Revista Academia y Virtualidad

7(1):-79-85, 2014

Solución al sistema de ecuaciones de Euler con fuente

Autor:

Adrián Ricardo Gómez Plata

Fecha de presentación: marzo 20 de 2014
Fecha de evaluación: abril 7 de 2014
Fecha de aceptación: mayo 15 de 2014

Resumen

Este artículo presenta un resultado relacionado con la existencia de soluciones viscosas al sistema de Euler con fuente para un fluido compresible, relacionado con investigaciones y aplicaciones que se hacen en la teoría de leyes de conservación hiperbólica, área bastante reconocida en las *ecuaciones diferenciales parciales*. El método que se usa para encontrar estimaciones de la solución del sistema, no es el de las regiones invariantes que se encuentra en la literatura. En este artículo se muestra cómo usar las soluciones viscosas globales suaves del sistema usando el principio del máximo y se generaliza este resultado al sistema con fuente, para que pueda ser usado en la estimación de soluciones débiles del sistema.

Palabras clave: leyes de conservación hiperbólica, principio del máximo, estimaciones a priori, ecuaciones diferenciales parabólicas, problema de Cauchy.

Solution to Euler´s equation system using source

This paper offers some outcomes related to viscous solutions involving Euler system for a compressible fluid source, regarding research and applications based on theory of hyperbolic conservation laws, a well-known area of *partial differential equations*. We used otherwise literature to method in order to find system solution estimates. Then it shows how to use the soft global viscous solutions of the system based on the maximum principle and such a result is widespread to the system with source, so it can be used to estimate weak solutions of the system.

1. Docente de Planta, Departamento de Matemáticas, Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá; MSc. Phd(c) Applied Mathematics- UNICAMP Campinas-Brasil; adrian.gomez@unimilitar.edu.co

Revista Academia y Virtualidad

Adrián Ricardo Gómez Plata

Keywords: hyperbolic conservation laws, maximum principle, a priori estimates, parabolic differential equations, Cauchy problem.

Solução ao sistema de equações de Euler com fonte

Resumo

Este artigo apresenta um resultado em relação à existência de soluções viscosas ao sistema Euler com fonte para um fluido compressível, relacionado com pesquisas e aplicações que se fazem na teoria das leis de conservação hiperbólica, uma área bastante reconhecida nas equações diferenciais parciais. O método empregado para encontrar estimações da solução do sistema, não é aquele das regiões invariantes encontrado na literatura. Neste artigo mostra-se como utilizar as soluções viscosas globais suáveis do sistema através do princípio do máximo e esse resultado generaliza-se ao sistema com fonte, para que possa ser utilizado na estimação de soluções fracas do sistema.

Palavras clave: leis da conservação hiperbólica, princípio do máximo, estimações a priori, equações diferenciais parabólicas, problemas de Cauchy.

Introducción

Un fluido compresible es aquel en el cual existen variaciones de densidad significativas producidas por cambios de temperatura, presión o por grandes velocidades.

Con base en este principio, resulta posible estudiar el sistema de ecuaciones de Euler en una dimensión espacial como caso particular del sistema de ecuaciones de Euler sin fuente el cual, además, modela la dinámica de un gas que fluye a través de un tubo y donde la densidad, la velocidad y la energía son constantes a lo largo de secciones transversales de un tubo.

Por otra parte, es importante señalar que hay suficientes estudios desde el análisis numérico para este tipo de sistemas ya que la demostración de soluciones explícitas es casi imposible por métodos clásicos. Por ejemplo, para el sistema de ecuaciones de Euler unidimensional [véase Ávila, Hortúa y Castañeda; 2010], para las ecuaciones de Euler en 2D [véase Bassi. & Rebay; 1997] o para ecuaciones de Euler de forma general [véase Chung Chang, 1995], o una aplicación a la economía con métodos numéricos [véase Maldonado y Moreira, 2006].

Por otra parte es importante resaltar que son diversas las aplicaciones de este sistema. Por ejemplo, en física e ingeniería se resuelven diversas manifestaciones del sistema para solucionar problemas aplicados particulares; lo cierto es que cada aplicación constituye un reto diferente, porque, aunque se puede garantizar existencia de soluciones en la mayoría de aplicaciones, no se puede asegurar que se pueden establecer soluciones explícitas o implícitas por los métodos clásicos, y por ello es posible encontrar muchos artículos numéricos que resuelven casos muy concretos relacionados con este tipo de sistemas.

En este artículo se prueba la existencia de soluciones viscosas al sistema de flujo de un fluido compresible dado por

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + f(v)\right)_x + g_1(u,v) = 0 \\ v_t + (uv + g(v))_x + g_2(u,v) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Asimismo, con condiciones acotadas medibles en la norma L^∞ dadas por

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)). \quad (2)$$

Físicamente se puede entender este sistema como el modelo para la dinámica de un fluido compresible no viscoso que no conduce calor cuyas ecuaciones, además, se pueden interpretar como ley de conservación de la masa con fuente

$$v_t + (uv + g(v))_x + g_1(u,v) = 0$$

donde la densidad por unidad de hipervolumen de la masa del fluido se puede representar por y la velocidad del fluido mediante . Así, la ley de conservación del momento lineal total con fuente se puede entender como

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + f(v)\right)_x + g_2(u,v) = 0.$$

Un caso particular del sistema (1) es el reconocido de ecuaciones dinámico para un gas politrópico, tal como lo pueden encontrar en Evans, (1998) y Lu (2002).

La metodología que usaremos en este artículo para abordar este fundamento se basa en la teoría de leyes de conservación hiperbólica, consistente en que para hallar aproximaciones de soluciones viscosas de un sistema hiperbólico se perturba en cierta forma dicho sistema a fin de convertirlo en parabólico y poder aplicar el método de la regiones invariantes o el principio del máximo. Un ejemplo de la aplicación de esta metodología a sistemas de elasticidad extendidos ya fue llevado a cabo por Gómez Plata en “Soluciones al sistema general de ecuaciones de Euler para un fluido compresible” (2011) y “Soluciones viscosas a un Sistema de elasticidad generalizado” (2012).

A finales del siglo pasado se descubrieron los métodos de compacidad compensada y de entropía, que permiten establecer la existencia de soluciones débiles a este tipo de sistemas de leyes de conservación hiperbólica, tal como se puede ver en Tsuge (2008); Gui-Qiang (2010); Yan, Zhixin & Ming (“Conservations Laws II: Weak Solutions”, 2007) y Yan, Zhixin & Ming (“Conservations Laws III: Relaxation Limit”, 2007). Gran parte de los más recientes desarrollos a partir de nuevos métodos los han aportado investigadores en matemáticas de China, y son ellos quienes al momento se han adelantado para establecer técnicas que permiten generalizar sistemas de leyes de conservación ya existentes.

Evans, en *Partial Differential Equation* (1998), hace una clara introducción a las ecuaciones parabólicas, operadores parabólicos y al principio del máximo débil y fuerte, en particular Murray y otro en Protter & Weinberger (1999), quienes estudian el principio del máximo para ecuaciones diferenciales ordinarias y pasan al principio del máximo para ecuaciones diferenciales parciales parabólicas. En especial, Landis (*Second Order Equations of Elliptic and Parabolic Type*, 1997) hace una profunda y elegante presentación de este tipo de ecuaciones. Lu (2002), por su parte, hace una breve y precisa introducción a los sistemas de leyes de conservación y define los invariantes de Riemann.

Revista Academia y Virtualidad

Adrián Ricardo Gómez Plata

Cálculo de estimaciones a priori

Se puede garantizar la existencia de soluciones viscosas locales suaves en L^∞ [véase teorema 1.0.2 en Lu (2002)] y el mismo Lu, en el capítulo 10, usa el método de las regiones invariantes a fin de garantizar la existencia de soluciones del sistema

$$\begin{cases} u_t + \left(\dfrac{1}{2}u^2 + f(v)\right)_x + g_1(u,v) = \varepsilon u_{xx} \\ v_t + (uv + g(v))_x + g_2(u,v) = \varepsilon v_{xx} \end{cases} \quad (3)$$

con las condiciones acotadas medibles enunciadas en (2). Asimismo, se estimarán cotas para las soluciones de (2), y para ello convertiremos el problema de hallar la solución de (2) en el problema a fin de hallar la solución de una ecuación parabólica asociada al problema hiperbólico planteado para (2). Esta forma de abordar el problema permite hallar soluciones viscosas a un sistema de ecuaciones diferenciales, que para este caso en particular usará el principio del máximo para ecuaciones parabólicas. Consideremos el sistema (3), con las condiciones acotadas medibles enunciadas en (2) y suponiendo, para , de tal modo que:

A. $f, g \in C^3[0,\infty)$ y $f_1 = \left(f'/_v\right) \in C^2[0,\infty)$, $g_1 = \left(g'/_v\right) \in C^2[0,\infty)$

satisface $f_1 \geq d$, con $d \in R$, y:

donde $s_1 = \sqrt{g_1^2 + 4f_1}$.

$$2f_1' + g_1'(s_1 + g_1) \geq 0, \text{ para } v \geq 0$$
$$2f_1' + g_1'(s_1 - g_1) \geq 0, \text{ para } v \geq 0$$

B. u_0 y v_0 acotadas y medibles, $v_0 \geq 0$.

Ahora bien, el siguiente teorema establece la existencia de soluciones globales suaves, tal como se plantea en Lu (2002) y Gómez Plata ("Soluciones al sistema general de ecuaciones de Euler para un fluido compresible", 2011) para el sistema de Euler sin fuente

$$\begin{cases} u_t + \left(\dfrac{1}{2}u^2 + f(v)\right)_x = \varepsilon u_{xx} \\ v_t + (uv + g(v))_x = \varepsilon v_{xx} \end{cases} \quad (4)$$

con condiciones acotadas medibles en la norma L^∞ dadas por (2).

Teorema 1. Para un , el problema de Cauchy (4), con las condiciones de (2) y suponiendo que cumple las condiciones de A y B, tiene solución única global suave $(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t))$ que satisface
donde M es una constante positiva independiente de ε.
Demostración. El sistema (4) se puede escribir como

$$U_t + dFU_x = 0$$

donde $U = (u,v)^T$, $F = R^2 \to R^2$, $F : (u,v)$ a $\left(\frac{1}{2}u^2 + f(v), uv + g(v)\right)_x$ y

$$dF = \begin{pmatrix} u & f'(v) \\ v & u + g'(v) \end{pmatrix}$$

Para calcular los valores propios de esta matriz dF , se hace $\det(dF - \lambda I) = 0$, de donde al

$$2\lambda^2 - \lambda(3u - vg_1) + (u^2 + uvg_1 - v^2 f_1) = 0$$

se tiene

$$\lambda_1 = \frac{2u + vg_1(v) - vs_1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{2u + vg_1(v) + vs_1}{2}.$$

Los vectores propios a la derecha de λ_1, λ_2 que son

$$r_1 = (-2f_1, s_1 - g_1)^T, r_2 = (2f_1, s_1 + g_1)^T$$

Al calcular los invariantes de Riemann, se obtiene

$$w = u + \int_0^v \frac{g_1 + s_1}{2}, \qquad z = u + \int_0^v \frac{g_1 - s_1}{2}$$

Calculando $w_v, w_u, w_{uu}, w_{uv}, w_{vv}$; $z_v, z_u, z_{uu}, z_{uv}, z_{vv}$, tenemos multiplicando el sistema (4) por $\nabla z(u,t) = (z_u, z_v)$, y tenemos $\nabla z(U_t + dFU_x) = \varepsilon \Delta U$, Si $\nabla z dF = \lambda_1 \nabla z$, encontramos

$$z_t + \lambda_1 z_x = \varepsilon z_{xx} - \varepsilon (z_{vv}) v_x^2 = \varepsilon z_{xx} - \varepsilon \left(\frac{g_1'(s_1 - g_1) + 2f_1'}{2s_1} \right) v_x^2$$

Si $v \geq 0, \quad 2f_1' + g_1'(g_1 + s_1) \geq 0$, entonces

$$w_t + \lambda_2 w_x \leq \varepsilon w_{xx} \quad (6)$$

Si $\nabla w dF = \lambda_2 \nabla w$, al multiplicar el sistema (3) por $\nabla w(u,t) = (w_u, w_v)$, tenemos $\nabla w(U_t + dFU_x) = \varepsilon \Delta U$, hallamos que

Si $v \geq 0, \quad 2f_1' + g_1'(g_1 + s_1) \geq 0$, entonces

$$w_t + \lambda_2 w_x \leq \varepsilon w_{xx} \quad (6)$$

Tomando (5) y (6), así

$$(-z_t) + \lambda_1(-z_x) \geq \varepsilon(-z_{xx}) \quad (7)$$

$$w_t + \lambda_2 w_x \leq \varepsilon w_{xx} \quad (8)$$

Al considerar las desigualdades (7) y (8) con variables en w y z, mediante el principio del máximo se pueden conseguir estimaciones

$$w(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \leq M, \quad z(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \geq -M$$

y, por tanto,

$$|u^\varepsilon(x,t)| \leq M, \quad 0 \leq |v^\varepsilon(x,t)| \leq M$$

para una constante positiva M que depende de la norma L^∞ en los datos iniciales.

Proposición 1. Supongamos que $g_1(u,v), g_2(u,v)$, cumplen

$$w_u g_1 + w_v g_2 \geq c_1 w + c_2, \qquad z_u g_1 + z_v g_2 \leq c_3 w + c_4$$

donde $c_1, c_2, c_3, c_4 \in$ ° y $g_2 = vh(u,v)$ con *h(u,v)* una función continua para *(u.v)* ,

Entonces, el problema de Cauchy (1), (2) tiene única solución $\left(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t)\right)$ y satisface que para todo t >0 ,

$$\left|u^\varepsilon(x,t)\right| \leq M(T); 0 < c(\varepsilon,t) \leq v^\varepsilon(x,t) \leq M(T)$$

sobre ° $\times[0,T]$, donde M(T) es una constante positiva que es independiente de ε, $c(\varepsilon,t)$, es una función positiva la cual tiende a cero cuando ε tiende a cero o t tiende a infinito.

Demostración. Puesto que en el teorema 1, el sistema (3) se puede escribir como

$$U_t + dFU_x + G = 0$$

donde $U = (u,v)^T$, $F = R^2 \to R^2$, $F:(u,v)$ a $\left(\frac{1}{2}u^2 + f(v), uv + g(v)\right)_x$ y

$$dF = \begin{pmatrix} u & f'(v) \\ v & u + g'(v) \end{pmatrix}$$

Revista Academia y Virtualidad

Adrián Ricardo Gómez Plata

donde los valores propios del sistema son

$$\lambda_1 = \frac{2u + vg_1(v) - vs_1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{2u + vg_1(v) + vs_1}{2}.$$

y los vectores propios a derecha de λ_1, λ_2 son

$$r_1 = (-2f_1, s_1 - g_1)^T, r_2 = (2f_1, s_1 + g_1)^T.$$

Los invariantes de Riemann son

$$w = u + \int_0^v \frac{g_1 + s_1}{2}, \qquad z = u + \int_0^v \frac{g_1 - s_1}{2}$$

Calculando $w_v, w_u, w_{uu}, w_{uv}, w_{vv}$; $z_v, z_u, z_{uu}, z_{uv}, z_{vv}$, tenemos que

$$w_u = \frac{\partial}{\partial u}\left(u + \int_0^v \frac{g_1 + s_1}{2}\right), \qquad z_u = \frac{\partial}{\partial u}\left(u + \int_0^v \frac{g_1 - s_1}{2}\right)$$

$$w_v = \frac{\partial}{\partial v}\left(u + \int_0^v \frac{g_1 + s_1}{2}\right), \; w_v = \frac{\partial}{\partial v}\left(u + \int_0^v \frac{g_1 - s_1}{2}\right)$$

$$w_{vv} = \frac{g_1^{'}(g_1 + s_1) + 2f_1^{'}}{2s_1}, \quad z_{vv} = \frac{g_1^{'}(s_1 - g_1) + 2f_1^{'}}{2s_1}$$

$$w_{uu} = 0, \quad w_{uv} = 0, \quad z_{uu} = 0, \quad z_{uv} = 0$$

Consideremos ahora el problema de Cauchy para el sistema parabólico relacionado con (1), dado por

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + f(v)\right)_x + g_1(u,v) = \varepsilon u_{xx} \\ v_t + (uv + g(v))_x + g_2(u,v) = \varepsilon v_{xx} \end{cases}$$

que se puede escribir como

$$U_t + dFU_x + G = \varepsilon\Delta U \quad (5).$$

Multiplicando por Δz el miembro izquierdo de la anterior igualdad por , y teniendo en cuenta que $\nabla z dF = \lambda_1 \nabla z$ y z_{uu}, z_{uv}, z_{vv} y tenemos que

$$z_t + \lambda_1 z_x + \left(z_u g_1 + z_v g_2\right) = \varepsilon z_{xx} - \varepsilon(z_{vv})v_x^2 = \varepsilon z_{xx} - \varepsilon\left(\frac{g_1^{'}(s_1 - g_1) + 2f_1^{'}}{2s_1}\right)v_x^2.$$

De la condición A, entonces tenemos que

$$v \geq 0, \quad \frac{2f_1^{'} + g_1^{'}(s_1 - g_1)}{2s_1} \geq 0$$

$$z_t + \lambda_1 z_x + \left(z_u g_1 + z_v g_2\right) \leq \varepsilon z_{xx} \quad (6)$$

Ahora bien, si $\nabla w dF = \lambda_2 \nabla w$, al multiplicar el miembro izquierdo de (5) $\nabla w(u,t) = (w_u, w_v)$ entonces tenemos que $\nabla w(U_t + dFU_x) = \varepsilon\Delta U$, de donde

$$w_t + \lambda_2 w_x + \left(w_u g_1 + w_v g_2\right) = \varepsilon w_{xx} - \varepsilon(w_{vv})v_x^2 = \varepsilon w_{xx} - \varepsilon\left(\frac{2f_1^{'} + g_1^{'}(g_1 + s_1)}{2s_1}\right)v_x^2$$

A partir de la condición A, si $v \geq 0$, $2f_1^{'} + g_1^{'}(g_1 + s_1) \geq 0$, entonces $w_t + \lambda_2 w_x + \left(w_u g_1 + w_v g_2\right) \leq \varepsilon w_{xx}$ (7).

Luego, a partir de la hipótesis de la proposición 1 en (6) y (7), hallamos que

$$\begin{cases} (-z_t) + \lambda_1(-z_x) - \left(c_1 z_u + c_2 z_v\right) \geq \varepsilon(-z_{xx}) \\ w_t + \lambda_2 w_x + \left(c_3 w_u + c_4 w_v\right) \leq \varepsilon w_{xx} \end{cases} \quad (8)$$

Finalmente, considerando (8) como desigualdades en las variables *w,z* y aplicando el corolario 1 de Gómez Plata en "Soluciones viscosas a un Sistema de elasticidad generalizado" (2012), observamos que

$$w\left(u^\varepsilon, v^\varepsilon\right) \leq N(T), -z\left(u^\varepsilon, v^\varepsilon\right) \leq -N(T)$$

sobre$^\circ \times [0,T]$ donde N(T) es independiente de ε y $T \in ^{\circ +}$, y se puede hallar un M(T) > 0 tal que.

$$\left|u^\varepsilon(x,t)\right| \leq M, \; \left|v^\varepsilon(x,t)\right| \leq M(T).$$

A partir del teorema 5 y del lema 4 en Gómez Plata [véase "Soluciones viscosas a un Sistema de elasticidad generalizado", 2012], entonces se tiene que.

Conclusiones

Es posible abordar la búsqueda de las soluciones débiles del sistema 2, siguiendo el cálculo hecho para las soluciones débiles del sistema general de Euler sin término fuente, tal como se plantea en Lu (2002), mediante las soluciones viscosas del sistema con fuente, estudiado en "Soluciones al sistema general de ecuaciones de Euler para un fluido compresible" (Gómez Plata, 2011). Para este objetivo se requieren métodos de compacidad compensada para el sistema [véase Landau & Lifshits, 1985], cuestión que se puede abordar usando las estimaciones de soluciones suaves viscosas calculadas en este artículo.

Referencias

Ávila, C.A.; Hortúa, H.J. y Castañeda, L. (2010). "Ecuación de Euler unidimensional". En: *Revista Colombiana de Física.* Vol. 42, N.3 pp. 252-256.

Bassi, F. & Rebay, S. (1997). "High-order Accurate Discontinuous Finite Element Solution of the 2D Euler Equations". En: *Journal of Computational Physics*, 138, pp. 251-285.

Chung Chang, S. (1995). "The method of Space-Time Conservation Element and Solution Element-A New Approach for Solving the Navier-Stokes and Euler Equations". En: *Journal of Computational Physics*, 119, pp. 295-324.

Evans, L. (1998). *Partial differential equation*. Vol. 19. American Mathematical Society.

Gómez Plata, A.R. (2011). "Soluciones al sistema general de ecuaciones de Euler para un fluido compresible". En: *Ciencia e Ingeniería Neogranadina.* Vol. 21-1, pp. 115-124.

_________. (2012). "Soluciones viscosas a un Sistema de elasticidad generalizado". Tesis de Maestría. EAFIT: Medellín.

Gui-Qiang, G-Chen (2010). "Vanishing viscosity limit of the Navier-Stokes equations for compressible fluid flow". En: *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 63, N.11 pp. 1469-1504.

Landau, L. & Lifshits, M. (1985). *Mecánica I*, tomo I, Reverté.

Landis, E. (1997). *Second order equations of elliptic and parabolic type*. 171, American Mathematical Society.

Lu, Y. (2002). *Hyperbolic conservations. Laws and the compensated compacts method*. 128, Chapman and Hall, New York,

Maldonado, W. y Moreira, H. (2006). "Solving Euler Equations: classical methods and the C^1 contraction mapping method revisited". En: *Revista Brasileira de Economía*, 60, N.2, pp. 167-178.

Plaza, C.R. (2011). *Sistemas hiperbólicos de leyes de conservación*. En preparación. http://www.fenomec.unam.mx/ramon/publications.html

Protter, M. & Weinberger, H. (1999). *Maximum principles in Differential Equations*. Springer.

Tsuge, N. (2008). "Global solutions to the compressible Euler equations with gravitational source". En: *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 5, N.2, pp. 317-346.

Yan, J. Zhixin, C. Ming, T. (2007a). "Conservations Laws I: Viscosity Solutions". En: *Revista Colombiana de Matemáticas*, 41, pp. 81-90.

___________. (2007b). "Conservations Laws II: Weak Solutions". En: *Revista Colombiana de Matemáticas*, 41, pp. 91-106

___________. (2007c). "Conservations Laws III: Relaxation Limit". En: *Revista Colombiana de Matemáticas*, 41, pp. 107-115.