

Introducción a los estados coherentes y aplicaciones

MARÍA GUADALUPE FRÍAS Y MÁXIMO AGÜERO*

Introduction to Coherent States and its Applications

Abstract. *The quantum coherent states were discovered by the same research workers who laid the foundations for the quantum laws in nature. The coherent states play an important role in science and technology in the modern world, as for instance in optic in the theoretical and experimental study of laser rays. Some properties of these quantum states and some of their applications to classical problems in modern physics are analyzed.*

Introducción

En 1926, Schrödinger construyó los Estados Coherentes (EC) para el oscilador armónico cuántico, los cuales fueron retomados en 1963 por Glauber, Klauder y Sudarshan, entre otros, para estudios en óptica cuántica (Klauder y Sudarshan, 1968). En este sentido, el papel principal lo jugó el rayo láser, cuyo entendimiento básico se lo debemos a Roy J. Glauber, quien desarrolló la teoría de este fenómeno cuántico. Él dio el nombre oficial de estados coherentes a los estados cuánticos de los láseres, cuyas fluctuaciones en sus amplitudes y fases, por ejemplo, son simultáneamente despreciables (Glauber, 1963: 130-131).

Veamos cómo se puede describir a los estados coherentes del campo electromagnético. Para una formulación general de la teoría del campo electromagnético y de la radiación es más conveniente usar el método de la segunda cuantización, que consiste en que el 4-potencial $A_\mu(x)$ y los campos eléctrico y magnético correspondientes $\mathbf{E}(x)$ y $\mathbf{H}(x)$ son considerados como operadores (q-números) que satisfacen ciertas relaciones de conmutación. Estos operadores actúan sobre el vector de estado Φ que describe al estado del campo electromagnético como un sistema cuántico generalizado. El vector de estado Φ se define en el espacio de números de partícula

(fotones) y no depende de las coordenadas. También se puede definir a Φ de tal manera que no dependa del tiempo. Entonces, $A_\mu(x)$ (y también \mathbf{E} y \mathbf{H}) serán operadores de campo en la representación de Heisenberg. Así, los estados que satisfacen las ecuaciones

$$E^+(r, t)|\rangle = \varepsilon(r, t)|\rangle,$$

$$\langle|E^-(r, t) = \langle|\varepsilon^*(r, t)$$

son los llamados estados coherentes (más detalles en Ajeizer y Berestetsky, 1981). Está claro que las funciones ε deben satisfacer las ecuaciones clásicas de Maxwell. Primeramente se considera al campo electromagnético libre y se descompone en ondas planas

$$\varepsilon(r, t) = \sum_{\kappa} \sum_{\lambda=1,2} i \sqrt{\frac{\omega}{2V}} e^{(\lambda)} \alpha_{\kappa\lambda} e^{i\kappa r - i\omega t}$$

donde $\alpha_{\kappa\lambda}$ son cualesquiera c-números complejos. Al comparar esta descomposición con la serie de $E_\mu^+(\vec{r}, t)$

$$E_\mu^+(\vec{r}, t) = \sum_{\kappa} \left(\sum_{\lambda=1,2} i \sqrt{\frac{\omega}{2V}} e^{(\lambda)} c_{\kappa\lambda} + \frac{i\kappa}{\sqrt{2\omega V}} (c_{\kappa 3} + i c_{\kappa 4}) \right) e^{i\kappa r - i\omega t}$$

nos da la siguiente relación:

$$c_{\kappa\lambda}|\rangle = \alpha_{\kappa\lambda}|\rangle, \quad \langle|c_{\kappa\lambda}^+ = \langle|\alpha_{\kappa\lambda}^*, \quad \lambda = 1, 2.$$

Así vemos que $\alpha_{\kappa\lambda}$ son los autovalores de los operadores de destrucción de los fotones $c_{\kappa\lambda}$. Entonces tenemos al vector:



* Facultad de Ciencias, UAEM. Correo electrónico: mag@coatepec.uaemex.mx
Agradecemos al Prof. Makhanov V. G. por su constante interés en el tema y al Dr. Abraham Medina por las discusiones sobre la exposición del artículo. Parte de este trabajo ha sido financiado por el proyecto 1169/96 de la UAEM y 3147-E del Conacyt.

$$|> = \prod_{k,\lambda} |\alpha_{k\lambda}>$$

donde $|\alpha_{k\lambda}>$ son los vectores de estados coherentes para diferentes grados de libertad del campo y satisface $c_{k\lambda}|\alpha_{k\lambda}> = \alpha_{k\lambda}|\alpha_{k\lambda}>$, $\langle \alpha_{k\lambda} | c_{k\lambda}^\dagger = \langle \alpha_{k\lambda} | \alpha_{k\lambda}^*$

Cuando en el sistema en estudio se tengan también cargas y corrientes eléctricas, la construcción de estados coherentes es muy similar al esquema mostrado arriba, siempre que se consideren a las cargas y corrientes como magnitudes clásicas dadas.

Rápidamente se generalizó el esquema descrito arriba y se construyeron Estados Coherentes Generalizados (ECG) con varias propiedades similares a las de los estados coherentes del oscilador armónico. Los ECG para sistemas cuánticos arbitrarios han sido desarrollados por distintos métodos basados en diferentes consideraciones físicas y matemáticas (Klauder y Sudarshan, 1968; Glauber, *op. cit.*; Perelomov, 1986; Konstant, 1970; Gilmore, 1974 y Zhang y Gilmore, 1990). La base de este desarrollo para grupos de Lie, realizada especialmente por Perelomov (1986), fue conectar íntimamente los estados coherentes con la dinámica de grupo de cada problema físico. Por ejemplo, cuando se incluyen solamente operadores de creación, aniquilación, identidad y conservación numérica como generadores, el sistema del oscilador armónico posee la dinámica de grupo de Heisenberg-Weyl H_4 . Por ello, es natural construir los estados coherentes vía correspondencia biunívoca con el espacio geométrico $H(4)/U(1) \otimes U(1)$.

La descripción de sistemas cuánticos mediante el uso de estados coherentes, es un vasto campo de estudio actual en casi todas las ramas de la física, por ejemplo: óptica cuántica, física nuclear y problemas de cuantización, física atómica, estado sólido, electrodinámica cuántica, etcétera. Por otro lado, con ellos se puede hacer una descripción cuasiclásica de sistemas cuánticos, además de que son particularmente útiles debido a sus bien definidas propiedades algebraicas y topológicas (Perelomov, *op. cit.*; Zhang y Gilmore, *op. cit.*; Makhankov, 1990; Makhankov *et al.*, 1996; Agüero, 1991 y Agüero y Espinoza, 1993).

Para el análisis de excitaciones colectivas (magnones) sobre estados base, se tiene que pasar desde el nivel cuántico de descripción al nivel clásico, y semejante transición debe hacerse con cuidado. Comúnmente se utilizan funciones de prueba (es decir, algunas bases) para promediar el Hamiltoniano cuántico. La elección de estados coherentes para estos objetivos se fundamenta porque son los que más se asemejan a los clásicos. Como lo veremos más adelante, los estados coherentes basados en el álgebra de Weyl (operadores de creación y

destrucción), minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg, lo que da como resultado el valor de 1/2.

En años recientes surgieron nuevos conceptos para excitaciones colectivas en medios condensados, llamados *excitaciones tipo partícula* o *solitones*. La teoría de solitones constituye un método para estudiar gran variedad de fenómenos no lineales en teorías de campos y aplicaciones fundamentales en óptica, gravitación, fluidos, partículas, superconductividad, biofísica, hidrodinámica, nuclear, ferromagnetismo, etcétera (Makhankov *et al.*, 1996). La cuestión, entonces, es formular un procedimiento consistente en reducir modelos estadísticos cuánticos a modelos del campo clásico conectados a ellos. Debido a la complejidad que presentan los sistemas de muchas partículas, los estados coherentes podrían jugar un importante papel. Así, un problema formulado en lenguaje de mecánica cuántica con alguna dinámica de grupo se podría analizar con ayuda de los estados coherentes ligados a ese grupo y de esta manera convertirlo en un sistema cuasiclásico. Por otro lado, es natural usar los estados coherentes en el estudio de Hamiltonianos con espín, para lo cual se construyen los estados coherentes generalizados con los operadores de espín del grupo $SU(2)$. Tales estados, para valores arbitrarios de espín j , corresponden a puntos del espacio $SU(2j+1)/SU(2j) \otimes U(1)$.

I. Estados coherentes del grupo Heisenberg-Weyl

Veamos ahora como se definen estados coherentes para el caso del oscilador armónico. Para construir un conjunto de estados coherentes se comienza con la estructura básica y propiedades intrínsecas del sistema cuántico.

Glauber (Glauber, 1963 y Zhang y Gilmore, 1990), introdujo tres definiciones matemáticas para determinar a los estados coherentes. Se puede demostrar que las siguientes definiciones son totalmente equivalentes entre sí.

Definición 1

Los estados coherentes $|\alpha>$ son estados propios del operador de aniquilación (descenso) a , del oscilador armónico. Por lo tanto, se debe satisfacer la ecuación de eigenvalores y eigenfunciones típicas, $a|\alpha> = \alpha|\alpha>$, donde α es un número complejo.

Definición 2

Los estados coherentes $|\alpha>$ pueden ser obtenidos al aplicar el operador de desplazamiento $D(\alpha)$ al estado base del oscilador armónico.

$$|\alpha> = D(\alpha)|0>, \text{ en donde } D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a).$$

Definición 3

Los estados coherentes $|\alpha\rangle$ son estados cuánticos que minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg

$$(\Delta p)^2(\Delta q)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ con } a = \frac{q+ip}{\sqrt{2\hbar}} \text{ y } a^* = \frac{q-ip}{\sqrt{2\hbar}}$$

Existe otra descripción basada en la teoría de grupos, la cual contiene toda la información dada por Glauber en sus definiciones anteriores.

Para el estudio de sistemas de un grado de libertad se pueden utilizar los operadores cuánticos q (coordenadas) y p (momento lineal), o bien, los operadores a^+ (creación) y a (aniquilación) del oscilador armónico. Estos operadores satisfacen las reglas de conmutación de Heisenberg

$$[q, p] = i\hbar I, [q, I] = [p, I] = 0, \text{ con } I \text{ operador unidad y las relaciones de conmutación } [a, a^+] = I, [a, I] = [a^+, I] = 0.$$

Las dos relaciones anteriores significan que los operadores (p, q, I) o (a, a^+, I) generan un álgebra de Lie de tres parámetros, denotada por \mathbb{W}_1 a la que se le llama también álgebra de Heisenberg-Weyl (Konstant, *op. cit.*). Cualquier elemento x del álgebra \mathbb{W}_1 tendrá la forma:

$$x = (s; x_1, x_2) = isI + \frac{i}{\hbar}(Pq - Qp) = isI + (\alpha a^+ - \alpha^* a)$$

con s, x_1, x_2 números reales y donde $x_1 = -\hbar^{-\frac{1}{2}}Q$,

$$x_2 = \hbar^{-\frac{1}{2}}P, \alpha = (2\hbar)^{-\frac{1}{2}}(Q + iP) = 2^{-\frac{1}{2}}(-x_1 + ix_2).$$

El paso de una álgebra de Lie a un grupo de Lie se lleva a cabo mediante la relación $\exp(x) = \exp(isI)D(\alpha)$, donde $D(\alpha) = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a)$.

Los operadores $\exp(it)D(\alpha)$ forman la representación del grupo \mathbb{W}_1 , los elementos del grupo tienen la forma $(g = (t; x_1, x_2))$ con t, x_1, x_2 números reales, o $g = (t; \alpha)$ con t real y α complejo. La ley de composición de grupo tiene la forma:

$$(s; x_1, x_2) \cdot (t; y_1, y_2) = (s + t + B(x, y); x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

El grupo de Heisenberg-Weyl \mathbb{W}_1 pertenece a la clase de grupos de Lie nilpotentes; es decir, si $\mathbb{W}_1 = \{g\}$, entonces g se puede representar por una matriz triangular en donde los elementos de la diagonal principal son la unidad. La ley de multiplicación que cumplen los operadores $D(\alpha)$ es:

$$D(\alpha) D(\beta) = \exp[i\text{Im}(\alpha\beta^*)] D(\alpha + \beta)$$

si generalizamos podemos obtener:

$$D(\alpha_n) D(\alpha_{n-1}) \dots D(\alpha_1) = \exp(i\delta) D(\alpha_n + \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_1)$$

$$\text{con } \delta = \text{Im} \sum_{j>k} \alpha_j \alpha_k^*.$$

La ventaja de esta forma consiste en que a diferencia de los operadores a^+ y a , que son inconmensurables en el espacio de Hilbert H , los operadores $D(\alpha)$ son acota-

dos y por consiguiente el campo de definición de los $D(\alpha)$ coincide con todo el espacio de Hilbert H .

Los elementos $(s; 0)$ forman el centro del grupo \mathbb{W}_1 , estos elementos conmutan con todos los del grupo \mathbb{W}_1 ; además, para cualquier representación unitaria irreducible $T(g)$ del grupo \mathbb{W}_1 , los operadores $T((s; 0))$ conforman la representación unitaria irreducible del subgrupo $\{(s; 0)\}$.

En el espacio de Hilbert H existe un vector del vacío $|0\rangle$, o sea aquél que cumple la relación:

$$a|0\rangle = 0, \langle 0|0\rangle = 1.$$

Si el operador de creación a^+ actúa n -veces sobre $|0\rangle$, entonces se obtiene la serie de vectores normalizados

$$|n\rangle = (n!)^{-\frac{1}{2}} (a^+)^n |0\rangle; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

El conjunto de vectores $\{|n\rangle\}$ forman la base del espacio H . Como se sabe:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle; \quad a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle;$$

$$a^+a|n\rangle = n|n\rangle$$

Es muy común emplear por cuestión de comodidad una relación concreta funcional del espacio de Hilbert H . Comúnmente se usa la representación de coordenadas. En este caso el vector $|\psi\rangle$ se representa por la función de coordenadas $\langle q|\psi\rangle = \psi(q)$, que es integrable cuadráticamente:

$$\int |\psi(q)|^2 dq < \infty$$

La acción del operador \hat{q} en la representación de coordenadas se representa por q y el operador \hat{p} por

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial q}; \text{ al vector base } |n\rangle \text{ le corresponde la función}$$

$$\langle q|n\rangle = \varphi_n(q) = (\pi\hbar)^{-\frac{1}{4}} (2^n n!)^{-\frac{1}{2}} H_n \left(\hbar^{-\frac{1}{2}} q \right) \exp \left[-(2\hbar)^{-\frac{1}{2}} q^2 \right]$$

donde $H_n(q)$ es el polinomio de Hermite que satisface

$$H_n''(q) - 2qH_n'(q) + 2nH_n(q) = 0.$$

La acción del operador $D(\alpha)$, con

$$\alpha = (2\hbar)^{-\frac{1}{2}}(Q + iP), \text{ en la representación de coordenadas se determina por}$$

$$D(\alpha)\varphi(q) = \exp\left(-\frac{iPQ}{2\hbar}\right) \exp\left(\frac{ipq}{\hbar}\right) \varphi(q - Q)$$

Los operadores p, q, a^+ y a actúan en el espacio de Hilbert H .

Entonces, los vectores de estados coherentes para una sola oscilación se puede representar como

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle$$

De aquí se puede encontrar el vector del estado coherente de todo el campo. El estado coherente anterior también se puede representar como

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} |0\rangle \tag{1}$$

al emplear la relación $e^{A+B} = e^A e^B \exp(-1/2 [A, B])$, que sólo es cierto cuando $[[A, B], A] = [[A, B], B] = 0$.

Los diferentes vectores de estados coherentes no son ortogonales entre sí, pero son completos, aún más son sobre-completos, es decir que pueden rebasar la completos del espacio de Hilbert. Si se considera la fórmula

$$\int (\alpha^*)^n (\alpha)^m e^{-|\alpha|^2} d^2\alpha = \pi n! \delta_{nm}$$

donde $d^2\alpha = d(\text{Re}\alpha) d(\text{Im}\alpha)$, se tiene que

$$\int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = \pi \sum_n |n\rangle\langle n|$$

Pero, como $|n\rangle$ es una serie completa de vectores ortogonales de estado, entonces

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = I$$

Hemos visto, en esta parte, los estados coherentes más simples pero de gran interés físico.

II. Estados coherentes generalizados (ECG)

Para definir y analizar algunas propiedades de los estados coherentes generalizados seguimos la siguiente estrategia. Sea G un grupo Lie, g un elemento de este grupo y T su representación unitaria irreducible que actúa en un espacio de Hilbert H . Denotemos por $|\Psi\rangle$ a un vector de este espacio, a la multiplicación escalar como $\langle\Phi|\Psi\rangle$ y al operador de proyección sobre Ψ como $|\Psi\rangle\langle\Psi|$. Fijamos algún vector $|\Psi_0\rangle \in H$. Consideramos una serie de vectores $\{|\Psi(g)\rangle\}$, tales que $|\Psi(g)\rangle = T(g) |\Psi_0\rangle$ y g recorre todo el grupo G . Los vectores que definen el mismo estado (aquellos que se diferencian en la fase) serán agrupados en clases de equivalencia ($|\Psi(g_1)\rangle \sim |\Psi(g_2)\rangle$). Esto es posible si $|\Psi(g_1)\rangle = \exp(i\alpha) |\Psi(g_2)\rangle$, por lo cual

$$T(g_2^{-1} \times g_1) |\Psi(g_2)\rangle = \exp(i\alpha) |\Psi(g_1)\rangle.$$

Sea $K = \{k\}$ una serie de elementos del grupo G que satisface $T(k) |\Psi(g_0)\rangle = \exp(i\alpha(k)) |\Psi(g_0)\rangle$. Este conjunto es un subgrupo estacionario del vector $|\Psi_0\rangle$. De lo expuesto un poco más arriba, es fácil ver que los vectores $|\Psi(g)\rangle$ al ser agrupados en la clase adjunta izquierda $g_1k \in g_1K$ se diferenciarán uno del otro sólo por la fase. Esto significa que pertenecen a la misma clase. De esto, se concluye que vectores diferentes (estados) corresponderán a los elementos g_n que pertene-

cen al factor espacio $M = G/K$. En este caso, para describir al conjunto de diferentes estados es suficiente tomar un elemento de cada clase. Desde el punto de vista geométrico el grupo G es tratado como un espacio de haz fibrado (*fiber-bundle*) con la base $M = G/K$ y la capa K . Entonces, a los elementos g_n les corresponden alguna sección de este espacio de haz fibrado (Konstant, *op. cit.*). Por lo tanto, se definirá a los estados coherentes generalizados con base en lo anterior como (Perelomov, 1986 y 1972): el sistema de estados coherentes, que lo denotaremos como $(T, |\psi_0\rangle)$ (T es la representación del grupo G al actuar en el espacio H , y $|\psi_0\rangle$ es el vector fijo de este espacio), es un conjunto de estados $\{|\psi_g\rangle\}$, que satisfacen $|\psi_g\rangle = T(g_n) |\psi_0\rangle$ donde $g_n \in G/K$ y K es un subgrupo estacionario del estado referente $|\psi_0\rangle$. Así, el estado coherente $|\psi_g\rangle$ está determinado por el punto $x = x(g)$ del espacio G/K correspondiente al elemento g : $|\psi_g\rangle = e^{i\alpha} |x\rangle, |\psi_0\rangle = |0\rangle$.

Ahora abordaremos el estudio de los estados coherentes generalizados basados en grupos Lie más populares.

Grupo $SU(2)$

El grupo $G = SU(2)$ es fundamental en muchos casos de la física, por ende es necesario analizar los estados coherentes generalizados construidos con base en este grupo.

El álgebra de este grupo se define por los generadores $S^\pm = S^x \pm iS^y, S^0 = S^z$ con las conmutaciones $[S^z, S^\pm] = \pm S^\pm, [S^-, S^+] = -2S^z$ y el operador de Casimir

$$\hat{C}_1 = S^{z^2} + \frac{1}{2}(S^+ S^- + S^- S^+) = S^{z^2} + S^{x^2} + S^{y^2}$$

que conmuta con todos los operadores S^i . De acuerdo con el lema de Schur este operador es proporcional al operador unitario

$$\hat{C}_1 = j(j+1) \hat{I}$$

Esto implica que la representación del grupo $SU(2)$ está caracterizada por un número j . Al operador de la representación irreducible $T(g)$ de este grupo se puede parametrizar como:

$$T(g) = e^{i(\alpha S_x - \bar{\alpha} S_y + \lambda S_z)}, |\alpha| \geq \pi/2; \text{ donde } \lambda \text{ es un número real.}$$

Si ahora elegimos un eigenvector del operador S^z como un vector referente $|\psi_0\rangle = |0\rangle$, la acción del operador $e^{i\lambda S_z}$ sobre el vector $|\psi_0\rangle$ lleva sólo al cambio de fase para $|\psi_0\rangle$. Esto significa que los elementos como $e^{i\lambda S_z}$ producen un subgrupo estacionario del vector $|\psi_0\rangle$ que coincide con el grupo $U(1)$. Entonces, los ECG en nuestro caso estarán definidos en el espacio homogéneo $SU(2)/U(1)$, sobre la esfera S^2 , es decir, so-

bre el espacio complejo proyectivo $CP^1 = S^2$. Entonces el sistema de ECG ahora se puede escribir como:

$$|\psi\rangle = T(g)|\psi_0\rangle = e^{\alpha\hat{S}^+ - \bar{\alpha}\hat{S}^-}|0\rangle = (1+|\psi|^2)^{-j} e^{j\psi\hat{S}^+}|0\rangle; \quad [2]$$

con

$$\hat{S}^\pm = \hat{S}^x + i\hat{S}^y, \psi = \frac{\alpha}{|\alpha|} \tan |\alpha|, |0\rangle = |j, -j\rangle$$

donde α y ψ que son números complejos y j define la representación unitaria del grupo $SU(2)$. Como se puede ver, la serie de estados coherentes o funciones de prueba [2] tienen la simetría de la esfera.

El vector $|0\rangle = |j, -j\rangle$ con menor peso para el grupo $SU(2)$, satisface la condición

$$\Delta\hat{C}_2 = \inf\{\Delta\hat{C}_2\} = j$$

El resultado está ligado intuitivamente con la situación cuando el vector con menor peso es el "vacío" para el operador descendente $S^-|0\rangle = 0$. Un caso particular de este resultado es el grupo de Heisenberg-Weyl.

Para otros casos cuánticos cuando el Hamiltoniano está dado en términos de los operadores de Bose, entonces la base de funciones de prueba más natural es la formada por estos estados coherentes. En este caso el operador de aniquilamiento satisface $a|0\rangle = 0$. Cuando el estudio involucra a infinitos grados de libertad, la construcción de los estados coherentes generalizados es muy similar a la situación descrita arriba.

Para $j = 1$ los estados coherentes generalizados serán los que viven en el espacio $SU(2)/U(1)$ y pueden ser parametrizados por la función compleja ψ (Makhankov *et al.*, 1996)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{1+|\psi|^2} \{|0\rangle + \sqrt{2}\psi|1\rangle + \psi^2|2\rangle\} \quad [3]$$

y donde $|i\rangle$ ($i = 0, 1, 2$) son estados cuánticos puros de espín (*down, middle and up states*, como de costumbre). Los componentes del vector espín clásico serán:

$$\vec{S} = (S^x, S^y, S^z) = \langle \psi | \hat{S} | \psi \rangle$$

y los del momento cuadrupólico Q^y para cualquier valor de j serán

$$S^+ = \bar{S}^- = 2j \frac{\bar{\psi}}{1+|\psi|^2} \quad [4]$$

$$S^z = -j \frac{1-|\psi|^2}{1+|\psi|^2}$$

$$Q^z = \frac{j^2(1-|\psi|^2) + 2j|\psi|^2}{(1+|\psi|^2)^2}$$

Pero como los operadores de espín conmutan en diferente lugar de la celda, entonces la correlación de $S^i S^j$ tendrá la forma

$$\langle \psi | \bar{S}_m^i \hat{S}_{m+1}^k | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{S}_m^i | \psi \rangle \langle \psi | \hat{S}_{m+1}^k | \psi \rangle;$$

donde $|\psi\rangle = |\psi\rangle_m |\psi\rangle_{m+1}$

Grupo $SU(1, 1)$

El álgebra de este grupo se define por las relaciones de conmutación $[K^z, K^\pm] = \pm K^\pm$, $[K^-, K^+] = 2K^z$ y, además, el operador de Casimir

$$\hat{C}_2 = (K^z)^2 - \frac{1}{2}(K^+K^- + K^-K^+) = (K^z)^2 - (K^+)^2 - (K^-)^2 \quad [5]$$

conmuta con todos los operadores K . Nuevamente, según el lema de Schur para las representaciones irreducibles, este operador de Casimir es un múltiplo de la unidad $\hat{C}_2 = k(k-1)\hat{I}$.

Veamos la siguiente parametrización del grupo $SU(1,1)$, es decir, $T_2(g) = \exp(\alpha K^+ - \bar{\alpha} K^- + i\lambda K^z)$.

Si ahora escogemos a $|\psi_0\rangle$ como un eigenvector del operador K^z , entonces la acción del operador $e^{i\lambda K^z}$ sobre el vector $|\psi_0\rangle$ conlleva simplemente a un cambio de fase, es decir, los elementos $h = e^{i\lambda K^z}$ forman el grupo estacionario del vector $|\psi_0\rangle$.

Como se puede observar, el grupo estacionario $g = e^{i\lambda K^z}$ y el grupo $h = e^{i\lambda K^z}$ coinciden con el grupo $U(1)$; por lo tanto, en los dos casos analizados arriba, los estados coherentes generalizados serán definidos en los espacios homogéneos $SU(2)/U(1)$, $SU(1, 1)/U(1)$, es decir, sobre la esfera S^2 en el primer caso y en la pseudoesfera $S^{1,1}$ en el segundo. El sistema de estados coherentes generalizados será construido fácilmente como

$$|\alpha\rangle_2 = D_2(\alpha)|\psi_0\rangle_2 = e^{\alpha K^+ - \bar{\alpha} K^-} |\psi_0\rangle_2$$

La discusión ulterior será distinta para los dos casos. Así, los estados $|j, \mu\rangle$ con una protección de espín sobre la base del eje X_3 provee las bases en la representación unitaria irreducible del espacio $T(g)$ del grupo $SU(2)$. Es muy especial y simple el sistema de estados coherentes formados con base en el vector referente $|\psi_0\rangle_1 = |j, -j\rangle$, es decir $\mu = -j$, de tal manera que $S^-|\psi_0\rangle = 0$.

En el segundo caso, la representación unitaria irreducible del grupo $SU(1, 1)$ tiene la serie fundamental, dos series discretas $T^{(+)}$, $T^{(-)}$ y otra adicional. Por lo tanto, se puede construir un número de sistemas de estados coherentes relacionados con esta serie. El más importante podría ser el sistema relacionado con las series discretas que pueden ser realizadas a través de los operadores de creación y aniquilación. Es suficiente considerar sólo una de las dos series, por ejemplo $T^{(-)}$, porque todos los resultados se pueden trasladar fácilmente a $T^{(+)}$. Entonces los vectores base del espacio $T^{(-)}$ se pueden denotar como $|k, m\rangle \rightarrow |k, \mu\rangle$, donde $\mu = k - m$. Así, $K_0|k, \mu\rangle = \mu|k, \mu\rangle$. Podemos elegir al vector $|\psi_0\rangle_2$ en la forma

$$|\psi_0\rangle_2 = |k, k\rangle \quad [6]$$

y tenemos $K|\psi_0\rangle_2 = 0$. Finalmente los estados coherentes construidos sobre los vectores [6] tienen la forma

$$|\zeta\rangle_2 = (1 - |\zeta|^2)^k e^{\zeta K} |\psi_0\rangle_2$$

que serán los estados coherentes de pseudoesfín.

Los estados coherentes generalizados tienen propiedades importantes análogas a las propiedades de los estados coherentes del popular Heisenberg-Weyl. Así,

1) Los operadores $T(g)$ transfieren un estado coherente a otro;

2) Los estados coherentes generalizados son completos (más precisamente) son sobrecompletos;

3) Los estados coherentes generalizados no son ortogonales entre sí

$$\langle \zeta' | \zeta \rangle_1 = [(1 + |\zeta'|^2)(1 + |\zeta|^2)]^{-j} (1 + \zeta \bar{\zeta}')^{2j}$$

$$\langle \zeta' | \zeta \rangle_2 = [(1 - |\zeta'|^2)(1 - |\zeta|^2)]^k (1 - \zeta \bar{\zeta}')^{-2k}$$

donde la primera corresponde a la esfera S^2 , y la segunda a la pseudoesfera S^{11} .

4) Además, los estados coherentes generalizados minimizan la dispersión:

$$\Delta C_2 = \langle \psi_s | C_2 | \psi_s \rangle - g^{ik} \langle \psi_s | x_i | \psi_s \rangle \langle \psi_s | x_k | \psi_s \rangle$$

con $C_2 = g^{ik} x_i x_k$, que es el operador cuadrático de Casimir, x_i son los generadores del álgebra de Lie y g^{ik} es el tensor métrico de Cartan-Killing.

La relación análoga a la anterior para el caso especial de los estados coherentes comunes basados en el álgebra de Weyl, es la relación de incertidumbre de Heisenberg, al obtener $\Delta p \Delta x = \frac{1}{2}$.

5) En el límite de valores grandes de j (o k) los estados coherentes generalizados tienden a los estados bosónicos. La demostración de esto es mediante la sustitución

$$S^+, (K^+) \rightarrow \sqrt{2j} a^+, \zeta \rightarrow \frac{\alpha}{\sqrt{2j}}, (j \rightarrow k)$$

Entonces, se asume que $j, (k) \rightarrow \infty$. Por lo que los estados coherentes de estos grupos Lie pueden ser reescritos así

$$|\zeta\rangle_1 \rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{|\alpha|^2}{2j}\right)^{-j} \exp(\alpha a^+) |\psi_0\rangle_1 = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \exp(\alpha a^+) |0\rangle$$

$$|\zeta\rangle_2 \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{|\alpha|^2}{2k}\right)^k \exp(\alpha a^+) |\psi_0\rangle_2 = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \exp(\alpha a^+) |0\rangle$$

Para otros grupos los ECG son construidos al usar su representación fundamental

$$|\psi\rangle = \left\{ \sum_i^{2r} (\zeta_i \hat{T}_i^+ - \bar{\zeta}_i \hat{T}_i^-) \right\} |0\rangle$$

$$= \left(1 + \sum_i^{2r} |\psi_i|^2 \right) \left\{ |0\rangle + \sum_i^{2r} \psi_i |i\rangle \right\};$$

donde los \hat{T}_i^+ y \hat{T}_i^- son generados del grupo $SU(2j + 1)$ en la representación fundamental y

$$\psi_i = \frac{\zeta_i}{|\zeta|} \tan |\zeta| \quad |\zeta| = \sqrt{\sum_i^{2r} |\zeta_i|^2}$$

$$|0\rangle = (0, \dots, 0, 1)^r \quad |i\rangle = (0, \dots, 0, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_i)^r$$

En el caso de CP^2 , el grupo Lie a estudiar es $G = SU(3)$, el espacio cociente será $G/H = SU(3)/SU(2) \otimes U(1)$ entonces tendremos

$$|\psi\rangle = (1 + |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)^{\frac{1}{2}} \{ |0\rangle + \psi_1 |1\rangle + \psi_2 |2\rangle \} \quad [7]$$

III. Aplicación de estados coherentes

1. Oscilador cuántico perturbado

Un sistema físico muy importante de la mecánica cuántica es el oscilador armónico, que es uno de los pocos ejemplos no triviales que se puede resolver explícitamente con toda generalidad; existen varios métodos para resolverlo, por ejemplo, el de series de potencias, el de factorización (método operacional introducido por Dirac) y el de los estados coherentes propuesto por Schrödinger en 1926.

Ahora veremos el oscilador cuántico bajo la acción de una fuerza variable externa. La evolución del sistema en el tiempo se define por la ecuación de Schrödinger:

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = (H_0 + H_1) |\psi(t)\rangle \quad [8]$$

con $H_0 = \frac{1}{2}(p^2 + w^2 q^2) = w^2(a^+ a + \frac{1}{2})$, que es el operador Hamiltoniano del oscilador armónico libre y el término adicional

$$H_1 = f(t)q = -f(t) \sqrt{\frac{1}{2w}}(a + a^+),$$

que describe la acción de la fuerza externa. Si $\hbar = m = 1$ y consideramos la transformación unitaria

$|\psi(t)\rangle = \exp(-iH_0 t) |\Psi(t)\rangle$, con lo cual se elimina H_0 en la ecuación de Schrödinger [8]. Para el vector $|\Psi(t)\rangle$ se obtiene

$$i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle \quad [9]$$

ahora con el Hamiltoniano

$$H(t) = \exp\{iH_0 t\} H_1 \exp(-iH_0 t)$$

$$= -f(t) \sqrt{\frac{1}{2w}} (a \exp(-iwt) + a^+ \exp(iwt)) \quad [10]$$

La ecuación [9] se puede escribir como

$$\frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = (\beta(t)a^+ - \beta^*(t)a) |\Psi(t)\rangle \quad [11]$$

con

$$\beta(t) = \frac{i}{\sqrt{2w}} f(t) \exp(iwt)$$

ya que el Hamiltoniano $H(t)$ se expresa linealmente a través del operador del álgebra de Lie \mathbb{W}_1 . Entonces, el operador de evolución $S(t)$ es un operador de la representación $T(g)$ del grupo \mathbb{W}_1

$$|\Psi(t)\rangle = S(t) |\Psi(0)\rangle$$

con

$$S(t) = T(g(t)) = \exp(i\varphi(t)) D(\alpha(t)).$$

Por lo que, si un estado inicial es un estado coherente del grupo \mathbb{W}_1 , entonces un estado ulterior será un estado coherente en cualquier momento. Existe una solución del tipo:

$$|\Psi(t)\rangle = \exp(-i\varphi(t)) |\alpha(t)\rangle \tag{12}$$

En donde el valor medio del operador a en este estado es igual a $\langle\Psi| a |\Psi\rangle = \alpha(t)$.

Al diferenciar esta ecuación respecto de t y emplear [11] se tiene:

$$\alpha' = \beta; \quad \alpha(t) = \alpha_0 + \int_0^t \beta(t') dt' \tag{13}$$

Si tomamos el límite $\Delta t \rightarrow 0$

$$|\psi(t+\Delta t)\rangle \sim D(\beta(t)\Delta t) |\Psi(t)\rangle$$

y colocamos en esta ecuación $|\Psi(t)\rangle$ de [12] y empleamos $T(t, \alpha) |\beta\rangle = \exp(i\varphi) |\beta + \alpha\rangle$, se obtiene

$$\varphi' = \text{Im}(\beta^* \alpha) = \text{Im}(\alpha'^* \alpha) \tag{14}$$

Se observa que [13] es la ecuación de movimiento clásico para el oscilador armónico bajo la acción de una fuerza externa. De la ecuación [14] se observa que $\varphi(t)$ es dos veces la superficie física, es decir, que

$$\varphi(t) = \frac{1}{\hbar} \int_{q_0}^{q_t} p dq$$

que tiene un sentido cuasiclásico.

Veamos ahora la posibilidad de pasar de un estado cuántico $|m\rangle$ a otro $|n\rangle$, que está dada por

$$w_{mn} = |\langle m| S |n\rangle|^2 = |\langle m| D(\gamma) |n\rangle|^2 \tag{15}$$

donde $|\gamma|^2 = \rho$, $|m-n| = k$ y de (15) se obtiene

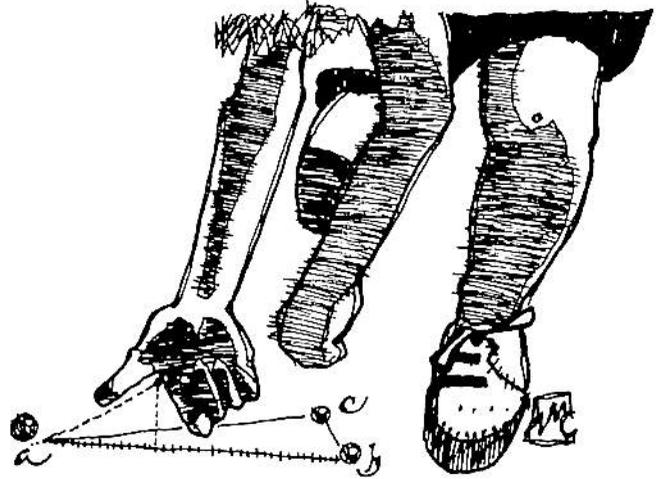
$$w_{mn} = \frac{n_{\leftarrow}!}{n_{\rightarrow}!} |\gamma|^{2|m-n|} \exp(-|\gamma|^2) |L_{n_{\leftarrow}}^{m-n}(|\gamma|^2)| \tag{16}$$

con

$$\gamma = \int_0^\infty \beta(t') dt' = \frac{1}{\sqrt{2w}} \int_0^\infty f(t) \exp(iwt) dt \tag{17}$$

En particular, si $|\psi(t)\rangle \rightarrow |0\rangle$ cuando $t \rightarrow -\infty$, el oscilador se encuentra en el estado base y bajo la acción de $f(t)$ pasa a estado coherente. La probabilidad de excitación del nivel n está dada por la ecuación de Poisson

$$w_n = \exp(-\rho) \frac{\rho^n}{n!} \tag{18}$$



2. Ecuación cúbica-quinta de Schrödinger

Ilustramos la obtención de la ecuación no lineal cúbica-quinta de Schrödinger a partir del modelo ferromagnético de Heisenberg (ver detalles en Makhankov, 1990). El Hamiltoniano de la interacción entre el sistema de espines y el de fonones se puede escribir como

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + H_1, \text{ donde } H_1 = T + V \text{ y}$$

$$\hat{H}_1 = -\frac{1}{4} \sum_{\alpha} [J_{\alpha+\sigma} (\hat{S}_\alpha^+ \hat{S}_{\alpha+\sigma}^- + h.c.) - 2J_{\alpha\sigma} \hat{S}_\alpha^z \hat{S}_{\alpha\sigma}^z] - \mu b \sum_{\alpha} \hat{S}_\alpha^z \tag{19}$$

Aquí, como de costumbre T y V representan a las energías cinética y potencial, respectivamente, de las oscilaciones de la red. El Hamiltoniano está dado en términos de los operadores \hat{S} de espín. Las magnitudes de acoplamiento $\hat{J}_{\alpha+\sigma} \equiv J(|x_{\alpha+\sigma} - x_\alpha|)$ tienen propiedades simétricas $J_{ik} = J_{ki}$ y el vector $\vec{B} = (0, 0, b)$ es el vector del campo magnético externo aplicado al sistema y, por último, μ es la susceptibilidad magnética.

En el caso del Hamiltoniano [19], deseamos pasar de la representación cuántica especificada por los operadores \hat{S} hacia una representación semiclásica, de c -índices (φ clásicos). Estos índices son las variables complejas conjugadas canónicas del espacio de fase del sistema clásico. Para esto se requiere tener una representación de los operadores de espín en términos de operadores (de Bose) de creación a^+ y destrucción a . Para "bosonizar" a estos operadores de espín, se usan las siguientes relaciones de Holstein-Primakov

$$\hat{S}_j^+ = \sqrt{2s - \hat{n}_j} a_j \tag{20}$$

$$\hat{S}_j^- = a_j^+ \sqrt{2s - \hat{n}_j}$$

$$\hat{S}_j^z = s - \hat{n}_j$$

$$\hat{n}_j = a_j^+ a_j$$

Donde s es el valor del espín. Una vez expresado el Hamiltoniano en términos de operadores de Bose al usar

la ecuación anterior, es posible emplear los estados coherentes del grupo de Weyl basados en el álgebra de los operadores de Bose.

$$|\varphi\rangle = e^{\alpha a^+ - \bar{\alpha} a} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\varphi|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad [21]$$

donde $|n\rangle = \sqrt{n!} (a^+)^n |0\rangle$ y promediamos al Hamiltoniano en estudio (pero ya escrito en términos de operadores de Bose) por los estados coherentes [21], se obtiene la versión clásica

$$H = H_0 - \sum_i J_{i+1} [s(\bar{\varphi}_i \varphi_{i+1} + \bar{\varphi}_{i+1} \varphi_i) - \rho s(|\varphi_i|^2 + |\varphi_{i+1}|^2)] - \quad [22]$$

$$- \sum_i \rho J_{i+1} \left[|\varphi_i|^2 |\varphi_{i+1}|^2 - \frac{1}{2\varphi} \bar{\varphi}_{i+1} \varphi_i (|\varphi_i|^2 + |\varphi_{i+1}|^2) \right] - \mu b \sum_i |\varphi_i|^2$$

donde $\rho = \bar{J} / J > 0$. La energía cinética de las oscila-

ciones de la red se define como $T = \frac{m}{2} \sum_i \dot{x}_i^2$ y en la

energía potencial se introduce los términos anarmónicos

$$V = \frac{m\omega_0^2}{2a_0^2} \sum_i (x_{i+1} - x_i - a_0)^2 + \frac{V_{III}}{3!} \sum_i (x_{i+1} - x_i - a_0)^3$$

donde ω_0 es la velocidad del sonido.

Para separar los efectos anarmónicos de los otros generados por la constante de acoplamiento consideramos la aproximación no lineal

$$J_{i+\sigma} \cong J_0 - J_1(x_{i+\sigma} - x_i - a_0) + J_2(x_{i+\sigma} - x_i - a_0)^2$$

con

$$J_k = -\partial^k J / (\partial x_i)^k \big|_{x_i = x_{i-1} - a_0} \quad k = 1, 2$$

Para obtener la versión continua hacemos

$$\varphi_j = \varphi(ja_0) \equiv \varphi(\chi) \quad [23]$$

donde a_0 es la distancia entre dos puntos cercanos de la red y j es la posición en la red. En la aproximación de longitud de onda larga tenemos para las coordenadas de la red la expansión

$$x_{i\pm 1} = x \pm x_x a_0 + \frac{1}{2} x_{xx} a_0^2 \pm \frac{1}{6} x_{xxx} a_0^3 + \frac{1}{4!} x_{xxxx} a_0^4 + \dots$$

La dinámica de la red es analizada en el "espacio-tiempo (χ, t) ". En la expansión del valor de $\varphi_{\pm 1}$ retenemos sólo términos no mayores que φ_{xx} al suponer que φ es del mismo orden que x_{xx} . Entonces, el sistema de ecuaciones de campo generado por el Hamiltoniano [22] después de varias manipulaciones algebraicas adquiere la forma

$$i\varphi_t = -\alpha\varphi_{xx} - \bar{\mu}\varphi + g\chi\varphi + c_1(x\chi)^2 - \lambda|\varphi|^2\varphi \quad [24]$$

$$m\dot{x}_x = \alpha x_{xx} + c_1(x\chi|\varphi|^2) + g(|\varphi|^2)\chi$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{2} J_0 s a_0^2, \bar{\mu} = s(J_0 - J_1)(1 - \rho) - h\mu, g = -J_1 s(\rho - 1)a_0$$

$$c_1 = 4sJ_2(\rho - 1), \lambda = 2J_0(\rho - 1), c = m\omega_0^2, c_1 = 4sJ_2(\rho - 1)$$

En el límite cuasiestacionario $|m\dot{x}_x| \ll |\alpha x_{xx}|$ del sistema de ecuaciones [24] se obtiene

$$i\varphi_t = -\alpha\varphi_{xx} - \bar{\mu}\varphi - p \frac{|\varphi|^2\varphi}{1 + b|\varphi|^2} \quad [25]$$

con

$$b = \frac{c_1}{\sqrt{c}},$$

y

$$p = 4 \left[\frac{J_1 s^2 (1 - \rho)^2}{c} + \frac{1}{2} s J_0 \right]$$

donde los términos de orden superior fueron despreciados. La ecuación [25] es la conocida como ecuación no lineal de Schrödinger con una no linealidad de saturación. Semejante ecuación tuvo su origen también en otras ramas de la física, particularmente en óptica no lineal. Ahora, si tomamos en cuenta la no linealidad menor que $0(b|\varphi|^2)$ en el último término de la ecuación [25], se obtiene la ecuación convencional no relativista de la teoría φ^6 de campos

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} - \mu\varphi + (|\varphi|^2 - \mu|\varphi|^4)\varphi = 0 \quad [26]$$

conocida también como ecuación no lineal cúbica quinta de Schrödinger.

3. Ferromagnetismo de Heisenberg

El fenómeno de ferromagnetismo a bajas temperaturas tiene un carácter clásicamente microscópico, por lo que es posible dar una descripción clásica o semiclásica de su comportamiento. El modelo de Heisenberg proporciona la base para el estudio teórico de una extensa clase de fenómenos ferromagnéticos (y antiferromagnéticos) para el nivel cuántico. La cuestión es formular un procedimiento consistente en reducir modelos estadísticos cuánticos a modelos del campo clásicos conectados a ellos. Por ejemplo, el modelo unidimensional de Hubbard corresponde a 2-componentes de la cadena de espín de Heisenberg con interacción intercomponente. Al generalizar el modelo de Hubbard se obtiene la cadena multicomponente de espín, la cual puede ser usada para describir excitaciones colectivas, además de sus propiedades estadísticas en sistemas que tienen distintas clases de espín. Debido a la complejidad que presentan los sistemas de muchas partículas se introduce el concepto de estados coherentes, y así el problema formulado en lenguaje de mecánica cuántica se convierte en semiclásico. En seguida se muestra la obtención de la descripción semiclásica de modelos de espín cuántico tipo Heisenberg.

Para el caso antiferromagnético se considera el siguiente Hamiltoniano

$$H_c = +J \sum_n (S_n^x S_{n+1}^x + \delta S_n^z S_n^z)$$

donde S_n^x, S_n^y, S_n^z son los operadores de espín al actuar en el sitio n , y δ es el coeficiente de anisotropía.

Si aplicamos directamente los estados coherentes generalizados al Hamiltoniano anterior obtendremos excitaciones con energías negativas, lo cual produciría inestabilidad en el sistema, o más correctamente, el vacío cuántico sobre el cual construimos excitaciones se tornará inestable (Makhankov *et al.*, 1996). Aparentemente, esta es la razón por la cual se busca el vacío en el caso antiferromagnético, el cual es un problema complicado. Para evitar dificultades se prueban excitaciones con energía positiva, de acuerdo a Perelomov (1986) y Konstant (1970) usamos el siguiente procedimiento. Reescribiremos el Hamiltoniano anterior vía los operadores de $SU(1, 1)$.

$$K^\pm = iS^\pm \quad K^z = S^z$$

Entonces tenemos la representación de pseudoespín para el antiferromagnético:

$$H_c = -J \sum_n \left[\frac{1}{2} (K_n^+ K_{n+1}^- + H.C.) - K_n^z K_{n+1}^z (1 + \delta) \right]$$

Ahora aplicamos el esquema de promediación hecho más arriba respecto a Hamiltonianos cuánticos y usamos ECG $L^{1,1}$ para obtener el modelo clásico de redes.

$$H_c = -J \sum_n \frac{2(\zeta_n^+ \zeta_{n+1}^- + \zeta_n^- \zeta_{n+1}^+) - (1 + \delta)(1 + |\zeta_n|^2)(1 + |\zeta_{n+1}|^2)}{(1 - |\zeta_n|^2)(1 - |\zeta_{n+1}|^2)}$$

En el límite del continuo tenemos

$$H_c = -J \sum_n K^2 + \frac{a_0}{2} J \int dx (K_x K_x + \rho K^z K^z) \\ = Jk^2 N + \frac{a_0}{2} \int dx (K_x K_x + \rho K^z K^z)$$

para la representación del σ -modelo, o

$$H_c = \text{constante} + 2k^2 a_0 J \int dx \frac{|\zeta_x|^2 + \rho |\zeta|^2}{(1 - |\zeta|^2)^2}$$

para la proyección estereográfica.

Evitamos el problema de excitación con energía negativa y en su lugar tratamos con el problema de grupos no compactos y variedades (representación del modelo- σ) o expresión singular (proyección estereográfica).

Para obtener la ecuación de movimiento del caso antiferromagnético en la aproximación del continuo, se aplica el procedimiento convencional de desarrollar en series de Taylor la función $\psi_{n\pm 1}$; supongamos $\lambda a_0 \ll 1$, entonces:

$$\psi_{n\pm 1} = \psi(x) \pm a_0 \psi'(x) + \frac{1}{2} a_0^2 \psi''(x) + (a_0^3 \psi''')$$

donde $x = a_0 n$.

Para el caso $S^{1,1}$ la ecuación de movimiento es

$$i\zeta + \Delta\zeta + 2 \frac{(\nabla\zeta)^2 \zeta^*}{1 - |\zeta|^2} + \delta \frac{1 + |\zeta|^2}{1 - |\zeta|^2} = 0$$

donde $\Delta = \nabla^2$ es el operador laplaciano. A esta forma de escribir la ecuación de movimiento se le considera como la proyección estereográfica del modelo no compacto Landau-Lifshitz definida en el hiperboloide $S^{1,1}$. En particular, para el caso $\delta > 0$, esta última ecuación es equivalente a la ecuación repulsiva cúbica no lineal de Schrödinger. Lo que probablemente fascina es que el σ -modelo de esta ecuación da una descripción cuasiclásica correcta de la condensación Bogolubov, por lo que se predice un acoplamiento entre el antiferromagnetismo y superfluidos. Una descripción más detallada de esta equivalencia se puede encontrar en Makhankov (1990).

4. El modelo de Hubbard y la superconductividad

En los últimos años se ha incrementado el interés por los modelos supersimétricos, que por un lado están relacionados con las teorías de supercuerdas y las superconformales y, por otro, se vinculan con teorías del núcleo atómico. La supersimetría en teorías de medios condensados es usada en los metales desordenados y la superconductividad (Nambu, 1985). El descubrimiento de la superconductividad ha revitalizado el interés en los teóricos por el modelo de Hubbard en el dominio de la correlación fuerte de electrones (Anderson, 1987). En la representación atómica, el espacio de fase del modelo en cada lugar de celda cristalina es determinado por cuatro vectores. Dos estados tienen un número impar de partículas: $|0\rangle$ determina las vacancias y el estado $|2\rangle = \hat{c}_\uparrow^+ \hat{c}_\downarrow^+ |0\rangle$ es el estado de dos partículas. Dos estados son estados de partículas $|\uparrow\rangle = \hat{c}_\uparrow^+ |0\rangle$ con el espín hacia arriba y $|\downarrow\rangle = \hat{c}_\downarrow^+ |0\rangle$ con el espín hacia abajo. Aquí $c\sigma^+$ y $c\sigma$ (donde $\sigma = \uparrow, \downarrow$) son operadores fermiónicos de creación y aniquilación que satisfacen

$$\{c\sigma, c_{\sigma'}^+\} = \delta_{\sigma\sigma'}$$

$$\{c\sigma, c_{\sigma'}\} = \{c\sigma^+, c_{\sigma'}^+\} = 0$$

y $\hat{c}\sigma|0\rangle = 0$. Los operadores de Hubbard

$\hat{X}_i^{pq} = |i, p\rangle\langle q, i|$ definido en estos estados en el lugar i generan el álgebra Lie graduado $pl(2/2)$

$$\{\hat{X}_i^{pq}, \hat{X}_j^{nm}\} = \delta_{ij} (\hat{X}_i^{pm} \delta_{qn} - \hat{X}_j^{nq} \delta_{mp})$$

$$[\hat{X}_i^{pq}, \hat{X}_j^{nm}] = \delta_{ij} (\hat{X}_i^{pm} \delta_{qn} - \hat{X}_i^{nq} \delta_{mp}) \quad [27]$$

Aquí se usan los anticonmutadores apropiados para dos operadores fermiónicos que cambian el número de electrones dentro del sitio en número par. Si tuviésemos sólo un operador bosónico (al cambiar el número de

electrones a número impar), esto es suficiente para usar el conmutador en [27]. En el régimen de una fuerte repulsión ($U \rightarrow \infty$) la ocupación de doble estado se descarta y el superálgebra correspondiente de los operadores \hat{X}_i^{pq} se reduce al álgebra $p\mathfrak{l}(2/1)$. Los operadores de Hubbard en el sitio i generan un sistema completo

$$\sum_{p=0, \uparrow, \downarrow} \hat{X}_i^{pq} = I$$

de tal manera que cualquier operador \hat{A}_i puede ser representado en términos de su combinación lineal

$$\hat{A}_i = \sum_{p,q} \langle p, i | \hat{A}_i | i, q \rangle \hat{X}_i^{p,q}$$

En particular, para los operadores fermiónicos y el operador de número de partículas tenemos

$$\begin{aligned} \hat{c}_\uparrow^+ &= \hat{X}^{0\uparrow} + \hat{X}^{\downarrow 2}, \hat{c}_\uparrow^- = \hat{X}^{\uparrow 0} + \hat{X}^{2\downarrow} \\ \hat{c}_\downarrow^+ &= \hat{X}^{0\downarrow} - \hat{X}^{\uparrow 2}, \hat{c}_\downarrow^- = \hat{X}^{\downarrow 0} + \hat{X}^{2\uparrow} \\ \hat{n}_\uparrow &= \hat{c}_\uparrow^+ \hat{c}_\uparrow^- = \hat{X}^{\uparrow\uparrow} + \hat{X}^{22}, \hat{n}_\downarrow = \hat{c}_\downarrow^+ \hat{c}_\downarrow^- = \hat{X}^{\downarrow\downarrow} + \hat{X}^{22} \end{aligned}$$

El Hamiltoniano de Hubbard se puede escribir como

$$H = \sum_{i,j} \sum_{\sigma=\uparrow, \downarrow} t_{ij} \hat{c}_{j\sigma}^+ \hat{c}_{i\sigma} + \sum_{i,j} U_{ij} \hat{n}_{i\uparrow} \hat{n}_{j\uparrow} \quad [28]$$

que consiste de dos partes: la primera describe la transición del electrón desde el lugar j al lugar i de la red, donde t_{ij} es el coeficiente de transición; la segunda describe la repulsión de electrones en los sitios i y j (el trabajo original de Hubbard solamente consideró correlaciones para un solo sitio, así que $U_{ij} = U\delta_{ij}$, y por el principio de exclusión de Pauli solamente combinaciones de componentes de espín con direcciones opuestas son permitidas).

En términos de operadores de Hubbard [27] el Hamiltoniano [28] tiene la forma

$$H = \sum_{i,j} \sum_{p,q,r,m} \left(t_{ij} g_{pq,rm} \hat{X}_i^{pq} \hat{X}_j^{rm} + U_{ij} h_{pq,rm} \hat{X}_i^{pq} \hat{X}_j^{rm} \right) \quad [29]$$

donde las componentes distintas de cero de los tensores $g_{pq,rm}$ y $h_{pq,rm}$ son:

$$\begin{aligned} g_{\sigma 0, 0\sigma} &= 1, g_{\sigma 0, -\sigma 2} = g_{2-\sigma, 0\sigma} = \sigma, h_{\sigma\sigma, -\sigma-\sigma} = 1, \\ h_{\sigma\sigma, 22} &= h_{2-\sigma-\sigma, \sigma} = 1, g_{2-\sigma, -\sigma 2} = 1, h_{22, 22} = 1, (\sigma = \uparrow, \downarrow; -\sigma = \downarrow, \uparrow). \end{aligned}$$

De la ecuación [29] es claro que el Hamiltoniano de Hubbard, escrito en términos de operadores \hat{X}_i^{pq} , tiene la forma de un modelo generalizado de Heisenberg

$$H = \sum_{i,j} \sum_{\alpha, \beta} \mathfrak{S}_{ij} g_{\alpha\beta} \hat{S}_i^\alpha \hat{S}_j^\beta$$

con el superálgebra $p\mathfrak{l}(2/2)$. En la correlación dominante fuerte del electrón, cuando $U \rightarrow \infty$, el Hamiltoniano del modelo adquiere la forma

$$H = \sum_y \left\{ t_y (\hat{X}_i^{\uparrow 0} \hat{X}_j^{0\uparrow} + \hat{X}_i^{\downarrow 0} \hat{X}_j^{0\downarrow}) + U_y \hat{X}_i^{\uparrow\uparrow} \hat{X}_j^{\downarrow\downarrow} \right\}$$

y cuando $U_y = U\delta_{ij}$, $t_y = t\delta_{i+1,j}$,

$$H = t \sum_i (\hat{X}_i^{\uparrow 0} \hat{X}_{i+1}^{0\uparrow} + \hat{X}_i^{\downarrow 0} \hat{X}_{i+1}^{0\downarrow})$$

tiene la forma de un modelo generalizado de Heisenberg en la superálgebra $p\mathfrak{l}(2/1)$. Esta representación fundamental es tridimensional y describe a los supercontrapartes-agujeros y excitaciones de espín. Entonces, el Hamiltoniano efectivo de sistemas de correlación fuerte puede ser considerado como una supergeneralización de Hamiltonianos magnéticos.

En estos casos es conveniente el uso de estados coherentes basados en el álgebra de Grassman. Al hacer otra vez un promedio con los estados coherentes de Grassman

$$|\Psi\rangle = \prod_i |\psi_1, \psi_2\rangle_i$$

donde

$$|\psi_1, \psi_2\rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)\right\} \exp(\psi_1 c_\uparrow^+ + \psi_2 c_\downarrow^+) |0\rangle$$

donde $|0\rangle$ es el vacío ferromagnético. El modelo de Hubbard genera en el límite continuo el Hamiltoniano clásico del tipo impar de Grassman $U(2)$ de la ecuación no lineal de Schrödinger (ENS). Esto quiere decir que podemos considerar el $SU(2/1)/S(U(2)\otimes U(1))$ modelo clásico de Heisenberg, que es una norma equivalente a un límite clásico del modelo de Hubbard expresado en términos de los generadores del supergrupo. El hecho de que ahí exista otro modelo ENS y su norma análoga al $SU(2/1)/S(L(1, 1)\otimes U(1))$ del modelo de Heisenberg implica la existencia de una nueva fase en el Hamiltoniano cuántico inicial. Esta fase relativa a un promedio cuántico microscópico del tipo condensación de Bose es descrito por el campo constante $\varphi(x, t)$ en la versión ENS y por el $S^{(0)}$ en la versión magnética, que es muy similar al límite clásico del Hamiltoniano de la superconductividad a altas temperaturas.

$$H = - \sum_y t_y \alpha_i^+ \alpha_j \left\{ S_i^+ S_j^- + (S_i^z + \frac{1}{2})(S_j^z + \frac{1}{2}) \right\}$$

El magneto no compacto $OSP(1, 1/1)$ puede ser usado si el estado base del sistema es del tipo antiferromagnético, entonces su versión ENS es una superextensión del repulsivo ENS y pretende describir al antiferromagnético.

Una aproximación un tanto diferente puede ser emparentada con la descripción de la condensación Bogolubov en la fase de superfluido del gas de Bose en términos de ondas de pseudoespín en el $SU(1, 1)$ modelo de Heisenberg. En este caso, la superextensión conduce a superpartes de la condensación Bogolubov para aparecer como excitaciones fermiónicas.

Los modelos considerados en esta última parte admiten generalizaciones que involucran superálgebras $SU(N/M)$ y modelos dos-dimensionales, tales como el supermodelo de Ishimori (Makhankov y Pashaev, 1992).

Conclusiones

Es impresionante cerciorarnos que un fenómeno cuántico, como el surgimiento de los rayos láser, pueda generar una vasta disciplina físico matemática llamada ahora método de los estados coherentes generalizados. En este trabajo se expusieron las principales características de estos estados y se abordó la aplicación en ciertos sistemas físicos de interés. Este método es eficiente para

analizar sistemas cuánticos, por lo que su estudio se enfoca hacia una representación semiclassical que tome funciones de prueba. En este sentido, los estados coherentes generalizados fueron las funciones de prueba en el análisis desarrollado en este trabajo; mientras que las ecuaciones diferenciales que se derivan de la aplicación de esta metodología son totalmente no lineales. Esto a su vez implica un estudio sistemático desde el punto de vista solitónico a las nuevas ecuaciones no lineales.



BIBLIOGRAFÍA

Agüero, M. (1990). In *Nonlinear Evolution Equation and Dynamical Systems, Dubna*. Springer, Verlag 1991.

_____ y Espinoza, A. (1993). *Phys. Let. A*, 182, 294.

_____ y Makhankov, V. (1996). *Generalized Coherent States in the Study of Three Level Quasispin Systems*. Preprint LA-UR-1039. CNLS, Los Alamos National Laboratory. New Mexico.

Ajjezer, A. y Berestetsky, A. (1981). *Cuantobyta Electrodinamica* (en ruso). Nauka.

Anderson, P. (1987). *Science*, 235 1196.

Gilmore, R. (1974). "Lie Group, Lie Algebras and Some of Their Applications", en *J. Math. Phys.* (15): 2090. Wiley, New York.

Glauber, R. (1963). *Phys. Rev.* 130, 2529; *Phys. Rev.* 131, 2766.

Klauder, J. y Sudarshan, E. (1968). *Fundamentals of Quantum Optics*. Benjamin, New York.

Konstant, B. (1970). *Group Representations in Mathematics and Physics*, en Bargmann V. (Ed.) Springer, Verlag.

Makhankov, V. (1990). *Soliton Phenomenology*. Kluwer Academic Publishers.

_____ y Pashaev, O. (1992). "Integrable Pseudospin Models in Condensed Matter", en *Math. Phys. Review*. Harwood academic publishers.

_____ ; Agüero, M. y Makhankov, A. (1996). *J. Phys. A: Math. Gen.* (29): 3005-3019.

Nambu, Y. (1985). *Physica*, 15D, 147.

Perelomov, A. (1972). *Commun. math. Phys.* (26): 222-236. Springer, Verlag.

_____ (1986). *Generalized Coherent States and their Applications*. Springer, Verlag.

Zhang, F. y Gilmore. (1990). "Coherent States", en *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 62, Núm. 4, octubre.

Zou, Z. y Anderson, P. (1988). *Phys. Rev.* 37 B, 627.

UAEM

El Centro de Investigación en Ciencias Agropecuarias (CICA) y la Facultad de Ciencias Agrícolas

Invitan al:

Seminario mesoamericano sobre agrodiversidad en la agricultura campesina

28, 29 y 30 de abril de 1998
Toluca, México



Las maneras particulares del manejo de los recursos para la producción agropecuaria se han conceptualizado bajo el término *agrodiversidad*, la cual se define como las diferentes maneras en las cuales los productores agropecuarios usan la diversidad natural para la producción agropecuaria incluyendo no sólo su elección por el cultivo de ciertas especies, sino también el manejo de la tierra, agua, la biota como un todo.

- * **Temática:** * Agrodiversidad en maíz y agricultura campesina.
- * El solar familiar campesino.
- * Otros cultivos (cultivos básicos, comerciales y asociación de cultivos).
- * Experiencias en la conservación, enriquecimiento y pérdida de la agrodiversidad.



Informes y comité organizador:

Centro de Investigación en Ciencias Agropecuarias (CICA)

Tel. y Fax (729) 6 55 52
Dr. Carlos Arriaga Jordán (caj@coatepec.uaemex.mx)
M. C. Cristina Chávez Mejía (ccm@coatepec.uaemex.mx)
M. C. Gabino Nava Bernal (gnb@coatepec.uaemex.mx)

Facultad de Ciencias Agrícolas

Tel. (729) 6 55 29 y 6 55 31
Ing. Andrés González Huerta
Ing. Delfina de Jesús Pérez López
M. C. Pedro Saldívar

Dirección postal para envío de ponencias:

Centro de Investigación en Ciencias Agropecuarias (CICA)
Universidad Autónoma del Estado de México
Oficina de Correos 5
Apartado postal 3
50120 Toluca, México
México

