). Un primer método consiste en ver, a pequeña escala, la evolución espacio-temporal de los frentes. En este caso los frentes llegan a tener estructura fractal (patrones tipo dedos que se repiten a varias escalas de longitud) y cuya caracterización teórica es complicada (Feder, 1988). Otra forma consiste en conocer la evolución temporal del frente promedio que puede medirse con una escala mayor o mediante la promediación espacial de los frentes pequeños (Bell y Cameron, 1906; Bean *et al.*, 1990; Fanelli *et al.*, 1990; Gillespie, 1958 y 1959; Hodgson y Berg, 1988; Middleman, 1995; Pezron *et al.*, 1995; Kramer, 1988; Washburn, 1921).

La imbibición en papel, es decir, su ley de crecimiento, está muy relacionada con la imbibición en otros materiales fibrosos como la tela o los medios granulados (como la arena y los suelos). En este trabajo, por facilidad de visualización, costo reducido y rapidez del fenómeno, reportamos mediciones de los frentes promedio de imbibición en papel comercial con diferentes formas. El principal interés de este trabajo es discutir hasta qué punto la geometría y la gravedad afectan la rapidez de imbibición. Por tanto, en la primera parte damos una breve descripción teórica del fenómeno de imbibición en tiras rectas y triangulares de papel, así como de las leyes analíticas que los gobiernan. En la segunda parte presentamos una serie de experimentos de imbibición en papel para ambas geometrías y presentamos la comparación con los modelos analíticos. Finalmente damos las principales conclusiones y perspectivas futuras de este trabajo.

I. Discusión teórica

1. Tira recta (rectangular)

La imbibición en tiras rectas verticales de papel ha sido estudiada a lo largo del presente siglo debido a su gran importancia práctica (ver Bell y Cameron, *op. cit.*; Bean *et al.*, *op. cit.*; Fanelli *et al.*, *op. cit.*; Gillespie, *op. cit.*). Desde esos primeros estudios los modelos fenomenológicos sugirieron que la im-

* Subdirección de Exploración y Producción, Instituto Mexicano del Petróleo (IMP). Apartado Postal 14-805, C. P. 07730, México, D. F. Teléfono y fax: (5) 5 67 82 32. Correo electrónico: amedina@www.imp.mx

Este trabajo fue realizado con el apoyo del IMP bajo los proyectos de investigación P-00933 y P-01116 del Programa de Yacimientos Naturalmente Fracturados. Abraham Medina y José Antonio Córdova agradecemos al Vis. Candelario Pérez-Rosales del IMP y al Dr. José Luis Córdova de la Universidad de California en Berkeley su apoyo constante durante la realización de este trabajo.

bibición se debe a la competencia entre la presión capilar (inversamente proporcional a la longitud característica del pequeño espacio poroso en que el fluido fluye) y la presión hidrostática debida al peso de dicha columna de fluido. Para este caso el modelo semidetallado de más éxito apunta a que el papel está formado de fibras (tubos cilíndricos) por las que fluye (gracias a la capilaridad) el fluido que moja. En cada tubo capilar de radio r el fluido de densidad ρ asciende hasta la altura de equilibrio b^* . Dicha altura se obtiene mediante el balance de la presión de Laplace y la presión de la columna hidrostática, i.e., $r g b^* = 2s \cos \alpha / r$, lo cual lleva a que

$$b^* = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r} \quad (1)$$

donde s es la tensión superficial del fluido, α es el ángulo de mojado del fluido con el sólido y g es la aceleración de la gravedad. En términos de la longitud capilar $a = (\sigma / \rho g)^{1/2}$, la altura b^* en la ecuación (1) adquiere la forma $b^* = 2a^2 \cos \alpha / r$. A partir de esto es fácil notar que la ecuación (1) es válida sólo cuando $r \ll a$.

Por otro lado, la velocidad de elevación del fluido en el capilar cilíndrico debida a la existencia de un gradiente de presión $\tilde{\nabla} p$, obedece la ley de Poiseuille

$$V = - \frac{r^2}{8\mu} \nabla p \quad (2)$$

donde V es la velocidad media y μ es la viscosidad dinámica del fluido. Durante la etapa de elevación, la altura b del frente líquido es menor que la altura de equilibrio b^* . Considerando que $V = db/dt$ y que $\tilde{\nabla} p = (1/b)[-2s \cos \alpha / r]$, la ecuación (2) lleva a que

$$\frac{db}{dt} = \frac{r\sigma \cos \theta}{4\mu b} \quad (3)$$

La solución a esta ecuación diferencial es

$$b^2 = \frac{1}{2} r I^* t \quad (4)$$

donde t es el tiempo y $I^* = s \cos \alpha / \mu$. Esta ecuación es comúnmente referida como la ley de Washburn para un capilar. Un tiempo de elevación característico puede ser estimado cuando en la ecuación (4) hacemos $b \approx b^*$, entonces $t^* = 2b^{*2} / r I^*$.

En la extensión a un medio poroso (conformado por infinidad de cilindros), sólo los factores geométricos son tomados en cuenta, es decir,

$$b^2 = \frac{1}{2} \frac{r'}{k^2} I^* t = \frac{\sigma \cos \theta r'}{2\mu k^2} t = \beta t \quad (5)$$

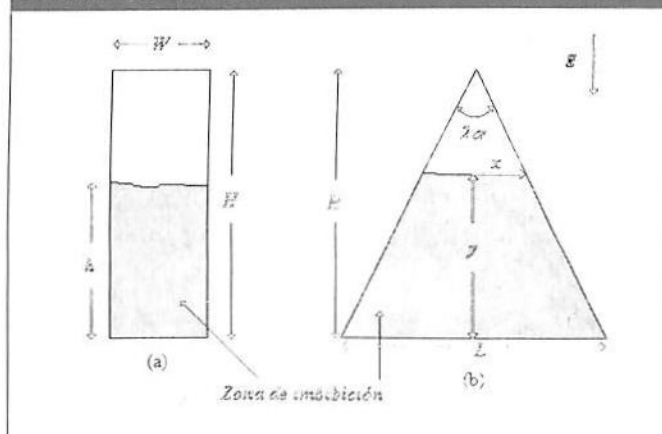
en donde r' es el radio capilar medio, b es un parámetro definido en la misma ecuación y k es la tortuosidad del medio poroso (medida relativa de la desviación respecto a la línea recta del camino seguido por un elemento de fluido entre dos puntos, por ello $k \geq 1$); la ecuación (5) es nuevamente la ley de Washburn para la imbibición en un medio fibroso como el papel o las telas y es razonable esperar que se satisfaga sólo cuando la gravedad no es importante en el fenómeno.

Otra manera de tratar el problema y que, en principio, no considera como necesaria la existencia de tubos capilares consiste en estudiar la imbibición en una tira vertical de ancho W , grosor D y longitud de avance b (figura 1a). Debido a que el problema ocurre a bajo número de Reynolds, los términos inerciales pueden ser despreciados y, entonces, la fuerza ascensional se origina de la menor energía en la superficie interna mojada, la cual es proporcional al área transversal WD . Por otro lado, la fuerza friccional tiende a frenar el movimiento generado por la fuerza ascensional. Dicha fuerza friccional es proporcional al volumen de la zona mojada, WDb , y a la velocidad del frente db/dt . La ecuación de movimiento es entonces

$$C_1 W D = C_2 W D b \frac{db}{dt} \quad (6)$$

en donde C_1 y C_2 son constantes de proporcionalidad. Reordenando términos encontramos que

FIGURA 1. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS FRENTES DE IMBIBICIÓN EN PAPEL. (A) PATRÓN LINEAL DE IMBIBICIÓN EN UNA TIRA RECTANGULAR DE ANCHO W , GROSOR D Y ALTURA DEL PAPEL H . LA ZONA DE IMBIBICIÓN AL TIEMPO t ALCANZA LA ALTURA PROMEDIO $h(t)$. (B) TIRA RECTANGULAR DE BASE L , ÁNGULO 2α Y ALTURA PROMEDIO DEL FRENTES DE IMBIBICIÓN AL TIEMPO t , $y(t)$. LA ALTURA DEL TRIÁNGULO TAMBIÉN ES H Y SU GROSOR ES D .



$$b \frac{db}{dt} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\alpha}{2} \tag{7}$$

en donde a es una constante. La solución de esta ecuación es

$$b^2 = at \tag{8}$$

pues el frente de imbibición inicia al tiempo $t = 0$, i. e., $b(t=0)=0$. Comparando las ecuaciones (5) y (8), vemos que

$$\alpha = \beta = \frac{\sigma \cos \theta r'}{2\mu k^2} \tag{9}$$

En este punto es importante notar que al ancho W y el grosor D no aparecen explícitamente en la ley de crecimiento del frente promedio de imbibición, lo cual indica que el tamaño de la muestra no es importante mientras sea mayor que la longitud capilar a ($W, D, L \gg a$). Para propósitos de comparación con los resultados de la siguiente subsección introducimos las cantidades adimensionales $b^* = b/H$ y $t^* = t/(H^2 C_2/C_1)$, es decir, adimensionalizamos con la altura de tira y con el tiempo $T = H^2 C_2/C_1$. La forma adimensional de la ecuación (9) es, entonces,

$$b^* \frac{db^*}{dt^*} = 1 \tag{10}$$

y su solución toma la forma

$$y^{*2} = 2t^* \tag{11}$$

la cual es la forma adimensional de la ley de Washburn.

2. Tira triangular

Consideremos ahora una tira triangular de base L , altura H y ángulo $2a$, que se coloca sobre la fuente de fluido de manera que la imbibición inicie desde su base (figura 1b). En este caso, para construir la ecuación de balance de fuerzas, consideramos, como ocurre en los experimentos, que el frente promedio al tiempo t alcanza la altura y ; consideremos, aquí, que la distancia del centro a la orilla es x , de manera que x y y están relacionadas como $x = L(H-y)/2H$. Entonces el equivalente a la ecuación (6) es

$$C_1 D \frac{L(H-y)}{H} = C_2 \left[\frac{L y}{2} + y \frac{L(H-y)}{2H} \right] D \frac{dy}{dt} \tag{12}$$

donde C_1 y C_2 son, como antes, las constantes de proporcionalidad. Reorganizando términos en la ecuación (12) e introduciendo las variables adimensionales $y^* = y/H$ y $t^* = t/T$ encontramos que

$$\frac{y^{*2}}{2} \frac{dy^*}{dt^*} - y^* \frac{dy^*}{dt^*} + (1-y^*) = 0 \tag{13}$$

donde $T = H^2 C_2/C_1$. La solución exacta a esta ecuación diferencial, con condiciones de frontera $y(t=0)=0$, está dada a través de la ecuación trascendente

$$\frac{1}{2} y^{*2} - \frac{1}{4} y^{*4} + \frac{1}{2} \ln(1-y^*) + t^* = 0 \tag{14}$$

Es posible encontrar soluciones analíticas asintóticas para los casos de $a)$ pequeñas elevaciones de dicho frente ($y \ll 1$) y $b)$ elevaciones grandes del frente promedio ($y \approx 1$). Para el caso $a)$, quitando los $*$ a todas las variables adimensionales, usamos el desarrollo a segundo orden de $\ln(1-y) = -y - \frac{1}{2} y^2 + O(y^3)$ en la ecuación (14), lo que lleva directamente a que

$$y^2 = 2t \tag{15}$$

la cual corresponde a la forma adimensional de la ley de Washburn.

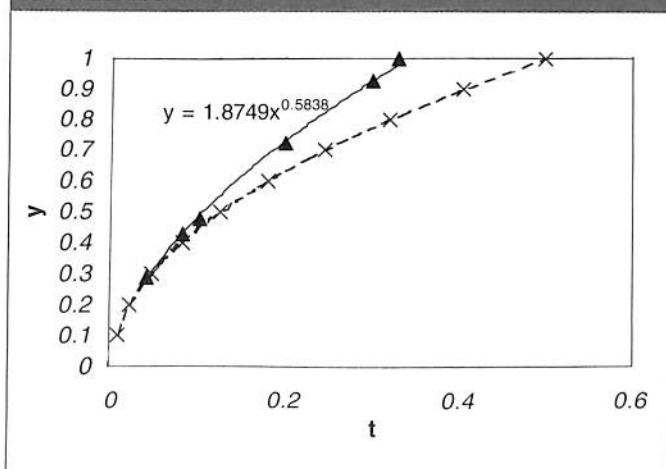
Para el caso $b)$ usamos el mismo desarrollo del logaritmo pero a tercer orden, es decir, $\ln(1-y) = -y - \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} y^3 + O(y^4)$.

La sustitución de esta expresión en la ecuación (14), nos lleva a la ecuación algebraica

$$\frac{1}{6} y^3 - \frac{1}{2} y^2 + t = 0 \tag{16}$$

La solución a esta ecuación no es difícil de encontrar, sin embargo, una forma más eficiente de visualizar la ley de crecimiento del frente promedio como función del tiempo, consiste en

FIGURA 2. ALTURAS ADIMENSIONALES INSTANTÁNEAS DE IMBIBICIÓN EN LAS TIRAS RECTANGULAR Y TRIANGULAR COMO FUNCIÓN DEL TIEMPO ADIMENSIONAL. LA CURVA PUNTEADA (---) CORRESPONDE A LA LEY DE WASHBURN, $y \approx \sqrt{2t^{0.5}}$, MIENTRAS QUE LA CURVA CONTINUA (—) SE AJUSTA A LA LEY DE CRECIMIENTO $y \approx 1.8749t^{0.5838}$. LOS SÍMBOLOS CORRESPONDEN A LOS EXPERIMENTOS.



generar la gráfica de la ecuación (16) y ajustarla a una ley de potencias. En la figura 2 mostramos las gráficas adimensionales (curvas) de los frentes promedio de imbibición para la tira rectangular (curva punteada) y la tira triangular (curva continua).

Mediante este método encontramos que la ley de crecimiento para la tira triangular se ajusta muy bien, en grandes alturas, a la relación

$$y \propto 1.87t^{1.58} \quad (17)$$

Para alturas pequeñas la evolución del frente promedio de imbibición se ajusta a la ley de Washburn (curva punteada)

$$y \propto 2t^{0.5} \quad (18)$$

De este análisis se concluye que el frente de imbibición promedio en la tira triangular el principio crece conforme la ley de Washburn y, a medida que la altura se incrementa, crece de acuerdo con la ley dada por la ecuación (17). Enseguida discutiremos la validez de estos resultados al compararlos con algunos experimentos.

II. Experimentos

Mediante videofilmación es posible evaluar, hasta con una resolución temporal de 1/30 s, la evolución del frente promedio de imbibición generado por la penetración de agua en papel comercial con un alto grado de homogeneidad. En este trabajo reportamos experimentos en las dos diferentes geometrías analizadas en la sección anterior. Las muestras rectangulares de papel usadas en nuestros experimentos fueron de 5'7 cm², 3'7 cm² y 10'7 cm² en donde $H \gg 7$ cm. Para la tira triangular usamos triángulos equiláteros de lado $L = 8$ cm, lo que produce alturas $H \gg 7$ cm.


Los frentes de imbibición fueron generados con agua destilada ($s \sim 72$ gr/s², $r = 1$ gr/cm³ y $m = 1$ cp) a temperatura ambiente (24°C). Los frentes fueron medidos cada 0.5 min y promediados en el espacio con hasta 5 medidas puntuales. El ajuste de los experimentos (símbolos sobre las curvas de la figura 2) con la teoría fue excelente y el rango de error se mantuvo dentro del 2% (el tamaño de los símbolos es del orden de este error). En el caso de las tiras rectangulares, todos los datos caen sobre la curva punteada independientemente del ancho del papel. Para el caso de la tira triangular, el ajuste a la ley de Washburn a pequeñas alturas y a la ley $y \propto 1.87t^{1.58}$ (ecuación (17) a alturas mayores fue muy bueno, lo cual muestra la bondad del modelo propuesto para esta geometría. La longitud capilar $a = (s/\rho g)^{1/2} = 0.27$ cm supera, con mucho, el tamaño típico de poro, que para este tipo de papel es del orden de $r \sim 10^{-4}$ cm (Fanelli *et al.*, 1990; Bean *et al.*, 1990). El tiempo característico para la imbibición com-

pleta en la tira recta ($b = H = 8$ cm) fue de 10 min, mientras que en la tira triangular ($y = H @ 7$ cm) fue de 7 min. Esto concuerda con los tiempos adimensionales $t^* = 0.5$ y $t^* = 0.33$ para las tiras rectangular y triangular, respectivamente. Finalmente, los anteriores valores para los tiempos y las distancias dan valores para la velocidad media del orden de $1.3 \cdot 10^{-2}$ cm/s para la tira recta y de $1.6 \cdot 10^{-2}$ cm/s para la tira triangular.

Conclusiones

En este trabajo hemos discutido teórica y experimentalmente la evolución temporal del frente promedio de imbibición en papel. Para el caso de tiras rectangulares, en donde el ancho del papel es uniforme, la ley que gobierna es conocida como la ley de Washburn. Mediante el estudio de una geometría simple, como un triángulo equilátero (aunque para este caso la ley de potencia $y \propto 1.87t^{1.58}$ es general y no depende del tipo de triángulo), es posible mostrar cómo la ley de Washburn es alterada.

También encontramos que en el límite de pequeñas alturas, en la tira triangular, la ley de Washburn se mantiene. Es importante mencionar que los frentes de imbibición tienen una cota máxima que se da cuando las fuerzas de tensión superficial e hidrostáticas se equilibran. Aunque experimentalmente es relativamente simple llegar a ese límite, desde el punto de vista teórico los modelos fenomenológicos aquí tratados no permiten conocer la dependencia funcional de dicha cota; es claro, entonces, que modelos más detallados son muy necesarios.

Por último, hasta donde sabemos los efectos de la geometría sobre los frentes promedio de imbibición no habían sido tratados. Sin embargo, este tipo de consideraciones es muy importante pues, en general, los yacimientos de aguas subterráneas y de petróleo (en donde la imbibición es un fenómeno cotidiano) casi nunca tienen geometrías tan uniformes como la rectangular. La extensión de este enfoque a geometrías más complicadas (y tridimensionales) y a otros medios porosos como rocas y areniscas está ahora en progreso. 



BIBLIOGRAFÍA

- Bean, C. P.; Bubb, J. I. y Fanelli, D. E. (1990). "Fluid Uptake by a Blotter", en *Am. J. Phys.* 59(6): 533-535.
- Bell, J. M. y Cameron, E. K. (1906). "The Flow of Liquids Through Capillary Spaces", en *J. Phys. Chem.* 10: 658-674.
- Fanelli, D. E.; Bubb, J. I. y Bean, C. P. (1990). "The Quicker-Picker-Upper", en *The Phys. Teach.* 28: 548-549.

Feder, J. (1988). *Fractals*. Plenum Press, New York.

Gillespie, T.

____ (1958). "The Spreading of Low Vapor Pressure Liquids on Paper", en *J. Coll. Sci.* 13: 32-50.

____ (1959). "The Capillary Rise of a Liquid in a Vertical Strip of Filter Paper", en *J. Coll. Sci.* 14: 123-130.

Hodgson, K. T. y Beng, J. C. (1988). "The Effect of Surfactants on Wicking Flow in Fiber networks", en *J. Colloid. Int. Sci.* 121(1): 22-31.

Kramer, G. J. (1998). "Static Liquid Hold-up and Capillary Rise in Packed Bed", en *Chem. Eng. Sci.* 53(16): 2985-2992.

Middleman, S. (1995). *Modeling Axisymmetric Flows*. Academic Press, New York.

Pezron, I.; Bourgain, G. y Quere, D. (1995). "Imbibition of a fabric", en *J. Colloid. Int. Sci.* 173: 319-327.

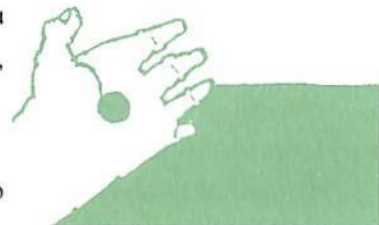
Washburn, E. W. (1921). "The Dynamics of Capillary Flows", en *Phys. Rev.* 17: 273-282.



Nota Para una desconocida

A Sara María Ochoa

Luis Brito Cruz

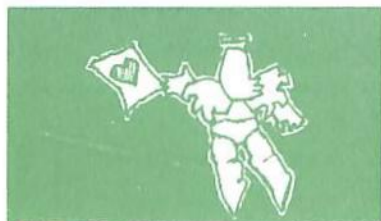


Abajo, la gente murmura mi futuro; arriba, parado al borde de una tarde gris, miro a esa gente con cierta lástima, como se mira a un animal que está muriendo.

Pero no sé por quién tengo más lástima ¿por mí, por ellos, por quien todavía no llega? El viento intenta acelerar mis acciones, me empuja, me seduce con su silbido a probar su sensación de libertad. Mientras, se escuchan las campanas de San Juan, limpias, sonoras, puntuales.

Primera campanada. Rasga el aire y busca anidarse en mis oídos, los viola.

Con un destello de falsa esperanza en los ojos miro entre la muchedumbre, como buscando por última vez lo no hallado en la vida.



Segunda campanada. Se adentra vibrante en mis entrañas, como intentando romper mis emociones.

Saco del bolsillo un papel que desdoble y leo con ansiedad. Comienzo a llorar.

Tercera campanada. Inunda cada rincón, cada puerta y ventana, como anunciando el cumplimiento de mi promesa.

La gente mira por las rendijas, habla, duda, se angustia. Cubro mi rostro con el papel entre mis manos, como para secar mis lágrimas, pero en realidad lo hago para no ver el vacío al que me entrego.

Cuarta y última campanada. Ya no la escucho, ya no vibro con ella, a nadie llama, sólo ha sonado para ahogar el golpe de mi cuerpo contra el suelo y confundirse con el llanto de una mujer desconocida que toma el papel a medio vuelo y lee:

"Te estuve esperando."