

# Oscilaciones en el campo de velocidades en un silo bidimensional

M. PLIEGO,\* CÉSAR TREVIÑO\* Y ABRAHAM MEDINA\*\*

## *Oscillations in the Velocities Field of a Bidimensional Silo*

*Abstract. In this work we study experimentally the non-stationary whole velocity field, in a wide spatial zone, during the discharge of monodisperse granular material from a flat-bottomed 2D silo. As a main result we found that it is possible to characterize the transversal oscillations of the velocity field within the silo. This result has been obtained by using a method similar to particle image velocimetry (PIV) usually employed in fluid mechanics. Oscillations have a characteristic frequency  $f_c = 2.4$  Hz.*

## Introducción

En apariencia, uno de los sistemas físicos más simples contruidos por el hombre para la medición del tiempo son los relojes de arena. En efecto, desde su aparición en la Edad Media se sabía con detalle que el gasto, o sea la cantidad de granos que fluyen a través de un bulbo al otro del reloj de arena, en la unidad de tiempo, es aproximadamente constante. Este hecho permitió que tales sistemas, aparte de su valor estético —pues muchos relojes de arena eran verdaderas obras de arte—, tuvieran una utilidad práctica sobre todo en la navegación [1].

Con el paso del tiempo, sistemas similares a los relojes de arena fueron adoptados, pero con dimensiones muchas veces mayores, en un gran número de procesos tecnológicos en donde el vaciado de granos es una parte esencial durante su manejo y transportación. Estos sistemas, para los cuales hay un gran número de tamaños y formas, son genéricamente conocidos como silos o tolvas. No obstante su amplio uso, la física de estos sistemas no es bien conocida y casi podríamos decir que apenas está en proceso de construcción [1-17].

Al igual que en los relojes de arena, la mayor parte del conocimiento sobre el comportamiento de los silos proviene, sobre todo, de estudios experimentales y de campo.

Algunas investigaciones experimentales han permitido detectar, a pesar de los gastos, que existen intensas fluctuaciones en la presión y en la densidad. Su naturaleza es tan compleja que resulta sorprendente que el gasto se mantenga constante. Los estudios experimentales han tenido una fuerte motivación en estudios de campo en donde se han detectado vibraciones en las estructuras, inducidas por el flujo granular, las cuales incluso han llegado a colapsar silos de grandes dimensiones [9, 10].

Hasta ahora, el análisis experimental de las fluctuaciones en la presión o en la densidad sólo manifiestan la complejidad del flujo granular, pero no permiten identificar las condiciones bajo las cuales se producen fluctuaciones periódicas [3-6]; es decir, oscilaciones que podrían ser el origen, mediante resonancia, de las vibraciones mecánicas de las paredes de los silos. En este trabajo aportamos, por primera vez, un estudio experimental sobre la existencia y la naturaleza de las oscilaciones internas durante el flujo granular en un silo idealizado. Para describir tal estudio, el trabajo se divide en dos apartados: en el primero discutimos uno de los resultados mejor establecidos en el flujo en silos, la dependencia funcional (del valor medio temporal) del flujo másico (o gasto), el cual no depende básicamente de la altura de llenado. A partir de esto planteamos la necesidad de evaluar, desde



\* Departamento de Física, Facultad de Ciencias, UNAM. A. P. 70-564, C. P. 04510 México, D. F.

\*\* Centro de Ingeniería y Desarrollo Industrial. A. P. 1167, C. P. 76130. Queretaro, Qro., México.

Este trabajo ha sido apoyado por el CONACYT bajo el proyecto número 405P-E9506. Abraham Medina agradece a J. Andrade, A. Cordova y E. Luna su ayuda en el análisis de los datos; y al Dr. Eduardo Ramos y a su grupo su apoyo en el uso del software digitalizador.

un punto de vista temporal, las diferentes cantidades asociadas al flujo granular. En el segundo, presentamos brevemente el método de medición y el resultado principal de las fluctuaciones en el campo completo de velocidades en una amplia zona del silo. Finalmente, presentamos las conclusiones de este trabajo.

## I. Flujo másico

Conviene mencionar que Hagen, hacia finales del siglo pasado, fue el primero en proponer un modelo satisfactorio para explicar la ley aproximada que obedece el flujo másico durante el flujo de material granular [1, 2]. Hagen encontró que la masa que se traslada en la unidad de tiempo del bulbo superior al bulbo inferior, por efecto de la gravedad, obedece aproximadamente a la relación

$$\langle m' \rangle = D^{5/2} g^{1/2} \langle \rho \rangle, \quad (1)$$

en donde  $\langle m' \rangle$  es el valor medio temporal del flujo másico;  $D$ , el diámetro de la apertura (circular) del silo o del reloj de arena;  $g$ , la aceleración de la gravedad y  $\langle \rho \rangle$ , el valor medio temporal de la densidad. La cantidad  $\langle m' \rangle$  tiene unidades de masa por unidad de tiempo y su forma funcional es fácilmente derivable al hacer uso del análisis dimensional [1]. En efecto, si  $\langle m' \rangle$  debe tener unidades de masa/tiempo y las cantidades físicas relevantes para la ocurrencia del flujo granular son el diámetro de la salida, la aceleración de la gravedad y la densidad del material, entonces la única combinación de parámetros que produce unidades de masa/tiempo, es tal que

$$[\langle \rho \rangle]^\alpha [g]^\beta [D]^\gamma = [\text{masa/tiempo}],$$

entonces  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1/2$  y  $\gamma = 5/2$ . Análisis considerablemente más complejos producen, en esencia, el mismo resultado. Nótese que para un silo bidimensional  $\gamma = 3/2$ .

Estudios experimentales recientes [4, 5] muestran que la ecuación (1) se cumple de manera aproximada, aunque sólo bajo los promedios temporales, porque la densidad—como ya mencionamos previamente—tiene fluctuaciones muy importantes alrededor del valor medio. A partir de esta discusión en torno al flujo másico, es posible advertir que el estudio experimental de las fluctuaciones temporales del campo de velocidades (y de otras cantidades asociadas a éste) es en sí mismo de gran importancia para la formulación de modelos no estáticos o no estacionarios del flujo granular.

Así, mediante la implementación de una técnica similar a la llamada Velocimetría de Imagen de Partícula (VIP) [18], hemos logrado obtener mediciones del campo de velocidades completo, es decir, en una amplia zona del silo. Este tipo de mediciones no se han realizado con anterioridad y

nos han permitido detectar oscilaciones periódicas del campo completo de velocidades, en la dirección transversal a la del flujo principal. En la siguiente sección discutimos brevemente el método de medición y los principales resultados experimentales.

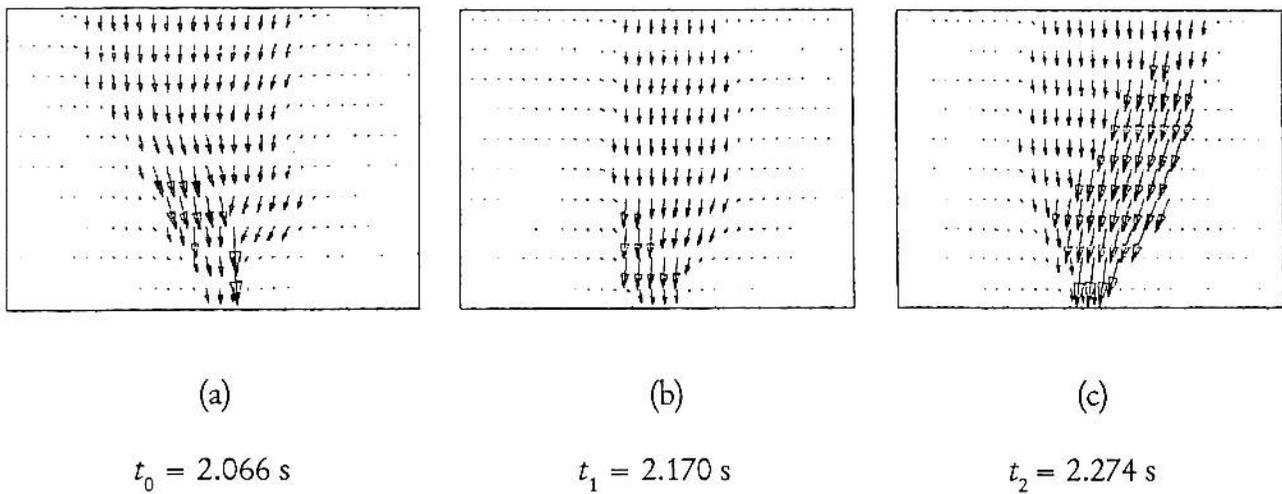
## II. Campo completo de velocidades y oscilaciones en una tolva plana rectangular

La esencia de nuestra técnica de VIP consiste en el análisis de una videofilmación del flujo granular inducido al abrir la apertura inferior de un silo transparente de vidrio de 1 m de alto por 0.3 m de ancho. La filmación, realizada con una resolución temporal de 1/500 s, de la cual es posible disponer de cada imagen (cuadro) del flujo cada 1/30 s, se realiza con suficiente cuidado para que los granos de vidrio sean distinguidos del fondo, en una escala de 256 tonos de gris, mediante un *software* apropiado. En el silo bidimensional esto se logra trivialmente, pues la monocapa de granos esféricos blancos es fácilmente distinguible del fondo negro del silo. El tamaño de la apertura de salida fue de 2 cm.

Una vez hecha esta primera distinción en las imágenes, otro *software* comercial asigna a los centros de los granos un mismo valor en la escala de grises y divide en una malla, es decir, en un conjunto de regiones cuadradas de igual tamaño, toda la región de interés. Después, este *software* toma la siguiente imagen del flujo y hace una división similar a la de la primera imagen. Finalmente, a través de la correlación espacial y temporal de similares regiones cuadradas (pero correspondientes a las dos imágenes consideradas), encuentra los desplazamientos relativos de pares de partículas en cada región cuadrada de la malla. Esto es hecho por el *software* entre cada par de imágenes y ello, al finalizar el proceso de correlación, permite conocer la velocidad media en cada cuadro de la malla a los tiempos  $t = 1/30, 2/30, \dots, M/30$ , donde  $M$  es el valor del último cuadro analizado y que en nuestros experimentos tiene un valor aproximado de 800.

Este método permitió evaluar los campos de velocidades en zonas de 30x30 cm<sup>2</sup> con divisiones de hasta 900 cuadrados en toda la malla y en un intervalo temporal,  $T$ , de hasta 27 s. Como referencia, debemos decir que el tamaño de los granos fue de  $3.15 \pm 0.05$  mm de diámetro, de manera que para una división de 900 cuadrados en la malla el número aproximado de pares de granos, por cada cuadrado, fue de aproximadamente 5. En la figura 1 se muestran los campos de velocidades para esta zona de medición. Nótese que en el tiempo  $t_1$  el flujo es asimétrico y está cargado a la izquierda, mientras que en el tiempo  $t_2$  el flujo es aproximadamente central, por otra parte, en el tiempo  $t_3$  el flujo vuelve a ser asimétrico

FIGURA 1. CAMPO INSTANTÁNEO DE VELOCIDADES PARA EL FLUJO GRANULAR EN UNA TOLVA BIDIMENSIONAL CON ORIFICIO DE SALIDA EN EL CENTRO. LAS FLECHAS EN LAS FIGURAS INDICAN LA DIRECCIÓN EFECTIVA DEL VECTOR VELOCIDAD Y SU TAMAÑO ES UNA MEDIDA RELATIVA DE SU MAGNITUD. LAS FIGURAS A, B Y C SON, COMO SE INDICA, MEDIDAS INSTANTÁNEAS A DISTINTOS TIEMPOS.



y está cargado a la izquierda. Esto ilustra visualmente acerca de la naturaleza oscilatoria del flujo granular.

Por comodidad en los cálculos, el origen del sistema coordenado  $(x, y)$  fue ubicado en la parte superior izquierda de la imagen y es tal que  $x$  es perpendicular a la pared y a la dirección principal de flujo;  $y$  es paralela a la gravedad y va en la dirección principal del flujo. Las oscilaciones transversales en el flujo, mostradas en la secuencia de la figura 1, pueden ser analizadas mediante el cálculo del espectro de potencia de la cantidad

$$G(t) = \frac{1}{Nv_{av}} \sum_{i=1}^N x_i v_i - \left\langle \frac{1}{Nv_{av}} \sum_{i=1}^n x_i v_i \right\rangle, \quad (2)$$

en donde  $\langle \rangle$  denota el promedio temporal,  $N$  corresponde al número total de regiones cuadradas  $i$  (30, en nuestro caso) a una altura dada  $y = cte.$ ,  $x_i$  es el valor  $x$  en el nodo  $i$  medido desde el lado izquierdo de la tolva. La cantidad

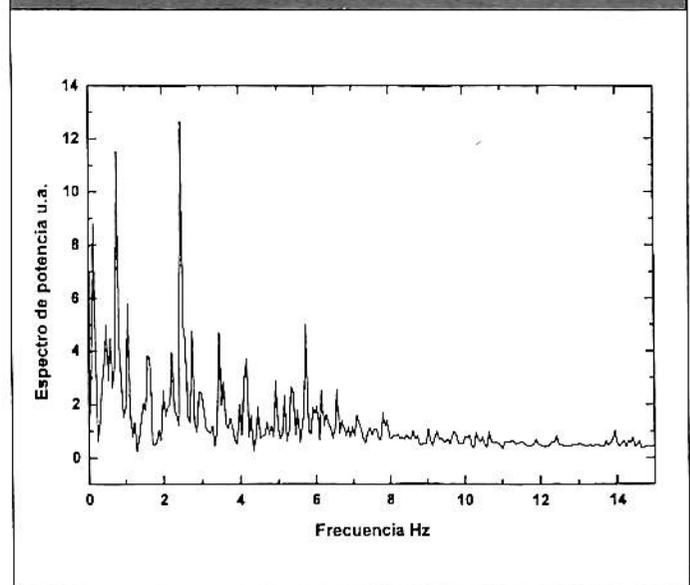
$v_{av} = \left( \sum_{i=1} v_i \right) / N$  es el valor medio espacial de la velocidad vertical  $v$ . Nótese también que  $G(t)$  es una medida, a una altura constante respecto de la base del silo, del momento de la velocidad y, por tanto, constituye una adecuada cantidad para la medida de las oscilaciones en el campo de velocidades. Además, se cumple que  $\langle G(t) \rangle = 0$ .

La figura 2 muestra el espectro de potencia de la cantidad  $G(t)$  a la altura  $y = 24$  cm (medida desde el fondo del silo). Esta gráfica se obtuvo con una secuencia de aproximadamente 800 imágenes (secuencias temporales) y en ella destaca el pico máximo alrededor de  $f_c = 2.4$  Hz. Esta frecuencia característica corresponde a la frecuencia principal de oscilación del campo de velocidades, es decir,  $t_c = 1/f_c$  es el tiempo que toma a la oscilación ir y regresar

desde cualquiera de los extremos, a la altura  $y = 24$ . Este fenómeno de oscilación ya fue reportado por otros autores [8], aunque tal fenómeno no se caracterizó en función de sus frecuencias características.

A partir de la figura 1 y de la discusión previa es fácil notar que el valor de la frecuencia característica disminuye conforme lo hace la altura del silo y llegar a anularse muy cerca del fondo. Este mismo hecho se observa mediante el cálculo del espectro de potencia de  $G(t)$  para  $y \rightarrow 0$ , en donde  $y$  es medida desde el fondo del silo. Este resultado implica que la parte superior del flujo granular

FIGURA 2. ESPECTRO DE POTENCIA (EN UNIDADES ARBITRARIAS U. A.) DE LA CANTIDAD  $G(t)$  CALCULADO EN  $y = 24$  CM (MEDIDO DESDE EL FONDO) EL CUAL MUESTRA LA EXISTENCIA DE UNA FRECUENCIA CARACTERÍSTICA PRINCIPAL PARA LAS OSCILACIONES DEL CAMPO DE VELOCIDADES Y LA EXISTENCIA DE OTRAS FRECUENCIAS DE OSCILACIÓN PARA ESTA CANTIDAD. LA FRECUENCIA CARACTERÍSTICA PRINCIPAL CORRESPONDE AL PICO MÁS ALTO Y OCURRE APROXIMADAMENTE EN  $f_c = 2.4$  HZ.



oscila periódicamente y lo hace para mantener más o menos simétrica (aunque con una fuerte depresión en el centro) la superficie libre del material granular. Claramente, las oscilaciones del campo de velocidades se atenúan o francamente dejan de ocurrir muy cerca del orificio de salida.

## Conclusiones

Mediante el uso de una técnica similar a la VIP hemos podido caracterizar el campo completo de velocidades en un medio granulado. Hasta donde sabemos es la primera vez que esta técnica, ideada para fluidos, es utilizada en estos materiales. Medidas precisas de la bondad de este método y de otras propiedades del flujo granular en silos, como la intensidad de la turbulencia, pueden ser encontradas en otro lugar [19].

Por otro lado, es importante destacar que la existencia de fluctuaciones y oscilaciones periódicas en el campo de velocidades hasta ahora no ha sido predicha por ninguno de los modelos desarrollados para el flujo granular en tolvas. Casualmente, las frecuencias de las oscilaciones principales del campo de velocidades cerca de la superficie libre son del orden de magnitud de la frecuencia natural de las estructuras metálicas usadas en la construcción de silos (construidas comúnmente de acero inoxidable). Esto podría implicar la posibilidad de resonancia de las estructuras de los silos, aunque en realidad hay dos problemas para que esto ocurra: por una parte, los silos reales son tridimensionales y, por otra, el espectro de potencia deja ver la existencia de otras oscilaciones que al superponerse con la frecuencia característica principal podría anular la transferencia periódica de momento a la estructura del silo. Estudios en esta dirección están en proceso. 🏠



## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Mills, A. A.; Day, S. y Parkes, S. (1996). "Mechanics of the Sandglass", en *Eur. Jour. Phys.* (17) 97-109.
- [2] Tuzun, U.; Houlby G. T.; Nedderman, R. M. y Savage, S. B. (1982). "The Flow of Granular Materials II: Velocity Distributions in Slow Flow", en *Chem. Eng. Sci.* (37) 1691-1709.
- [3] Schick, K. L. y Verveen, A. A. (1974). "1/f Noise with a Low Frequency White Noise Limit", en *Nature* (251) 599-601. London.
- [4] Andrade, J.; Treviño, C. y Medina, A. (1996). "Experimental Evidence of Density Fluctuations in 2D Bins", en *Phys. Lett. A* (223) 105-110.
- [5] Veje, C. T. y Dimon, P. (1997). "2D Granular Flow in a Small Funnel", en *Phys. Rev. E* (56) 4329-4337.
- [6] Baxter, G. W.; Leone, R. y Behringer, R. P. (1993). "Experimental Test of Time Scales in Flowing Sand", en *Europhys. Lett.* (21) 569-574.
- [7] Khelil, A. y Roth, J. C. (1994). "Gravitational Flow Behaviour of Granular Materials", en *Eur. Jour. Mech. B/Fluids* (13) 57-72.
- [8] Sakaguchi, H.; Ozaki, E.; Igarashi, T. (1993). "Plugging of the Flow of Granular Materials During the Discharge From a Silo", en *Int. Jour. Mod. Phys. B* (7) 1949-1963.
- [9] Brown, R. L. y Richards, J. C. (1970). *Principles of Powder Mechanics*. Oxford University Press, Oxford.
- [10] Nedderman, R. M. (1992). *Statics and Kinematics of Granular Materials*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [11] Ristow, G. H. (1992). "Simulating Granular Flow with Molecular Dynamics", en *Jour. Phys. I* (2) 649-662. France.
- [12] Hong, D. C. y McLennan, J. A. (1992). "Molecular Dynamics Simulations of Hard Sphere Granular Particles", en *Physica A*, (187) 159-171.
- [13] Hirshfeld, D.; Radzyner, Y. y Rapaport, D. C. (1997). "Molecular Dynamics Studies of Granular Flow Through an Aperture", en *Phys. Rev. E* (56) 4404-4415.
- [14] Kafui, K. D. y Thornton, C. (1997). "Some Observations on Granular Flow in Hoppers and Silos", en *Powders and Grains 97*, ed. R. P. Behringer y J. T. Jenkins. A. A. Balkema, Rotterdam. pp. 511-514.
- [15] Wang, F.; Gardner, C. y Schaeffer, D. G. (1992). "Steady-State Computations of Granular Flow in an Axisymmetric Hopper", en *SIAM Jour. Appl. Math.* (52) 1076-1088.
- [16] Haussler, U. y Eibl, J. (1984). "Numerical Investigations on Discharging Silos", en *Jour. Eng. Mech.* (11) 957-971.
- [17] Srinivasa Mohan, L.; Nott, P. R. y Kesava Rao, K. (1997). "Fully Developed Flow of Coarse Granular Materials Through a Vertical Channel", en *Chem. Eng. Sci.* (52) 913-933.
- [18] Buchhave, P. (1991). "Particle Image Velocimetry-Status and Trends", en *Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics 1991*. ed. J. F. Keffer, R. K. Shah, y E. N. Ganic. Elsevier, Amsterdam. pp. 35-47.
- [19] Medina, A.; Cordova, A.; Luna, E. y Treviño, C. (1998). "Velocity Field Measurements in a Near 2D Silo", en *Int. Jour. Mod. Phys. B*. (por enviarse).