

Problema de optimización de la trayectoria de ascenso a órbita elíptica para un vehículo cohete multietapa

Optimization Problem of the Trajectory of Ascent to Elliptical Orbit for a Rocket Vehicle Multi-Stage

Recibido:25 de febrero de 2013
Aprobado:28 de febrero de 2013

Wilson Pinzón Velasco*

Resumen

En el presente documento se hace una revisión preliminar alrededor del problema de optimización de trayectorias de vuelo de vehículos cohete, presentando un análisis simplificado sobre minimización de consumo de combustible y orientado a su vez, hacia la optimización de la «potencia requerida» durante la fase de ascenso hasta el *cut off*, durante la fase de vuelo potenciado.

Se presenta finalmente una «propuesta de problema de optimización» que parte de la discusión preliminar.

Palabras clave

Vuelo potenciado, fase de ascenso, cut off, optimización, vehículo cohete, cálculo de variaciones.

* Ingeniero Electrónico, Magíster en Radioelectrónica y Doctor en Acústica, Universidad Técnica de Praga. Docente Investigador de la M. Sc. Ingeniería Química, Universidad Nacional de Colombia. Ingeniero químico, Universidad Nacional de Colombia, Tutor Semillero de Estudios Astronáuticos (SE-AST), Universidad de San Buenaventura, Bogotá. E-mail: wpinzon@usbbog.edu.co

Abstract

This document makes a preliminary review about the optimization problem of flight trajectories of rocket vehicles, introducing a simplified analysis about minimization of fuel consumption, and at the same time, directed toward the optimization of the «required potency» during the ascent phase to the cut off during the phase of a potentiated flight.

Finally, there is a «proposal of the optimization problem» that comes from the preliminary discussion.

Key words

Potentiated flight, ascent phase, cut off, optimization, rocket vehicle, variation calculus.

I. Introducción

El Semillero de Investigación de Estudios Astronáuticos (SE-AST), de la Universidad de San Buenaventura, Bogotá, ha planteado un proyecto de investigación marco, orientado a formular conceptualmente, una *misión espacial colombiana*. Dentro de este proyecto marco, figura como uno de sus problemas de investigación derivados o constituyentes, «la optimización de la trayectoria de ascenso de un vehículo cohete de «N» etapas, con carga útil, desde su base de lanzamiento en tierra, hasta una altura de 250 km».

Este problema específico, es además de proyecto asociado, un ejercicio de reflexión académica de entrenamiento astronáutico, planeado además, para dar claridad conceptual a la estrategia de optimización por cálculo de variaciones con aplicación aeroespacial y buscando convertir esta técnica, en una herramienta analítica habitual dentro de los trabajos del semillero de investigación.

II. Definiciones básicas para el problema de optimización

A. Con relación a la trayectoria

Cut-off

La altura respecto a la superficie terrestre, conocida como altura de cut off, ver fig.1, es la distancia vertical ganada finalmente por la última etapa del vehículo cohete, en la que cesa el consumo de combustible, finaliza el vuelo potenciado y se efectúa la inyección a órbita de la carga útil desde el cohete o vehículo lanzador, gracias a que se han alcanzado en este momento, tanto la velocidad de orbitación, como el ángulo de vuelo, necesarios para asegurar la trayectoria elíptica especificada por la misión espacial y que ha de seguir la carga útil gracias a la mecánica celeste.



Figura 1. Trayectoria de ascenso a cut-off
Fuente www.aviacionargentina.net/
Nota sobre cohete Tronador 2, Argentino,

Misión espacial

La figura 2 expone las órbitas posibles en el vuelo espacial, resultantes de la interacción entre un cuerpo, centro de atracción gravitacional y un segundo cuerpo que gravita alrededor de este primero, siguiendo una órbita de trayectoria cónica. Estas trayectorias se identifican matemáticamente al solucionar el problema dinámico de los dos cuerpos que interactúan gravitacionalmente, fig. 2 [1].

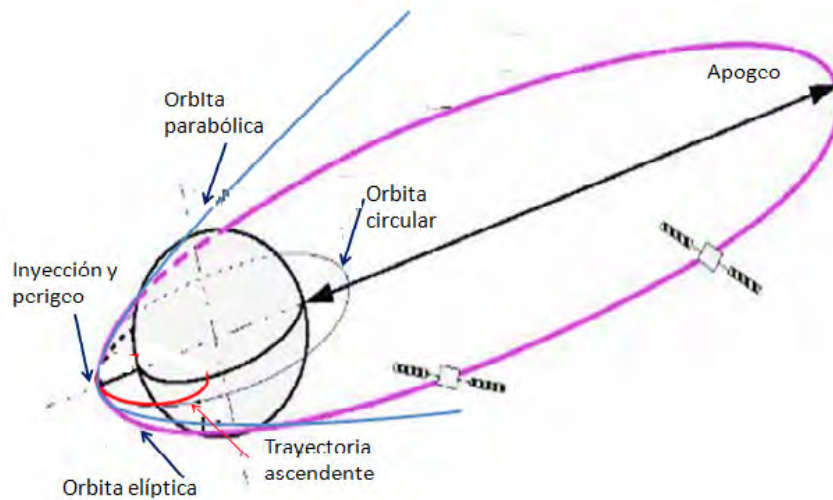


Figura 2. Órbitas elípticas

Por ejemplo, si la órbita establecida alrededor de la Tierra es una trayectoria elíptica con un apogeo de 500 km y un perigeo de 250 (altura de cut off), se requiere por tanto en el cut off una velocidad de 7860 km, y un ángulo de vuelo de 0° , en tanto se procura hacer inyección exacta en el perigeo de la órbita [2].

En relación con el ángulo de vuelo en el momento de la inyección de la carga útil, debe tenerse presente, que este ángulo se logra, como resultado de una evolución programada del mismo, a través de toda la trayectoria en la fase propulsada, ver fig. 3.

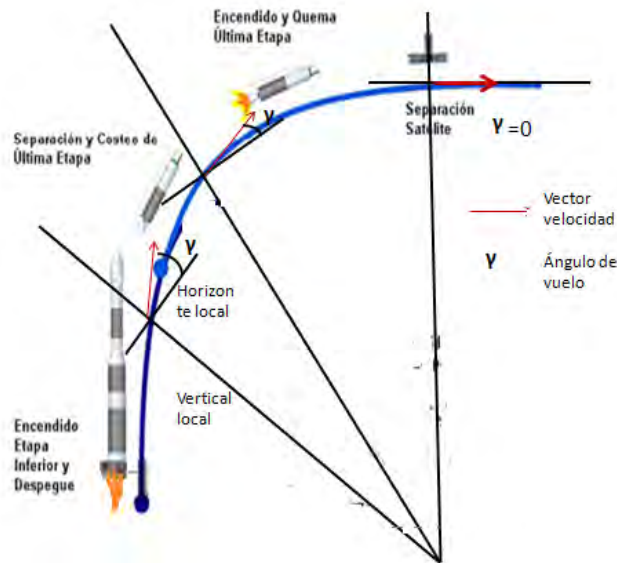


Figura 3. Evolución del ángulo de vuelo

Como consecuencia de lo anterior, esta evolución o cambio de ángulo con respecto al tiempo, es particular de la trayectoria establecida; por lo tanto, se tiene una función del ángulo de vuelo respecto al tiempo, particular para la trayectoria óptima, e igualmente, y de forma asociada, una función para el vector velocidad o vector posición. Ver fig. 4.

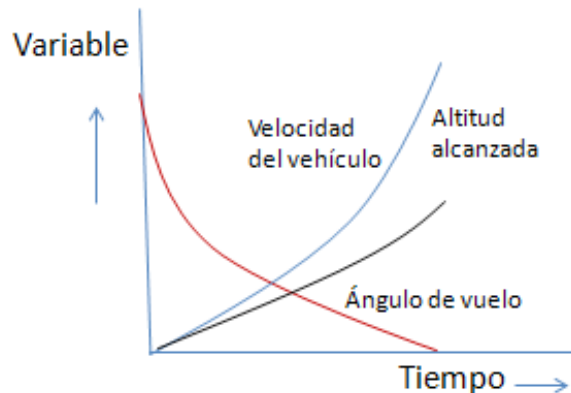


Figura 4. Tendencias de variables de operación

Trayectoria óptima desde base de lanzamiento hasta el cut off

La figura 5, presenta un conjunto de posibilidades de trayectorias de ascenso para el vehículo cohete, pero debe elegirse de entre ellas –u otra desconocida no identificada en la figura–, la trayectoria que involucre el mínimo consumo de combustible y exija la menor potencia de los motores, sin que se deba por ello sobrepasar el peso total máximo permisible del cohete, ni disminuir el peso de la carga útil que debe transportarse para ser puesta en órbita.

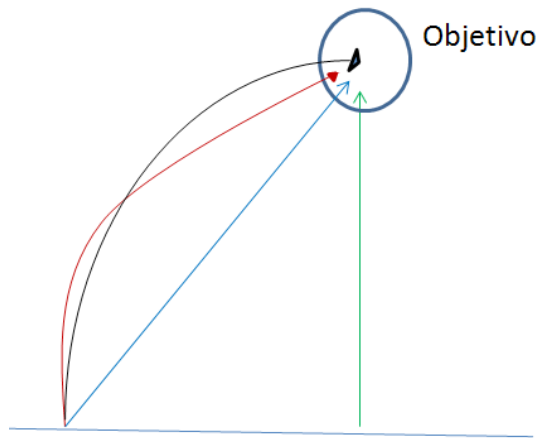


Figura 5. El problema de la trayectoria óptima

Por lo anterior, se pretende establecer una relación, entre elementos de la trayectoria de ascenso y el empuje desarrollado, mediante la correlación de variables de desempeño de los motores cohete, variables asociadas a la trayectoria y las especificaciones de la misión espacial, identificando adicionalmente, el requerimiento global de control y logrando una exigencia mínima tanto en consumo de combustible como en potencia en el cohete, para alcanzar el cut off, tanto en altura como en velocidad y ángulo de vuelo.

La necesidad de buscar una trayectoria inclinada, responde a exigencias de seguridad o ubicación del sitio de lanzamiento, respecto de los elementos orbitales finales requeridos para el punto de inyección, entre otros aspectos [3, 6].

Como se puede ver, el problema de optimización se formula aquí, desde la perspectiva de establecer la trayectoria de ascenso, de manera indirecta; es decir, no se busca «optimizar un funcional», de trayectoria, definido por una expresión que involucre como «extremal», una función de distancia entre puntos, como pudiera parecer a primera vista, sino que esta trayectoria, desde la perspectiva geométrica, resultará de la optimización de funcionales que relacionen empuje y consumo de combustible, asociados, sí, con las variables de trayectoria pertinentes [4].

Motores cohete

El ángulo de vuelo, está asociado indirectamente con eventos aerodinámicos, que pueden llevar a serias modificaciones no programadas de los vectores velocidad y posición instantáneos, debidos a cambios drásticos e indeseados en el cabeceo, alabeo o guiñada del vehículo cohete, generando la necesidad de correcciones en la trayectoria, mediante estrategias de control, que reajusten estos inesperados cambios, en los parámetros de dinámica de vuelo mencionados [5].

Adicionalmente, aun sin existir alteraciones serias, de carácter aerodinámico en la trayectoria programada (o plan de «vuelo») hasta el *cut off*, debe asegurarse que los valores instantáneos del ángulo de vuelo y de los vectores posición y velocidad, correspondan a lo establecido según la trayectoria óptima. En consecuencia, las relaciones funcionales

expresadas en la figura 4, han de asegurarse mediante lazos de control automático, manipulando de forma programada, los flujos de combustible y superficies de control, que aseguren la evolución en el tiempo de los vectores velocidad y posición del vehículo, gracias a la modificación instantánea y correctiva del empuje desarrollado por los motores cohete y los «elementos finales de control» aerodinámico [6].

Ha de notarse que se ha asociado la trayectoria óptima buscada, con funciones temporales de flujo de combustible, empuje, vector velocidad (o posición), ángulo de vuelo, y variables aerodinámicas.

Este último criterio aerodinámico se correlacionará con la trayectoria óptima, en tanto supongamos que la variación indeseada en el ángulo de ataque, incidirá decididamente en el ángulo de vuelo programado.

B. La trayectoria de ascenso óptimo, como problema de cálculo de variaciones

La figura 6, es una representación particular del problema del cálculo de variaciones, en la que aparecen representadas las funciones admisibles que cumplen los valores en los extremos del intervalo: $Y(a) = \alpha$, $Y(b) = \beta$; y dentro de las cuales habrá de estar la función extremal que optimiza al funcional que ha de haberse planteado.

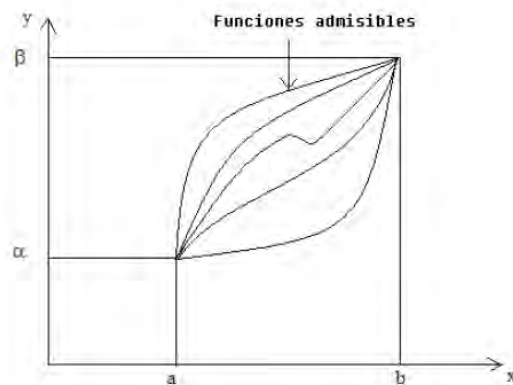


Figura 6. Funciones admisibles y función extremal.

Octubre 2013. Monografía disponible en: <http://mates.albacete.org/ICEAMCM/PDF/calvaring.pdf>.

De manera muy sucinta se hace a continuación una introducción en el problema del cálculo de variaciones, sin embargo, se recomienda al lector remitirse a la literatura especializada, para tener una visión completa y general del método [7].

El FUNCIONAL es de algún modo, una «función de funciones, $F(x,y,y')$ la cual se constituye en una expresión integral, que se desea evaluar en un intervalo $[X_0, X_1]$, pero con la particularidad, de que se requiere obtener de esta integral, su valor más grande o más pequeño, según se esté enfrentando un problema de maximización o minimización respectivamente.

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (1)$$

Es de notar pues, que hay que identificar la función « $y=y(X)$ », involucrada en el funcional, que permita su optimización, pero sujeta a la restricción: $y(X_0) = y_0; y(X_1) = y_1$, establecida naturalmente, por el problema físico matemático de optimización, cuando este ha sido, delimitado y enunciado.

Si se identifica la función « $y=y(X)$ », que por ejemplo, minimiza el funcional, y que por otra parte cumple con los valores definidos para los extremos del intervalo, se puede decir que se ha encontrado la «función extremal» que soluciona el problema. Si por el contrario, se ha encontrado la función « $y=y(X)$ », que cumple con la restricción, pero que no optimiza al funcional, se puede decir que la función hallada es una función «admisibile», pero que esta no es un extremal del problema.

El cálculo para hallar la función extremal, se basa en la aplicación de la «condición de Euler», ecuación (2), Lo que implica, tomar el integrando del funcional y efectuar las derivadas solicitadas en la condición de Euler, reemplazarlas posteriormente en la misma expresión dada en (2), resolver las ecuaciones diferenciales que surgen y despejar, acto seguido, la función extremal, verificando que se cumplan las restricciones de frontera. Si esto último no sucede, no hay solución al problema, es decir, no existe un extremal para el funcional; no al menos, como este se ha planteado dado el problema físico matemático concreto.

$$F_y - \frac{d}{dx}F_y = 0 \tag{2}$$

El método numérico de integración aparece precisamente al momento de resolver las ecuaciones diferenciales, cuando los métodos analíticos son inocuos, si el modelo matemático planteado es demasiado complejo, para abordar la solución de forma analítica exclusivamente.

Problemas isoperimétricos

Un problema isoperimétrico, es desde cierto punto de vista, un problema en el que un funcional también hace parte del juego de restricciones del problema. Se tiene un ejemplo sencillo e ilustrativo de un problema isoperimétrico, cuando se ha construido un funcional con una expresión matemática, relativa al «perímetro» de una figura geométrica, cuyo valor es conocido o predeterminado y es por lo tanto, una restricción para la «maximización de un área» buscada. En este caso el área podría concebirse como el «funcional a optimizar».

La solución, a rasgos generales, de un problema isoperimétrico en el cálculo de variaciones, implica la construcción de un funcional « $J[y(x)]$ » a minimizar o maximizar, otro « $K[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')dx$ » restrictivo y uno auxiliar $L[y(x)]$,

$$L[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y')]dx \tag{3}$$

que cumpliendo la «condición de Euler», permita establecer el extremal « $y= y(x)$ » buscado para lograr la optimización. La ecuación 3, presenta un parámetro « λ », cuyo propósito es asegurar que la función extremal satisfaga también a la funcional restricción [8].

El problema de optimización propuesto para la trayectoria de ascenso del vehículo cohete, es un problema isoperimétrico, pues se puede establecer que el problema cumple con la estructura de la ecuación (3), debido a que el funcional a minimizar, debería ser uno asociado con la potencia desarrollada por el vehículo cohete, $J[y(x)] = P(x, y, y')$, en cuya expresión como función compuesta, debe considerarse el flujo másico variable del combustible y el impulso específico del propelente para cada una de las etapas del vehículo cohete [9].

Un problema simplificado, pero extremadamente útil teóricamente, de optimización del gasto de combustible de un vehículo cohete en trayectoria vertical, puede expresarse con el funcional auxiliar:

$$L[V(t)] = \int_{x_0}^{x_1} [V^2 + \lambda(T - t)V] dt \quad (4)$$

Cuya solución lleva a la obtención del siguiente extremal:

$$V = 3 \left[g \frac{T^2}{2} + h \right] \frac{T-t}{T^3} \quad (5)$$

De lo anterior se pueden derivar dos expresiones interesantes función de la altura máxima «h», para obtener el tiempo durante el que se debe acelerar el cohete para consumir el menor combustible posible, y a otra expresión que permite obtener el gasto mínimo de combustible:

$$T = \sqrt{\frac{6h}{g}} \quad (6);$$

$$F(V) = 3 \left(\frac{3hg + 6g^3}{4 \sqrt{\frac{6g}{h}}} \right) \quad (7)$$

T: tiempo disponible para alcanzar h; g: gravedad terrestre, V: velocidad de exostación de los gases del cohete

Los detalles del cálculo se pueden encontrar en la referencia [8].

III. Algunas consideraciones para la construcción del funcional auxiliar « $L[y(x)]$ »

El problema planteado al semillero, finalmente consiste en correlacionar mediante el funcional adecuado, la trayectoria de ascenso (ζ), con el empuje desarrollado por los motores cohetes a lo largo del ascenso (F); de manera que se pueda calcular el mínimo gasto de combustible (\dot{m}) y se extienda el tiempo de combustión (T_b) hasta un máximo permisible, que optimice la potencia desarrollada (\dot{w}). Debe tenerse presente, que del cohete lanzador se restringe su peso máximo (M_o), correlación estructural (ϵ), e impulso específico máximo disponible para propulsor líquido (I_{sp}) [10].

Trayectoria de ascenso

La figura 5 presenta el dilema para la elección de la trayectoria óptima. Por ahora se puede decir, que en el cut off todas las trayectorias representadas, deben tener la misma

energía mecánica en tanto que en dicho punto, las energías cinéticas y potenciales son iguales y corresponden a las exigencias de la órbita de la misión. Igual ocurre con el ángulo de vuelo, el cual debe ser de cero grados, correspondiente a un vector velocidad paralelo a la horizontal local. Esto implica que la trayectoria óptima, que lleva la carga útil hasta los 250 km, es aquella que maximice T_b , para minimizar \dot{w} , pero que debe implicar un \dot{m} mínimo. Aunque aparenta una contradicción, se trata de un proceso de optimización.

Cabe ser analizado el trayecto totalmente vertical, en tanto que este fuera viable.

De manera instantánea ha de tenerse un vector velocidad y un vector posición, que definan juntos, el ángulo de vuelo. (Figuras 3 y 4). Parece interesante en primera instancia correlacionar estas variables de la trayectoria, con la «ecuación de Tsiolkovsky» para la situación transiente, de manera que se tenga velocidad y posición en función del flujo másico.

La figura 7, define algunas variables adicionales que podrían tenerse en cuenta en la construcción de la funcional auxiliar, pues contiene además de los vectores velocidad (V) y empuje (F), ángulo de vuelo (γ), ya relacionados, al ángulo de «rango de vuelo propulsado» (ϕ), además de los coeficientes aerodinámicos de arrastre y sustentación D y L , respectivamente.

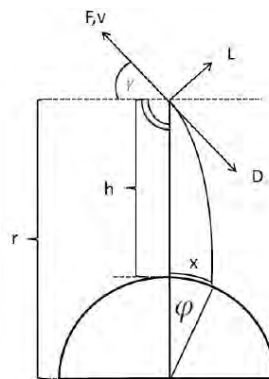


Figura 7. Fuerzas operantes en el ascenso

Documento disponible en https://campus.tum.de/tumonline/LV_TX.wbDisplayTerminDoc?pTerminDocNr=7537

Las componentes el movimiento, tanto radial como tangencial en coordenadas polares, son:

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -g + \frac{F}{m} \cdot \sin\gamma - \frac{D}{m} \cdot \sin\gamma + \frac{L}{m} \cdot \cos\gamma \quad (8)$$

$$r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = \frac{F}{m} \cdot \cos\gamma - \frac{D}{m} \cdot \cos\gamma - \frac{L}{m} \cdot \sin\gamma \quad (9)$$

Y el empuje

$$F = m \cdot d\dot{r} - dm \cdot v_{ex} \quad (10)$$

Donde m es la masa instantánea del vehículo [11].

Debe aclararse que estas expresiones son válidas para cada etapa del cohete y que tanto el empuje F , como el ángulo de vuelo γ , son función del tiempo, en el presente problema de optimización.

Por otra parte, se está suponiendo expansión óptima para las toberas de los motores cohete.

Control de flujo másico

El flujo másico no podría definirse como constante en toda la trayectoria, pues de ser así, un tiempo de combustión, definiría la masa de propelente, la cual quedaría fijada por el coeficiente estructural del cohete y no daría grado de libertad, para buscar la optimización de la potencia desarrollada.

IV. Conclusiones

El problema de optimización propuesto en este documento, se circunscribe a un problema isoperimétrico del cálculo de variaciones. Se trata de la elaboración de funcionales que asocien elementos instantáneos de trayectoria como vectores de velocidad, posición y ángulo de vuelo, con el consumo instantáneo de combustible.

Las restricciones propuestas son el factor estructural del cohete, la masa de carga útil, las condiciones de inyección al cut-off para velocidad, altura y ángulo de vuelo.

Para la optimización debería verificarse si es necesario tener en cuenta el cálculo etapa a etapa del cohete, para identificar la necesidad de seleccionar en cada una de ellas, un propelente particular, con su respectivo impulso específico (I_{sp}), en tanto se asocie con las modificaciones del flujo másico del motor de la etapa n -ésima. [12].

Referencias

- [1] HUMBLE RONAL W., HENRY GARY N., LARSON WILEY J. Space propulsion analysis and design. P: 12 - 25 Space technology series . The Mc Graw Hill Companies. 1995.
- [2] BATE ROBERT R., MULLER DONALD D, WHITE JERRY., Fundamentals of astrodynamics. Dover publications inc. 1971. P:26-33
- [3] SERGETYEVSKY ANDREW B., SNYDER GERALD C., CUNNIFF ROSS A. NASA, JPL. Interplanetary Mission Design. Handbook, Vol. I part 2. P : 7-11
- [4] ELSGOLTZ L. (1969). Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional. P: 291-319. Moscú: MIR.
- [5] UNIVERSITY OF CALIFORNIA ENGINEERING AND PHYSICAL SCIENCES EXTENSION SERIES. Lunar missions and explorations. 1964. John Wiley and Sons New York, London. P: 142-145
- [6] HUMBLE RONAL W., HENRY GARY N., LARSON WILEY J. Space propulsion analysis and design. P: 69 - 74 Space technology series . The Mc Graw Hill Companies. 1995.
- [7] KARTASHOV A.P., ROZHDENSTVENSKY B. L. Ecuaciones diferenciales ordinarias y fundamentos del cálculo de variacional. P :203-239. Ed. Nauka, Moscú y ed. Reverté 1980.
- [8] HARO DELICADO MARÍA J., PÉREZ HARO MARÍA J. El problema de la Braquistócrona, los problemas Isoperimétricos y otros problemas de la Física como elementos introductorios al Cálculo de variaciones para estudiantes de primer curso de Ingenierías. Monografía sobre didáctica en matemáticas. Escuela Superior de Ingeniería Informática de la UCLM en Albacete, España.

- [9] PHILIP G. HILL CARL R PETERSON. Mechanics and thermodynamics of propulsion second edition P.476 y 477. Addison-wesley publishing company. 1992.
- [10] PIN LU. Trajectory optimization for the national aerospace plane. Final Report. June, 1992. NASA No. NAG-1.1255. Langly Research Center.
- [11] Monografía de cálculos Astronáuticos. Institute of Astronautics Spacecraft Technology WS10/11. Ascent and Environment. Documento en línea, disponible en https://campus.tum.de/tumonline/LV_TX.wbDisplayTerminDoc?pTerminDocNr=7537. Octubre de 2013.
- [12] REILLY M.H., Equations of powered rocket ascent and orbit trajectory. NRL REPORT 8237. Naval Research Laboratory. Documento en línea, disponible en <http://www.dtic.mil/cgi-bin/GetTRDoc?AD=ADA069296> . Octubre de 2013.
- [13] HARO DELICADO MARÍA J., PÉREZ HARO MARÍA J. Figura 6. Introducción al Cálculo de variaciones. En línea, disponible en <http://mates.albacete.org/ICEAMCM/PDF/calvaring.pdf>. Octubre 2013.