DESCRIPCIÓN DE SISTEMAS DISCRETOS LINEALES CON RESPUESTAS AL IMPULSO PERIÓDICAS

DESCRIPTION OF LINEAR DISCRETE SYSTEMS WITH PERIODICAL IMPULSE RESPONSES

Recibido: febrero de 2012
Arbitrado: abril de 2012

Marcelo Herrera Martínez*

Resumen

El presente trabajo es una investigación de las propiedades de los sistemas discretos lineales con respuestas al impulso periódicas. Este es un caso particular de los Sistemas LTI (Lineales e Invariantes con el Tiempo) con esta clase de respuestas al impulso. Primero se investiga la forma general de la función de transferencia cuando la respuesta al impulso es periódica. El caso donde los periodos de la señal de entrada y de la respuesta al impulso son iguales tambien es investigado. El último caso investigado, es aquél, donde los dos periodos son diferentes. Este caso particular es simulado en MATLAB.

Palabras clave

Sistemas LTI, respuestas al impulso periódicas, simulación en MATLAB.

Abstract

The present work is an investigation about the properties of discrete linear systems with periodic impulse responses. It is a particular case of LTI (Linear Time Invariant) Systems with this kind of impulse responses. We first investigate the general form of the transfer function when the impulse response of the system is periodic. Secondly, we investigate the case when the periods of the input signal and the impulse response are equal. The case when when the two periods are different, is also investigated. This last particular case is simulated in MATLAB.

Keywords

LTI systems, impulse responses regular, MATLAB simulation.

Introducción

La caracterización de sistemas mecánicos y eléctricos con funciones de transferencia es una técnica ampliamente usada, que permite la simulación de estos con elementos de control digital. Podemos así, realizar la caracterización de un sistema con estas funciones o con sus respectivas respuestas impulsionales. Si queremos una descripción en tiempo continuo de un sistema, es suficiente calcular su función del sistema $H(s)$, que es la Transformada de Laplace

* Ingeniero Electrónico, Magíster en Radioelectrónica y Doctor en Acústica de la Universidad Técnica de Praga. E-mail. mh2musicamarcelo@gmail.com

de la respuesta impulsional $h(t)$. Asímismo podemos describir un sistema continuo en el tiempo con su respectiva ecuación diferencial. Sin embargo, es posible realizar esta descripción, realizando un mapeo entre la variable compleja *s* de Laplace, y, la variable imaginaria *jw* de Fourier:

$$s = \sigma + jw \quad [1]$$

De esta manera, nuestra descripción del sistema en tiempo continuo es $H(jw)$, la Transformada de Fourier de la respuesta impulsional $h(t)$. De esta manera, obtenemos la función de Transferencia del sistema, en función de jw, donde *w* representa la frecuencia angular. La figura N.° 1 nos ilustra estos dos conceptos.

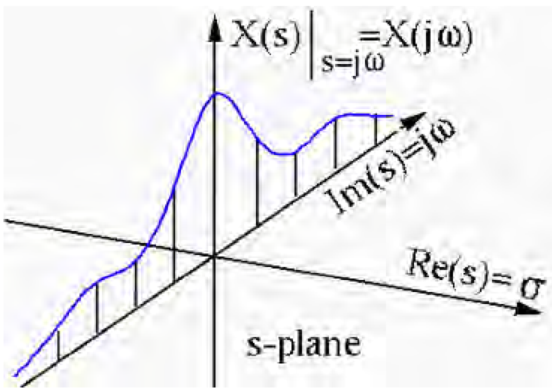

Figura 1. Relación entre transformadas Laplace y Fourier.

Para el modelamiento de sistemas discretos, realizamos la caracterización de estos con ayuda de la Transformada Z, con lo cual obtenemos la Función de Transferencia del Sistema Discreto. Matemáticamente descrito,

$$H(z) = Z\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} \quad [2]$$

De esta manera, obtenemos una descripción para el modelamiento de sistemas discretos. Es posible relacionar la función de transferencia, con la Transformada-Z de la señal de entrada y con la Transformada-Z de la señal de salida, de la siguiente manera,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad [3]$$

Esta relación es de especial utilidad para obtener $H(z)$ cuando se describe el sistema mediante una ecuación lineal en diferencias con coeficientes constantes de la forma,

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k] + \sum_{k=1}^{M} b_k x[n-k] \quad [4]$$

En este caso, la función de Transferencia se puede obtener directamente de [4] calculando la transformada-Z inversa en ambos lados de [4]. Por tanto, aplicando la propiedad de desplazamiento en el tiempo, obtenemos,

$$Y(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k Y(z) z^{-k} + \sum_{k=0}^{M} b_k X(z)\, z^{-k} \quad [5]$$

$$Y(z)\left(1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right) = X(z)\left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right) \quad [6]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \quad [7]$$

o, equivalentemente,

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \quad [8]$$

De esta forma, un sistema lineal invariante en el tiempo descrito por una ecuación en diferencias con coeficientes constantes, tiene una función de transferencia racional.

Esta es, en general, la forma de la función de transferencia de un sistema descrito por una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes. De esta forma general obtenemos dos clases especiales muy importantes. La primera, si $a_k = 0$, para $1 < k < N$, se reduce a

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k} \quad [9]$$

En este caso, $H(z)$ contiene M ceros, cuyos valores están determinados por los parámetros del sistema $\{b_k\}$, y un polo de orden M en el origen z=0. Dado que el sistema contiene M polos triviales en z=0 y M ceros no triviales, se le denomina sistema de todo ceros. Evidentemente, un sistema así tiene una respuesta impulsional de duración finita (FIR, finite impulse response), y se denomina sistema FIR o sistema de media móvil (sistema MA).

Por otra parte, si $b_k = 0$ para 1<k<M, la función del sistema se reduce a

$$H(z) = \frac{b_0}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 z^N}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}} \quad [10]$$

En este caso, H(z) contiene N polos, cuyos valores quedan determinados por los parámetros del sistema $\{a_k\}$ y un cero de orden N en el origen z = 0. En consecuencia esta última función dada en [10] contiene solo polos no triviales y el sistema correspondiente se denomina sistema de todo polo. Debido a la presencia de los polos, la respuesta impulsional del sistema es de duración infinita y se trata, por tanto, de un sistema IIR (infinite impulse response).

La forma general de la función de transferencia dada por [10] contiene tanto polos como ceros y, por ello, el sistema correspondiente se denomina sistema de polos y ceros, con N polos y M ceros. Los polos y/o ceros, tanto en $z = 0$ como en $z = \infty$, no se cuentan explícitamente. Debido a la presencia de polos y ceros es un sistema IIR.

El presente texto desarrolla modelos matemáticos de sistemas con respuestas impulsionales periódicas, y las analiza para el caso especial de señales de entrada periódicas.

I. Funciones de transferencia de sistema con respuestas impulsionales periódicas

Encontremos la función de transferencia de un sistema lineal discreto cuya respuesta impulsional es periódica con periodo N. Para este propósito, modelemos una respuesta impulsional periódica, de la forma,

$$h[n] = \{a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

Si recordamos nuestra definición fundamental de la transformada Z para obtener nuestra función de Transferencia, tendremos,

$$H(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \frac{a_1}{z^4} + \frac{a_2}{z^5} + \frac{a_3}{z^6} + \ldots$$

Es posible, simplificar esta expresión de la manera,

$$H(z) = a_1\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^7} + \ldots\right) + a_2\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^8} + \ldots\right) + a_3\left(\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^6} + \frac{1}{z^9} + \ldots\right)$$

Finalmente, recordando la suma de una serie geométrica, obtendremos,

$$H(z) = a_1\left(\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z^3}}\right) + a_2\left(\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z^3}}\right) + a_3\left(\frac{1}{z^3}\frac{1}{1-\frac{1}{z^3}}\right) + \ldots$$

Rearreglando cada uno de los términos, tendremos,

$$H(z) = a_1\left(\frac{1}{z}\frac{z^3}{z^3-1}\right) + a_2\left(\frac{1}{z}\frac{z^3}{z^3-1}\right) + a_3\left(\frac{1}{z}\frac{z^3}{z^3-1}\right) + \ldots$$

Finalmente,

$$H(z) = \frac{z^3}{z^3-1}\left(\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3}\right)$$

Por lo tanto, de forma general, un sistema lineal discreto con una respuesta impulsional periódica, con periodo N, tiene una función de transferencia de la forma,

$$H(z) = \frac{z^N}{z^N-1}\left(\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \ldots + \frac{a_N}{z^N}\right)$$

II. Comportamiento de sistemas con respuestas impulsionales periódicas a señales de entrada periódicas

La siguiente etapa es investigar qué sucede con la salida del sistema *y[n]*, cuando la señal de entrada es periódica.

Aquí, será necesario distinguir entre dos casos. El primero de ellos, cuando la señal de entrada y la respuesta impulsional tienen el mismo periodo, y el otro, cuando no lo tienen.

2.1 La señal de entrada tiene el mismo periodo que la respuesta impulsional

Si denotamos la operación de convolución de la siguiente manera,

$$x \otimes h = y = \sum_{n'=0}^{N-1} x(n')h(n-n')$$

y denotamos el espectro de la señal de salida con ayuda de la transformada discreta de Fourier (DFT),

$$Y(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-j2\pi kn/N}$$

Podemos obtener el espectro de la señal de salida en términos de la señal de entrada y la respuesta impulsional del sistema,

$$Y(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} x(n')h(n-n') e^{-j2\pi kn/N}$$

Haciendo uso de una nueva variable *n'* para desarrollar el término de la base exponencial de Fourier, tenemos,

$$Y(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} x(n')h(n-n') e^{-j2\pi kn'/N} e^{-j2\pi k(n-n')/N}$$

Reordenando los términos de las exponenciales circulares complejas,

$$Y(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=0}^{N-1} x(n') e^{-j2\pi kn'/N} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} h(n-n') e^{-j2\pi k(n-n')/N} \right\}$$

Y recordando que las respuestas impulsionales son periódicas, podemos obtener,

$$Y(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=0}^{N-1} x(n') e^{-j2\pi kn'/N} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j2\pi kn/N} \right\}$$

Reorganizando las expresiones del periodo N, obtenemos,

$$Y(k) = \sqrt{N} \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j2\pi kn/N} \right\} \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=0}^{N-1} x(n') e^{-j2\pi kn'/N} \right\}$$

$$Y(k) = \sqrt{N} X(k) H(k),$$

La cual también es periódica con periodo N.

2.2 La entrada tiene un periodo distinto que la respuesta impulsional

El análisis del sistema, cuando este tiene una respuesta impulsional periódica, con un periodo distinto al de la señal de entrada, involucra un tratamiento matemático arduo. Por esta razón, se ha realizado el análisis con ayuda de herramientas computacionales como MATLAB.

Se modelan dos señales, *s1* (señal de entrada) y *s2* (respuesta al impulso), como dos señales periódicas senoidales, con frecuencias *f1* y *f2*, y se observa la convolución entre las dos para poder observar la señal de salida.

El siguiente código en MATLAB, ilustra y modela la situación,

```
t=1:0.001:5;
f1=1;
f2=5;
s1=10*sin(2*pi*f1*t);
s2=10*sin(2*pi*f2*t);
figure;
subplot(3,1,1)
plot(s1);
subplot(3,1,2)
plot(s2);
out = conv(s1,s2);
subplot(3,1,3)
plot(out);
```

La siguiente figura ilustra la convolución de dos señales periódicas con periodos diferentes. El resultado, que se muestra en la última gráfica es una señal simétrica, con carácter cuasi-periódico.

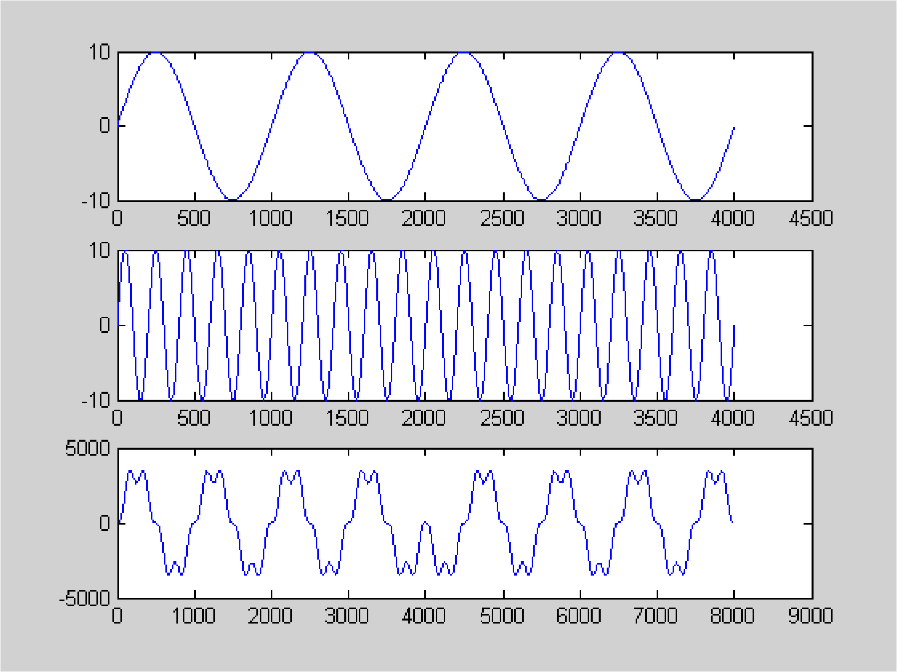

Figura 2. Señal resultante a un sistema con respuesta impulsional periódica, con período N y a una señal de entrada con periodo M.

Conclusiones

El comportamiento de sistemas discretos con respuestas impulsionales periódicas ha sido analizado y verificado con elementos computacionales como MATLAB. Primero, se ha obtenido la expresión general para un sistema discreto con respuesta impulsional periódica.

Posteriormente, se ha deducido la expresión para la salida de un sistema con respuesta impulsional periódica cuando la entrada es una señal periódica, ambas con el mismo periodo.

Finalmente, se ha calculado en MATLAB, qué sucede cuando la respuesta impulsional del sistema y la señal de entrada, tienen periodos diferentes.

Referencias bibliográficas

[1] J. G. Proakis, D. G. Manolakis. *Tratamiento digital de señales.* Prentice Hall, 3.ª edición, 1997.

[2] A. Papoulis, *The Fourier Integral and its applications*. McGraw-Hill, 1962.

[3] P. Sovka, V. Davidek. *Cislícové Zpracování Signálu a Implementace*. Vydavatelství CVUT, 1999.

[4] J. Prchal. *Signály a soustavy.* Prague, Edicní Stredisko CVUT, 1989.

[5] B. Pondelicek. *Linearní Algebra*. Prague, Edicni Stredisko CVUT, 1986.

[6] S. W. Kories. T*aschenbuch der Elektrotechnik*. Verlag, Harri Deutsch.

[7] P. Pollak, R. Cmejla. *Analýza a Zpracování Signálu v Seminare Katedry Teorie Obvodu.* Fakulta Elekrotechnická. CVUT, 2004.

[8] J. G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill, Third Edition, 1995.

[9] www.mathworks.com/access/helpdesk/help/helpdesk.html

[10] http://zasoby.open.agh.edu.pl/~10swlabaj/en/