

# Flujos lento y rápido de un medio granulado: la influencia de la gravedad y la fricción

ABRAHAM MEDINA, AURELIO TAMEZ Y CARLOS SANDOVAL\*

## *Slow and Rapid Flows of a Granular Media: the Influence of the Gravity and the Friction*

**Abstract.** *In this work we present a review on the main aspects of the granular media within a box. We study the slow and rapid granular flows in this system under gravity and external forces. The role of the gravity and frictional forces are emphasized as a mechanism to control the deformation of these media.*

### I. Aspectos generales

La arena, los suelos, los polvos medicinales, industriales y alimenticios y los granos agrícolas, entre otros, son un conjunto de materiales conocidos como medios granulados. Para dar una idea de su importancia en nuestra vida cotidiana, es conveniente decir que en la industria química estos materiales representan, en términos de su peso, aproximadamente 50% de los productos terminados y 75% del material en bruto [1, 2, 3]. Sin embargo, a pesar de su abundancia, el comportamiento de los medios granulados es aún poco entendido [1, 4, 5, 6, 7, 8]. Para resaltar sólo una de las dificultades que ello origina, podemos mencionar que, según cálculos recientes, se estiman desperdicios de hasta 40% en la capacidad de muchas plantas industriales debido a problemas relacionados con el transporte de dichos materiales [2, 3]. Es lógico insistir que la comprensión del comportamiento de los medios granulados puede representar sustanciales ahorros y mejoras en los procesos de manejo, transporte y control de calidad de estos materiales.

Desde el punto de vista de su composición (microestructura), los medios granulados son agregados de granos rígidos que interactúan

principalmente por contacto (fricción y colisiones inelásticas entre ellos), los cuales se encuentran inmersos en un fluido intersticial que generalmente es aire o agua. No obstante, si la densidad de los granos constituyentes del medio granulado es mucho mayor que la del fluido intersticial o el material está muy empaquetado, entonces las interacciones por contacto dominan a los esfuerzos viscosos y a las interacciones fluido-partícula. Esto significa que la presencia del fluido intersticial puede ser despreciada. Además, el tamaño característico de los granos individuales en un medio granulado puede variar desde unas cuantas décimas de micrómetros, en el caso de los polvos ultrafinos, hasta algunos centímetros, en el caso de sólidos fracturados [1].

Esta aparente simplicidad en la estructura (tamaño y forma) y en la interacción entre granos (interacción tipo esferas duras inelásticas), contrasta enormemente con la presencia de cúmulos atómicos o moleculares en los líquidos o en los sólidos, debido a que a menudo estos cúmulos dan origen a complejos potenciales de interacción, lo cual dificulta el cálculo de sus propiedades macroscópicas.

\* Facultad de Ciencias, UAEM. A. P. 2-139, C. P. 50000. Toluca, México. E-mail: amedina@coatepec.uaemex.mx

Parte de este trabajo se presentó en la Facultad de Ciencias de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, en un curso sobre medios granulados en abril de 1997.

Agradecemos a Máximo Agüero, Jorge Andrade, Erick Luna, Jorge Orozco y César Treviño, por las útiles discusiones en torno a esta fascinante área de la física moderna. Abraham Medina agradece a su esposa Paty por sus interesantes preguntas, que dieron origen al estudio de los sistemas acelerados.

Este trabajo ha sido apoyado por el CONACYT (proyecto 405P-E9506) y por la UAEM (proyecto 1168/96C).



Aún con estas ventajas el estudio teórico de los medios granulados a partir de la interacción entre granos (descripción micromecánica), es actualmente muy limitado [9, 10, 11] y carece de los alcances de las teorías microscópicas (estadísticas y cinéticas) de los líquidos y los sólidos. En las siguientes secciones se verá que los principales responsables de esto son la acción de la gravedad, la inhomogeneidad en el material granular causada por la existencia simultánea de zonas de alta y baja concentración de granos, las colisiones inelásticas entre granos, y la fricción.

Por otro lado, en la aproximación del continuo, esto es, cuando la interacción entre granos individuales en principio no requiere considerarse, la dinámica granular puede describirse al analizar elementos de volumen que contienen un gran número de granos. No obstante, esta aproximación solamente es útil para describir correctamente muy pocos fenómenos, puesto que a menudo se requiere obtener información a nivel de granos individuales.

Los fenómenos colectivos más importantes en un medio granulado son la dilatancia, la segregación y el arqueo. La dilatancia [12, 13] tiene que ver con los diferentes acomodos espaciales (empaquetamientos) que pueden adoptar los granos, ya sea en el caso estático o bajo movimiento. Debido a esto, en un medio granulado comúnmente ocurre que el material se dilata al aplicarle una fuerza compresiva, contrariamente a lo que ocurre con un líquido. Lo anterior es debido a que la fuerza aplicada sobre el material induce un desplazamiento relativo entre los granos que incrementa el espacio entre ellos.

La segregación granular consiste en la separación espacial del material en zonas o cúmulos de distinto tamaño de grano y, en última instancia, es debida a la existencia de movimiento relativo entre los granos [14], causado por vibración vertical o por rotación horizontal [15]. En el caso de sistemas en los cuales la segregación es inducida por vibración vertical, se sabe que ésta es fuertemente dependiente del tamaño relativo entre granos, de la aceleración de la vibración y por la fricción entre los granos y las paredes del recipiente. Recientemente se ha descubierto [16, 17] que, en recipientes con paredes verticales paralelas al vector aceleración de la gravedad (bins), la segregación granular es generada por el movimiento convectivo durante el cual los granos cerca de las paredes van hacia abajo y en el centro ascienden (convec-

ción descendente), mientras que el movimiento contrario (convección ascendente) ocurre en sistemas vibrados verticalmente pero con paredes inclinadas (hoppers). Este movimiento convectivo se produce por la fricción entre las paredes de los recipientes y los granos y ocurre aun en sistemas monodispersos. Un fenómeno llamado descompactación (aumento excesivo en la separación media entre granos), el cual también es inducido por vibración vertical, aparece igualmente por efecto de la fricción entre los granos y la pared [18].

El arqueo es un fenómeno fuertemente relacionado con el empaquetamiento de granos confinados en recipientes relativamente altos. Éste es originado por los azarosos contactos entre granos, los cuales forman cadenas de fuerza que distribuyen la mayor parte del peso del material granular sobre las paredes de los recipientes. A fin de cuentas, esto provoca que la magnitud de la presión muy cerca del fondo de los recipientes sea independiente de la altura de llenado [12, 13]. La dilatancia y el arqueo pueden ocurrir inclusive en materiales monodispersos, es decir, compuestos de granos de igual tamaño. Sin embargo, la segregación en sí misma no se da en medios granulados con estas características.

Una propiedad peculiar de los medios granulados es la fricción estática, la cual caracteriza al material y puede ser modelada tanto a escala de granos individuales como a escala del continuo [19, 20, 21]. En ambos niveles, la fricción estática está gobernada por la Ley de Coulomb [19], la cual establece que el movimiento relativo entre granos individuales o entre elementos de volumen ocurrirá sólo si se excede un valor límite, que es proporcional a la fuerza normal entre éstos. El rol que juega esta cantidad junto con la aceleración de la gravedad en el movimiento y la deformación del material granular, será el tema principal de este trabajo, en el que se destacarán los resultados experimentales que resaltan su importancia.

## II. Flujo granular

Tal como sucede en un fluido, un medio granulado puede deformarse bajo la acción de fuerzas externas. Desde este punto de vista, un fluido newtoniano se distingue de un medio granulado, puesto que el primero no soporta ninguna fuerza superficial tangencial y, por tanto, cualquier fuerza tangencial aplicada sobre el material provocará

un flujo cortante que, según la magnitud y frecuencia de dicha fuerza tangencial, podrá transmitirse a toda la región ocupada por el medio fluido [22]. En un medio granulado este mecanismo se origina a partir de fuerzas friccionales y puede generar distintos tipos de movimiento o flujo [20, 21]. El flujo lento o cuasiestático se distingue principalmente porque se mantienen en el material altas concentraciones de granos y nulos, o casi nulos, gradientes de velocidad. Esto hace que la deformación del material sea inducida casi exclusivamente desde la superficie y, por tanto, la dinámica de la deformación sea bien descrita por ecuaciones de balance de fuerza en las cercanías de la superficie del material.

Cuando la magnitud y frecuencia de las fuerzas tangenciales superficiales es muy grande, inicialmente ocurre un flujo granular lento, posteriormente se origina un régimen de movimiento más rápido, en donde cada partícula se mueve independientemente de las demás, existe un gradiente de velocidades no despreciable y la concentración de granos es pequeña. En este régimen de flujo rápido, también conocido como régimen de inercia de grano [20, 21, 23], existe una dirección preferencial de flujo, una velocidad media de bulto y, aparentemente, un movimiento aleatorio de los granos individuales respecto al flujo principal [10]. El problema de la transición entre un régimen y otro es complicado y no será discutido en este trabajo [11].

Es importante mencionar que en ambos regímenes de flujo existen fuerzas disipativas, que exigen la continua inyección de energía para mantener el movimiento. En la mayoría de los flujos granulares, una fuente importante de inyección de energía es el campo gravitacional. Coulomb enunció hace más de trescientos años la forma aproximada en que la presencia del campo gravitacional origina el movimiento superficial en un medio granulado, como una relación de proporcionalidad entre las fuerzas tangenciales y normales que actúan en un elemento de material granular [19]. La formulación de modelos más detallados que tomen en cuenta los distintos modos de disipación para cualquier régimen de flujo, constituye ahora una de las líneas de investigación más activas de la física. En las siguientes secciones se discutirán con detalle estos aspectos, concluyéndose que es posible describir los flujos lento y rápido en ciertas geometrías, así como las limitaciones de dichos modelos.

### III. La Ley de Coulomb y la Condición de Signorini

La Ley de Coulomb [19], también conocida como Criterio de Cedencia de Coulomb (CCC) [24, 25], es la aproximación más simple de relación constitutiva para un material granular bajo deformación lenta, y relaciona linealmente la fuerza tangencial  $\tau$  actuando sobre la superficie de un medio granulado con la fuerza normal  $N$ . Este criterio puede escribirse como

$$|\tau| \leq N\mu|\alpha| + c = N \tan\phi|\alpha| + c, \quad (1)$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de fricción que, como ya se mencionó, es característico de cada material;  $c$  es la cohesión;  $\phi$  es el ángulo de fricción interna que se relaciona con  $\mu$  de tal manera que  $\mu = \tan\phi$ , y  $\alpha$  es una constante adimensional con valores  $\alpha \in [-1, 1]$ .

Cuando  $\alpha = \pm 1$  se inicia el movimiento, debido a que la fuerza tangencial iguala a la fuerza friccional. Los coeficientes de fricción de cada material miden el ángulo respecto a la horizontal de la máxima pendiente estable del material. Los valores de los coeficientes normalmente varían entre 0.3 ( $\phi \cong 17^\circ$ ), para partículas esféricas lisas, y 1.5 ( $\phi \cong 56^\circ$ ), para partículas anguladas rugosas. Los valores de la cohesión varían desde casi cero, para materiales secos constituidos de granos gruesos, hasta alrededor de 50 kN para lodos arcillosos, es decir, materiales con un alto contenido de humedad.

La relación (1) establece un criterio aproximado en el que puede ocurrir movimiento superficial, o sea, cuando la fuerza tangencial total es igual o mayor a la suma de las fuerzas friccionales y cohesivas. El caso no cohesivo ( $c = 0$ ) con granos de igual tamaño, se conoce como el caso ideal y es el más estudiado teórica y experimentalmente en la física de los medios granulados.

Se ha observado [26] que el CCC puede extenderse al caso de flujo rápido. Por lo que es posible mostrar que existen dos términos friccionales: uno debido al movimiento relativo entre granos (que es función de la velocidad relativa) y otro generado por el CCC [27, 28].

Otra forma de ejemplificar la indeterminación en el problema del movimiento a partir de la aplicación de una fuerza tangencial en el medio granulado, puede verse a través de la existencia de condiciones de no suavidad en el CCC y en la consideración de que los granos en el material son rí-

gidos. En este caso, la no suavidad implica la inexistencia de una relación funcional entre la velocidad y las fuerzas de contacto o entre la distancia entre granos y estas fuerzas [29].

Como ejemplo de lo anterior puede considerarse a la interacción entre dos granos en dos dimensiones [30] (ver figura 1). En efecto, si  $v'_{ij}$  es la velocidad tangencial relativa entre los granos  $i$  y  $j$ ,  $\tau_{ij}$  es la componente tangencial de la fuerza de contacto entre ambos granos y  $N_{ij}$  es la componente normal de dicha fuerza. Entonces el CCC para este caso asegura que

$$\begin{aligned} v'_{ij} = 0 &\Rightarrow \tau_{ij} \in [-\mu N_{ij}, \mu N_{ij}] \\ v'_{ij} > 0 &\Rightarrow \tau_{ij} = -\mu N_{ij} \\ v'_{ij} < 0 &\Rightarrow \tau_{ij} = \mu N_{ij} \end{aligned} \quad (2)$$

La ecuación (2) no expresa una relación funcional sino condicional entre  $v'_{ij}$  y  $\tau_{ij}$  (o  $N_{ij}$ ). Además, la igualdad a cero de la velocidad expresa que no hay movimiento relativo entre granos, a pesar de que la fuerza tangencial puede tomar un continuo de valores entre  $-\mu N_{ij}$  y  $\mu N_{ij}$ . La desigualdad  $v'_{ij} > 0$  asegura que los granos  $i$  y  $j$  se separan y que entonces actúa una fuerza tangencial que trata de evitar la separación. Finalmente, la desigualdad  $v'_{ij} < 0$  asegura que los granos se acercan uno al otro y que actúa una fuerza tangencial tendiente a favorecer el acercamiento.

La otra condición de no suavidad se produce, para un material compuesto de granos rígidos, por la exclusión estérica (no interpenetrabilidad de los granos). Esta exclusión puede formularse a través

de la Condición de Signorini (CS), la cual expresa que la fuerza de contacto es no nula sólo si hay un contacto geométrico y éste puede alcanzar valores arbitrariamente grandes para satisfacer la condición de no interpenetrabilidad, esto es

$$\begin{aligned} d_{ij} = 0 &\Rightarrow N_{ij} \geq 0 \\ d_{ij} > 0 &\Rightarrow N_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $d_{ij}$  es la distancia entre los bordes de los granos  $i$  y  $j$ .

Nótese que al igual que en la ecuación (2), tampoco existe en la ecuación (3) una relación funcional entre  $d_{ij}$  y  $N_{ij}$ .

Las relaciones (2) y (3) son válidas para cada par de granos, por lo que la generalización a un sistema de granos conduce a una múltiple indeterminación. Es conveniente mencionar que relaciones como las anteriores están ausentes en las aproximaciones estándares del continuo para medios granulados, sin embargo, estudios recientes muestran que el análisis de los procesos disipativos y de desorden, sobre todo en flujo granular lento, es muy factible bajo este esquema [30].

#### IV. Flujo lento: dos casos particulares

El caso más simple de flujo granular, que se puede tratar analíticamente de manera exacta, ocurre al someter a aceleración uniforme una caja con material granular no cohesivo en su interior o cuando dicha caja es rotada alrededor de su eje de simetría. Ambos casos pueden estudiarse analíticamente en el régimen estacionario (independiente del tiempo) y son claros ejemplos de flujo lento.

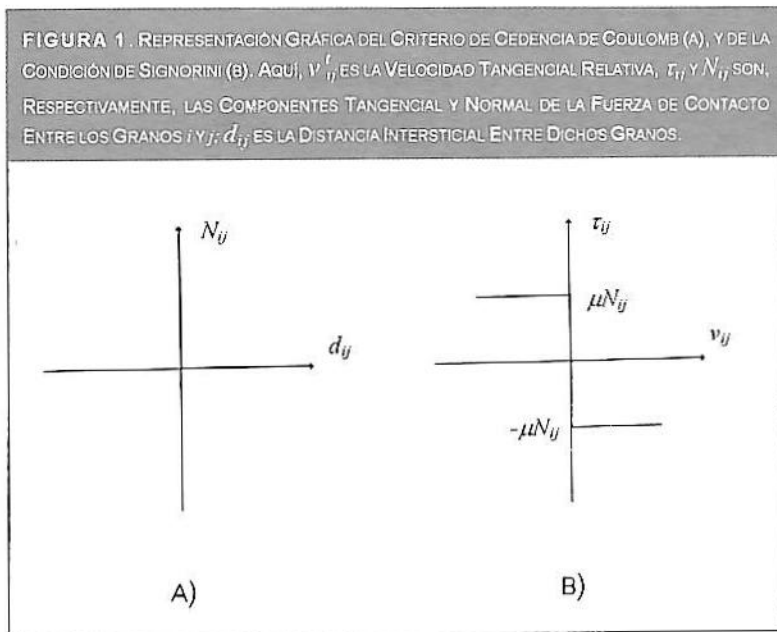
En efecto, el estudio analítico del flujo lento se fundamenta en el CCC e implica considerar sólo la dinámica de la superficie libre. Por tanto, la posible existencia de gradientes en la velocidad no es considerada. Así, el caso estacionario se puede expresar como

$$\nabla v = 0, \quad (4)$$

y consecuentemente la ecuación de balance de fuerza a lo largo de la superficie libre, la cual forma un ángulo  $\theta$  respecto a la horizontal, es

$$\rho g (\sin \theta - \mu \cos \theta) = F_B, \quad (5)$$

en donde  $\rho$  es la densidad de bulo (considerada constante);  $g$  es la aceleración de la gravedad;  $\mu$  es el coeficiente de fricción del material y  $F_B$  son las fuerzas externas. La solución a estas ecuaciones y sus propiedades para dos geometrías específicas se presentarán más adelante.



**1. Movimiento uniformemente acelerado de una caja de arena**

Cuando una caja de ancho  $L$  se llena de arena hasta una altura  $H$  y se mueve uniformemente en la dirección  $x$  con una aceleración constante  $a$ , su superficie libre, inicialmente plana, se deformará en función de la magnitud de la aceleración [28]. Este sistema se puede estudiar al utilizar la ecuación (5), si se considera que  $(F_B)_x = \rho a$  es la componente de la fuerza (por unidad de volumen) a lo largo de la dirección  $x$ , y que esta fuerza contribuye tanto a la componente tangencial como a la componente normal de la ecuación de balance de fuerza. De aquí que es posible construir una ecuación diferencial adimensional<sup>1</sup> para la pendiente de superficie,  $\tan \theta = dy^*/dx^*$ . La solución para la ecuación diferencial de la pendiente es una familia de líneas rectas de la forma

$$y^* = \frac{a^{**} - \mu}{1 + \mu a^{**}} x^* + \frac{H}{L}, \tag{6}$$

donde  $a^{**}$  indica que la aceleración del sistema se incrementó a partir del reposo. El caso límite para un fluido [31] se obtiene con  $\mu = 0$  en la ecuación (6), en cuyo caso la solución en forma adimensional también es una familia de líneas rectas, es decir,

$$y^* = a^{**} x^* + \frac{H}{L}. \tag{7}$$

Nótese que en un fluido para todo valor no nulo de la aceleración siempre aparece una deformación superficial en forma de líneas rectas (planos inclinados en el caso tridimensional). Para un material granular, la deformación superficial aparece, como puede notarse a partir de la ecuación (6), para aceleraciones adimensionales mayores o iguales a  $\mu$ . La concordancia entre las mediciones experimentales y la teoría es excelente (alrededor de un 3% en error) [28], lo cual es poco común en las teorías del continuo para estos medios.

**2. Rotación eje-simétrica**

Una situación similar a la estudiada en el caso anterior se presenta cuando la caja, de ancho  $2R$ , se rota alrededor de su eje de simetría  $r = 0$  [32]. La ecuación adimensional para el problema estacionario se construye de la misma forma que en el caso anterior, la adimensionalización  $z \rightarrow z/R$ ,  $r \rightarrow r/R$  se introduce para las coordenadas espa-

ciales ( $z$  es la altura y  $r$  es la coordenada radial) y el número adimensional de Froude,  $Fr$ , se define como el cociente entre las fuerzas inercial y gravitacional de manera que  $Fr = \rho \Omega^2 R / \rho g$ .

La solución a la ecuación diferencial resultante es

$$z^{\pm}(r) - z_c = \pm \frac{1}{\mu} (r - r_c) - \frac{1 + \mu^2}{\mu^2 Fr^{\pm}} \ln \left( \frac{1 \pm \mu Fr^{\pm} r}{1 \pm \mu Fr^{\pm} r_c} \right), \tag{8}$$

en donde  $z_c$  es el valor de  $z$  en  $r = r_c$ ;  $r_c$  es la distancia, medida desde el centro, que separa la zona rígida (sin movimiento superficial) de la zona fluidizada. En la ecuación de la superficie, el signo + se toma para el caso en que el número de Froude se incrementa lentamente; mientras que el signo - se considera cuando disminuye lentamente la velocidad del sistema. Un aspecto importante en esta relación es que el valor de  $Fr$  depende del valor máximo alcanzado por  $Fr^+$ , lo que significa que cuando el montón granular va lentamente al reposo, la deformación superficial depende de la historia pasada.

Nuevamente, el caso límite para un fluido newtoniano se obtiene para  $\mu = 0$  [31], es decir,

$$z(r) - z_0 = \frac{Fr}{2} r^2, \tag{9}$$

en donde, como en el caso anterior, siempre existe una deformación superficial para un  $Fr \neq 0$ . La deformación superficial para un montón de arena y para un fluido, ambos en rotación, son muy diferentes pues mientras que en el caso de un fluido ésta es parabólica, en la arena la deformación es logarítmica. La coincidencia entre teoría y experimentos es también muy buena [32].

**V. Flujo rápido: aspectos generales**

Se ha mencionado que en el caso de un fluido newtoniano cualquier fuerza tangencial provoca un flujo de fluido, al cual siempre es posible asignar una velocidad media  $v$ . Los esfuerzos (fuerzas por unidad de área) generados por la corriente, en este caso son proporcionales al gradiente de la velocidad [31]. Contrariamente, en un medio granulado con flujo rápido, los experimentos y si-

1. En donde la aceleración se normaliza por  $g$ , es decir,  $a^{**} = a/g$ , y las coordenadas  $(x, y)$  se normalizan por el ancho de la caja, o sea,  $x^* = x/L$  y  $y^* = y/L$ .

mulaciones por computadora [23] permiten asegurar que los esfuerzos en el material son proporcionales al cuadrado del gradiente del campo de velocidades, es decir,

$$\tau = \beta (\nabla v)^2, \tag{10}$$

en donde  $\tau$  es la magnitud del esfuerzo generado por el material debido a la acción de la fuerza tangencial que genera el flujo, y  $\beta$  es una constante dimensional (con las unidades adecuadas para que la parte derecha de la ecuación tenga unidades de esfuerzo, *i. e.*, unidades de presión) que depende del material. Sin embargo, existen severas controversias en torno al origen micromecánico de esta forma del esfuerzo [11, 23, 28]. En un trabajo reciente [28] se ha propuesto que, en el caso estacionario, una fuerza friccional entre granos individuales proporcional al cuadrado de su velocidad relativa, produce justamente un esfuerzo proporcional al cuadrado del gradiente del campo de velocidades.

De este modo, para flujo rápido cerca de la superficie libre, el conjunto de ecuaciones similares a las formuladas en la sección IV, toman ahora la forma

$$\nabla v \neq 0, \tag{11}$$

$$\rho g z (\sin \theta - \mu \cos \theta) = \beta \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2, \tag{12}$$

en donde la ecuación (12) expresa el balance de esfuerzo a lo largo de la zona superficial y  $z$  es la coordenada normal a la superficie libre. Es conveniente mencionar que el uso de esta ecuación para sistemas con rotación horizontal reproduce adecuadamente la deformación superficial bajo flujo rápido [33].

### VI. Otro modelo para flujo granular

Recientemente se ha propuesto un modelo basado en argumentos matemáticos, el cual se asume como válido tanto para la deformación cuasiestática como para la deformación rápida de un medio granulado no cohesivo [34, 35, 36]. La importancia de este modelo radica en su amplio uso en aplicaciones tecnológicas [36], por lo que son recomendables algunas pruebas de su validez real. Concretamente, este modelo se sustenta en un conjunto de ecuaciones que expresan la conservación de la masa y del ímpetu. En particular, para la conservación de la masa se su-

pone que la densidad  $\rho$  es constante, lo cual implica que

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{13}$$

donde  $\mathbf{v}$  es el vector velocidad.

La conservación del momento se obtiene al suponer que los medios granulados se comportan como materiales rigidoplásticos, por lo que se encuentra, en notación tensorial, que

$$\rho \left( \frac{\partial v_l}{\partial t} + v_m \frac{\partial v_l}{\partial x_m} \right) = - \frac{\partial \tau_{lm}}{\partial x_m} + \rho g_l, \tag{14}$$

donde  $v_l$  es la componente  $l$ -ésima del vector velocidad;  $x_m$  es la componente  $m$ -ésima del vector de posición, y  $\tau_{lm}$  es el tensor de esfuerzos. Los subíndices  $l$  y  $m$  toman los valores  $l, m = 1, 2, 3$  correspondientes a las coordenadas del espacio tridimensional. Para un material rigidoplástico  $\tau_{lm}$  es de la forma

$$\tau_{lm} = \sigma \left[ \delta_{lm} + \frac{k \gamma_{lm}}{|\gamma|} \right]. \tag{15}$$

En esta relación constitutiva  $\sigma$  es el esfuerzo medio;  $k$  es una constante característica del material de la forma  $k = \sqrt{2} \sin \phi$  (donde  $\phi$  es el ángulo de fricción interna);  $\delta_{lm}$  es el tensor identidad;  $\gamma_{lm}$  es el tensor razón de deformación (cuya forma se da más abajo) y  $|\gamma|$  es la norma euclidiana del tensor razón de deformación. Este último tiene la forma

$$\gamma_{lm} = - \left( \frac{\partial v_l}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_l} \right), \tag{16}$$

en donde  $v_l$  denota la  $l$ -ésima componente del campo de velocidades; el signo menos no es usual pero es en principio adecuado, pues se considera que el medio granulado no soporta esfuerzos extensivos.

Es posible aplicar este formalismo al problema de la rotación axisimétrica de un montón de arena. En efecto, al usar la simetría del problema es fácil mostrar que  $|\gamma| = 0$  [38]. Esto lleva inmediatamente a una indeterminación en el tensor de esfuerzos (ecuación (15)) y consecuentemente a la imposibilidad de describir el flujo lento con esta simetría. Más adelante se verá que este modelo tampoco es adecuado para entender el flujo granular rápido en tolvas. Esto advierte, a través de este caso particular, sobre el hecho de que el rigor matemático no sustituye a la física del problema.

## VII. Flujo rápido en una tolva

Las tolvas son sistemas de almacenamiento de granos medicinales, industriales o alimenticios. Sin embargo, durante el vaciado del material granular estos sistemas a menudo presentan serios problemas, generados por los esfuerzos que durante el flujo pueden destruir una parte importante del material e incluso pueden alterar la estabilidad de las estructuras dentro de las cuales están contenidos [1, 2, 3, 4, 5, 6].

En esta sección se destacarán las principales propiedades del flujo granular en tolvas, que a menudo es rápido y geoméricamente muy complejo, pues el flujo abarca la superficie libre y la parte central en el interior del material. En esencia, la estructura de las zonas de flujo depende de la inclinación de las paredes y la fricción entre los granos y paredes de la tolva. Además, este tipo de flujo puede dar origen a patrones temporales de densidad y presión muy complejos.

### 1. Fractales en la presión y la densidad

El flujo en tolvas es uno de los problemas más complicados de los medios granulados, en él se conjugan la existencia simultánea de grandes variaciones en la densidad, corriente y presión. Las variaciones en la densidad pueden dar origen, por un lado, a flujo caótico y, por otro, a las llamadas ondas de densidad u ondas de choque [37, 39].

Las ondas de densidad son variaciones que viajan a lo largo de las tolvas (hacia arriba o hacia abajo) [39] y su efecto neto es la transmisión de esfuerzo. En muchos casos ésta es realmente grande, y debido a ello las estructuras pueden sufrir deformaciones intensas e incluso rupturas. La presión efectiva durante el vaciado de la tolva tiene dos componentes principales: la presión causada por el peso del material granular y otra debida al esfuerzo generado durante el flujo. Ambas presiones no son conocidas con exactitud y en la actualidad se han empezado a estudiar tanto teórica [36, 40] como experimentalmente [41].

Desde el punto de vista teórico, es posible obtener alguna información de uno de los modelos más usados desde el punto de vista técnico [36]. En efecto, una de las principales características de las ecuaciones rigidoplásticas tratadas anteriormente (ecuación (15)), es que para el problema del vaciado de tolvas aparecen inestabilidades temporales, las cuales dependen del tamaño característico de la tolva ( $L$ ), de la velocidad característica del



flujo ( $U$ ), y de la aceleración de la gravedad ( $g$ ). De esta manera, los tiempos asociados con las inestabilidades son [34, 35]

$$t_1 \alpha \frac{L}{U} = \frac{1}{f_1}, t_2 \alpha \frac{U}{g} = \frac{1}{f_2}, \quad (17)$$

en donde  $f_1$  y  $f_2$  son las frecuencias asociadas con los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ , respectivamente. Con estas cantidades es posible construir un número adimensional de la forma

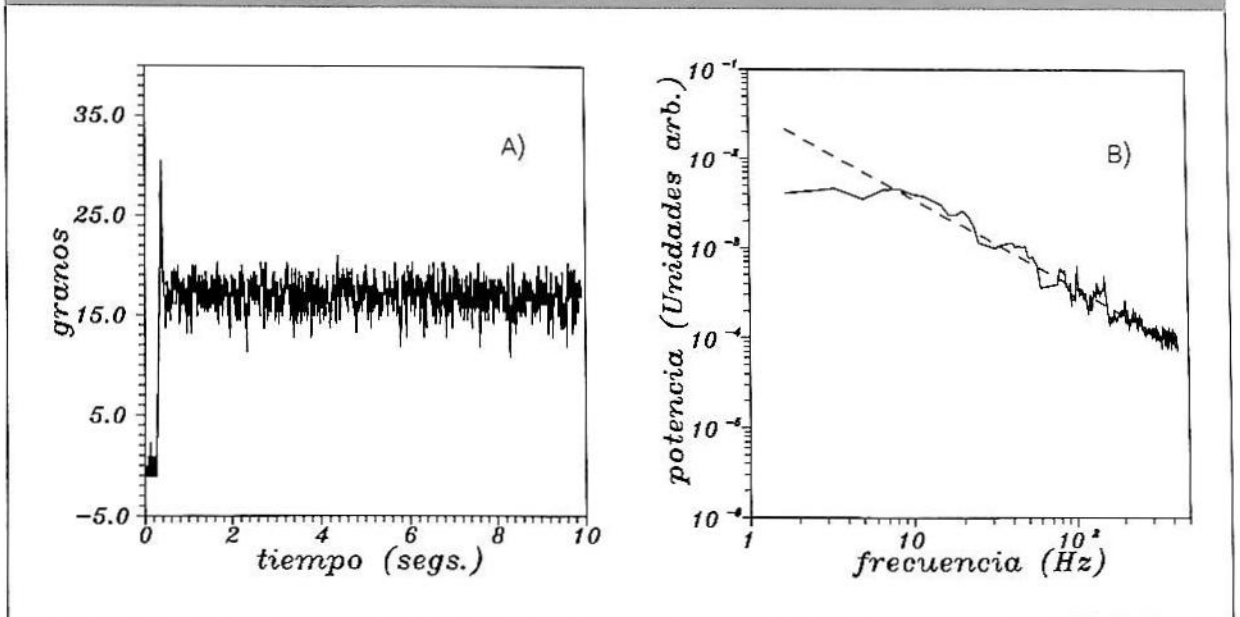
$$R = \frac{U^2}{Lg}, \quad (18)$$

el cual relaciona la energía cinética del flujo con su energía potencial. Para muchos sistemas industriales es posible establecer valores (órdenes de magnitud) de los tiempos característicos y del número  $R$  [34]. En dichos sistemas  $U \cong 3.0$  cm/s,  $L \cong 300$  cm y por tanto  $t_1 \sim 10^3$  s y  $t_2 \sim 10^{-3}$  s y  $R \sim 10^{-5}$ , este último valor revela el importante papel que juega la energía potencial y la gravedad en favor del flujo granular.

La búsqueda experimental de las frecuencias características es posible realizarla al analizar las señales fluctuantes de la presión o de la densidad de número (número de granos por unidad de área) la cual, en lo que resta de esta sección, llamaremos genéricamente como densidad. No obstante, estudios recientes realizados en laboratorio han mostrado que ni la presión [41], ni la densidad [42, 43], contienen frecuencias características.

El método estándar para realizar la búsqueda de las frecuencias asociadas con la cantidad  $V(t)$  (donde  $V(t)$  es la presión o la densidad) es comúnmente realizada mediante el cálculo del espectro de potencia,  $S(f)$ , de dicha cantidad. La dependencia explícita en la frecuencia,  $f$ , aparece

FIGURA 2. A) FLUCTUACIONES TÍPICAS DE LA DENSIDAD DEL NÚMERO DURANTE EL VACIADO DE GRANOS EN TOLVAS BIDIMENSIONALES. LA MEDICIÓN DE DICHAS FLUCTUACIONES FUE HECHA JUSTO A LA SALIDA DE LA TOLVA. B) ESPECTRO DE POTENCIA DE LA DENSIDAD DE NÚMERO. LA PENDIENTE DE LA RECTA QUE SE AJUSTA A LA PARTE DE ALTAS FRECUENCIAS TIENE UN VALOR DE  $\alpha \approx 1.0$ .



porque  $S(f) \propto |V(f)|$  y  $|V(f)|$  es la norma de la transformada de Fourier de  $V(t)$  [44]. Desde el punto de vista físico, el espectro de potencia proporciona información sobre las correlaciones temporales de  $V(t)$  y sobre la naturaleza del ruido asociado con las fluctuaciones. En particular, cuando los experimentos permiten asegurar que  $S(f) = \text{cte.}$  se dice que  $V(t)$  contiene ruido blanco. Los experimentos en tolvas sugieren una dinámica mucho más compleja para el flujo granular, si se considera que el espectro de potencia para la presión y para la densidad es de la forma [41, 42, 43]  $S(f) \propto f^{-\alpha}$  ó  $1/f^\alpha$ . (19)

En el caso de la presión se sabe que  $1.48 \leq \alpha \leq 2.3$  [41], aunque esta variación en  $\alpha$  es debida a que en los experimentos se usaron diferentes materiales. Para un mismo tipo de material (cánicas esféricas rugosas) la densidad dentro de la tolva fluctúa de manera que  $\alpha = 1.32$ , y para la densidad fuera de la tolva las fluctuaciones producen un valor de  $\alpha = 1$  [42, 43]. Esta forma del espectro de potencia (ecuación (19)) implica que existe una correlación de largo alcance entre los valores de la presión (o de la densidad) a distintos tiempos, y que además no existen frecuencias características asociadas con estas cantidades. Con ello se prueba la incapacidad de los modelos rigidoplásticos para describir adecuadamente la dinámica del flujo granular y lo complejo de ésta.

Es posible mostrar [44, 45, 46] que la dimensión fractal,  $D$ , de la señal  $V(t)$  se calcula al cono-

cer el valor de  $\alpha$  en el espectro de potencia. La correlación que relaciona ambas cantidades es, si y sólo si  $\alpha \neq 1$ ,

$$D = 2.5 - \alpha. \quad (20)$$

La dimensión fractal correspondiente a la presión fluctúa entre  $1.485 \leq D \leq 1.76$ , para distintos materiales; mientras que para la densidad dentro de la tolva la dimensión es  $D = 1.84$  [42, 43]. En la figura 2 se muestran las fluctuaciones típicas en la densidad y su espectro de frecuencia correspondiente, justo a la salida de tolvas rectangulares durante el flujo granular. Nótese que existe un valor medio temporal bien definido para la densidad de número, lo cual indica que el flujo de granos es constante; ésta es la principal propiedad de, por ejemplo, los relojes de arena. Algunas simulaciones basadas en la dinámica molecular predicen valores para  $\alpha$  mayores que los encontrados en los experimentos ( $\alpha = 2.7$ ) [47].

Es importante mencionar que resultados similares también han sido encontrados en el flujo granular en tubos verticales [48, 49, 50].

## 2. Analogías entre el flujo en una tolva y el tránsito vehicular

El flujo dentro de las tolvas también tiene muchas analogías con el flujo de vehículos en carreteras [37, 51, 52, 53, 54]. En los sistemas vehiculares aparecen, bajo determinadas condiciones de tráfico, variaciones en la densidad que pueden desplazarse a lo largo de la carretera. Dependiendo de la



naturaleza de las fluctuaciones y de las características de su desplazamiento, se puede hablar de ondas de densidad, flujo laminar y flujo caótico. La propiedad principal de las fluctuaciones en la corriente (definida como velocidad por densidad) en las ondas de densidad, es que su espectro de potencia contiene ruido  $f^{-\alpha}$ ; en el flujo laminar la corriente no contiene ruido y en el flujo caótico las fluctuaciones en la corriente obedecen a ruido blanco. Esto, de acuerdo a los resultados experimentales discutidos en la sección anterior, es semejante a lo que ocurre en el flujo granular en tolvas, y tal vez los modelos elaborados para flujo de vehículos también son adecuados para el flujo granular en tubos y en tolvas.

Con el fin de motivar el estudio de esta posible conexión, se discuten las principales bases de estos modelos. En la aproximación del continuo, para flujo de vehículos en una dimensión (dirección  $x$ ), se considera la posibilidad de variación de la densidad en el espacio y en el tiempo a través de la ecuación de conservación de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0. \quad (21)$$

De igual modo, es posible formular una ecuación para la conservación del momento de la forma

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \rho \varepsilon (V_0 - v) - c_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (22)$$


En esta ecuación  $\varepsilon$ ,  $V_0$ ,  $c_0$  y  $\mu$  son parámetros físicos asociados con las propiedades específicas del tránsito. Por lo que  $\varepsilon$  está asociado con el tiempo característico de frenado y aceleración;  $V_0$  es la velocidad característica asociada con el valor de máxima seguridad;  $c_0$  es la variancia de la velocidad promediada sobre la distribución de velocidades y  $\mu$  es un coeficiente de viscosidad.

Los términos del lado derecho de la ecuación (22) tienen, cada uno, un significado preciso durante el tráfico. El primero expresa la tendencia del tráfico, a una densidad dada, a relajarse a alguna velocidad natural promedio  $V_0(\rho)$ . A bajas densidades esta rapidez es determinada por las condiciones del camino y los límites de velocidad, y depende débilmente de  $\rho$ . A altas densidades,  $V_0(\rho)$  tiende a cero, y también depende débilmente de  $\rho$ . A densidades intermedias  $V_0(\rho)$  decae rápidamente debido al hecho de que a altas densidades de tráfico es difícil para los conductores rápidos superar a los conductores lentos. El

segundo término es un factor de anticipación: los conductores frenan debido a un incremento en la densidad en el frente. Finalmente, el tercer término modela la viscosidad o la difusión, debida a que los conductores tienden a ajustar la velocidad a aquella del tráfico que los rodea. Es fácil ver que estas condiciones de flujo son satisfechas por el flujo granular, aunque aquí el término  $V_0$  es una función de la frecuencia de las colisiones.

Las ecuaciones anteriores para flujo de vehículos contienen información de la naturaleza granular del flujo y dan también origen a patrones de densidad con flujo laminar, caótico y con ondas de densidad [37]. Es importante hacer notar que las ecuaciones (21) y (22), mediante el análisis de las fluctuaciones con modos normales (en la aproximación de onda larga), dan origen a ecuaciones de Korteweg-de Vries las cuales describen solitones, es decir, ondas viajeras no disipativas que permanecen en el tiempo y en el espacio en medios disipativos [55]. Debido a ello, es posible conjeturar que las ondas de densidad pueden ser descritas en forma de solitones [54]. Todas estas conjeturas pueden ser adecuadamente orientadas por medio de experimentos, esto es un programa que actualmente está en proceso.

### Conclusiones

Se ha presentado una revisión del trabajo teórico y experimental realizado hasta ahora para entender los flujos lento y rápido en una caja. Un avance interesante en el estudio del flujo granular lento consiste en que éste es posible abordarlo analíticamente mediante ecuaciones de balance de fuerza, con lo que se obtiene una buena coincidencia entre teoría y experimento. Dos elementos esenciales para el éxito de estos modelos es la adecuada inclusión de los términos de fricción y de campo externo (gravedad). En el flujo granular rápido, inducido por gravedad en una tolva, ocurren fluctuaciones importantes en la densidad, en la corriente y en la presión, las cuales sugieren una dinámica compleja. Tal vez es posible formular un adecuado modelo teórico para estos sistemas, con base en las teorías para flujo vehicular, el cual presenta a nivel teórico y de campo fenómenos muy similares a los del flujo granular en tolvas. Es necesaria una exhaustiva investigación de las diferencias y semejanzas entre ambos flujos, para adecuar los modelos de tránsito vehicular al flujo granular en tolvas. 



## BIBLIOGRAFIA

- [1] Nedderman, R. M. (1992). *Statics and Kinematics of Granular Media*. Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra.
- [2] Ennis, B. J.; Green, J. y Davies, R. (1994). "Particle Technology: The Legacy of the Neglect in the U. S.", en *Chem. Eng. Progress*. (32)32-43.
- [3] Knowlton, T. M.; Carlson, J. W.; Klinzing, G. E. y Yang, W.-C. (1994) "Particle Technology: The Importance of the Storage, Transfer and Collection", en *Chem. Eng. Progress*. (32)44-54.
- [4] Brown, R. L. y Richards, J. C. (1970). *Principles of Powder Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, Inglaterra.
- [5] Wieghardt, K. (1975). "Experiments in Granular Flow", en *Ann. Rev. Fluid Mech.* (7)89-114.
- [6] Neddenman, R. M.; Tüzün, U.; Savage, S. B. y Houlisby, G. T. (1982). "The Flow of Granular Materials, I. Discharge Rates From Hoppers", en *Chem. Eng. Sci.* (37)1597-1609.
- [7] Savage, S. B. (1989). "Flow of Granular Materials", en *Theoretical and Applied Mechanics*. (eds.) Germain, P.; Piau, M. y Caillerie, D. Elsevier 241-266.
- [8] Jaeger, H. M. y Nagel, S. R. (1992). "The Physics of the Granular State", en *Science*, (255)1523-1531.
- [9] Haff, P. K. (1983). "Grain Flow as a Fluid-Mechanical Phenomenon", en *J. Fluid Mech.* (134)401-430.
- [10] Batrouni, G. G.; Dippel, S. y Samson, L. (1996). "Stochastic Model for the Motion of a Particle on an Inclined Rough Plane and the Onset of Viscous Friction", en *Phys. Rev. E* 53 6496-6503.
- [11] Jaeger, H. M.; Nagel, S. R. y Behringer, R. P. (1996). "Granular Solids, Liquids and Gases", en *Rev. Mod. Phys.* (68)1259-1273.
- [12] Reynolds, O. (1885). "On the Dilatance of Media Composed of Rigid Particles in Contact", en *Phil. Mag. Ser. 5* (20)469-481.
- [13] Onoda, G. Y. y Liniger, E. G. (1990). "Random Loose Packings of Uniform Spheres and the Dilatance Onset", en *Phys. Rev. Lett.* (64)2727-2730.
- [14] Santra, S. B.; Schwazer, S. y Herrmann, H. (1996). "Fluid-induced Particle-size Segregation in Sheared Granular Assemblies", en *Phys. Rev. E* (54)5066-5072.
- [15] Baumann, G. y Wolf, D. E. (1996). "Self-organized Criticality in a Two-Dimensional Rotating Drum", en *Phys. Rev. E* (54)R4504-R4507.
- [16] Knight, J. B.; Ehrichs, E. E.; Yu. Kuperman, V.; Flint, J.; Jaeger, H. M. y Nagel, S. R. (1996). "Experimental Study of Granular Convection", en *Phys. Rev. E* (54)5726-5738.
- [17] Aoki, K. A.; Akiyama, T.; Maki, Y. y Watanabe, T. (1996). "Convective Roll Patterns in Vertically Vibrated Beds of Granules", en *Phys. Rev. E* (54)874.
- [18] Duran, J.; Mazozi, T.; Clement, E. y Rajchenbach, J. (1994). "Decompactación Modes of a Two-Dimensional Sandpile Under Vibration: Model and Experiments", en *Phys. Rev. E* (50)3092-3099.
- [19] Coulomb, C. A. (1773). "Essai sur an application des règles des maximes et mininus à quelques problèmes de statique raltifs à l'architecture", en *Mémoires de Mathématiques et de Physique Présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers Savants et Lus dans les Assemblés*. L'Imprimerie Royale, Paris (7) 343-382.
- [20] Bagnold, R. A. (1954). "Experiments on a Gravity-free Dispersion of Large Solid Spheres in a Newtonian Fluid Under Shear", en *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* (225)49-63.
- [21] Bagnold, R. A. (1966). "The Shearing and Dilatation of Dry Sand and the Singing Mechanism", en *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* (295)219-232.
- [22] Haff, P. K.; Jiang, Z. y Forrest, S. B. (1993). "Transport of Granules by Wind and Water: Micromechanics to Macromechanics in Geology and Engineering", en *Mech. Mater.* (16)173-178.
- [23] Campbell, C. S. (1990). "Rapid Granular Flows", en *Ann. Rev. Fluid Mech.* (22)57-92.
- [24] Scott, R. F. (1963). *Principles of Soil Mechanics*. Addison-Wesley, Reading.
- [25] Schofield, A. N. y Wroth, C. P. (1968). *Critical State Soil Mechanics*. McGraw-Hill, New York.
- [26] Ristow, G. H.; Riguidel, F. y Bideau, D. (1994).

- “Different Characteristics of the Motion of a Single Particle on a Bumpy Inclined Line”, en *J. Phys. I France* (4)1161-1172.
- [27] Johnson, P. C. y Jackson, R. (1987). “Frictional-collisional Constitutive Relations for Granular Materials With Applications to Plane Shearing”, en *J. Fluid Mech.* (176)67-93.
- [28] Medina, A. y Treviño, C. (1996). “Continuum Equations for the Granular Flow on a Free Surface”, en *Rev. Mex. Fís.* (42)193-208.
- [29] Panagiotopoulos, P. D. (1985). *Inequality Problems in Mechanics and Applications*. Birkhäuser, Basel.
- [30] Radjai, F.; Brendel, L. y Roux, S. (1996). “Nonsmoothness, Indeterminacy, and Friction in Two-Dimensional Arrays of Rigid Particles”, en *Phys. Rev. E* (54)861-873.
- [31] White, F. M. (1994). *Fluid Mechanics*. McGraw Hill, New York.
- [32] Medina, A.; Luna, E.; Alvarado, R. y Treviño, C. (1995). “Axisymmetrical Rotation of a Sand Heap”, en *Phys. Rev. E* (51)4621-4625.
- [33] Rajchenbach, J. (1990). “Flow in Powders: From Discrete Avalanches to Continuous Regime”, en *Phys. Rev. Lett.* (65)2221-2224.
- [34] Schaeffer, D. G. (1987). “Instability in the Evolution Equations Describing Incompressible Granular Flow”, en *Jour. Diff. Eqs.* (66)19-50.
- [35] Schaeffer, D. G.; Shearer, M. y Pitman, E. B. (1990). “Instability in Critical State Theories of Granular Flow”, en *SIAM, J. Appl. Math.* (50)33-47.
- [36] Wang, F.; Gardner, C. L. y Schaeffer, D. G. (1992). “Steady-state Computations of Granular Flow in a Axisymmetric Hopper”, en *SIAM J. Appl. Math.* (52) 1076-1088.
- [37] Choi, M. Y. y Lee, H. Y. (1995). “Traffic Flow and  $1/f$  Fluctuations”, en *Phys. Rev. E* (52)5979-5984.
- [38] García-Sánchez, E. (1994). *Estudio de un montón de arena en rotación* (tesis de licenciatura). Escuela de Física, Universidad Autónoma de Zacatecas.
- [39] Baxter, G. W.; Behringer, R. P.; Fagert, T. y Johnson, G. A. (1989). “Pattern Formation in Flowing Sand”, en *Phys. Rev. Lett.* (62)2825-2828.
- [40] Claudin, P. y Bouchaud, J. P. (1997). “Static Avalanches and Giant Stress Fluctuations in Silos”, en *Phys. Rev. Lett.* (78)231-234.
- [41] Baxter, G. W.; Leone, R. y Behringer, R. P. (1993). “Experimental Test of Time Scales in Flowing Sand”, en *Eurphys. Lett.* (21)569-574.
- [42] Medina, A.; Andrade, J.; Treviño, C. y Luna, E. (1996). “Density Fluctuations During the Discharge of Granular Material From a Two-Dimensional Bin”, en *Rev. Mex. Fís.* (42)733-741.
- [43] Andrade, J.; Treviño, C. y Medina, A. (1996). “Experimental Evidence of Density Fluctuations in Two-Dimensional Bins”, en *Phys. Lett. A* (223)105-110.
- [44] Feder, J. (1988). *Fractals*. Plenum Press, New York.
- [45] Mandelbrot, B. B. y Van Ness, J. W. (1968). “Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications”, *SIAM Rev.* (10)422-437.
- [46] Mandelbrot, B. B. (1983). *The Fractal Geometry of the Nature*. Freeman, San Francisco.
- [47] Ristow, G. H. y Herrmann, H. J. (1994). “Density Patterns in Two-Dimensional Hoppers”, en *Phys. Rev. E* (50)R5-R8.
- [48] Horikawa, S.; Nakahara, A.; Nakayama, T. y Matsushita, M. (1995). “Self-organized Critical Density Waves of Granular Material Flowing Through a Pipe”, en *Jour. Phys. Soc. Japan* (64)1870-1873.
- [49] Schick, K. L. y Verveen, A. A. (1974). “ $1/f$  Noise With a Low Frequency White Noise Limit”, en *Nature* (251)599-601.
- [50] Raafat, T.; Hulin, J. P. y Herrmann, H. J. (1996). “Density Waves in Dry Granular Media Falling Through a Vertical Pipe”, en *Phys. Rev. E* (53)4345-4350.
- [51] Musha, T. y Higuchi, H. (1976). “The  $1/f$  Fluctuation of a Traffic Current on a Expressway”, en *Japanese Jour. Appl. Phys.* (15)1271-1275.
- [52] Kerner, B. S. y Konhäuser, P. (1994). “Structure and Parameters of Clusters in Traffic Flow”, en *Phys. Rev. E* (50)54-83.
- [53] Hong, D. C.; Yue, S.; Rudra, J. K.; Choi, M. y Kim, Y. W. (1994). “Granular Relaxation Under Tapping and the Traffic Problem”, en *Phys. Rev. E* (50)4123-4135.
- [54] Kurtze, D. A. y Hong, D. C. (1995). “Traffic Jams, Granular Flow, and Soliton Selection”, en *Phys. Rev. E* (52)218-221.
- [55] Drazin, P. G. y Johnson, R. S. (1993). *Solitons: an Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge.