

# Bifurcaciones del Sistema de FitzHugh-Nagumo (FHN)

Fernando Ongay Larios\* y Máximo Augusto Agüero Granados\*

Recepción: 17 de junio de 2009  
Aceptación: 27 de mayo de 2010

\* Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México, México.  
Correo electrónico: fernando\_ongay@yahoo.com.mx y makxim@gmail.com

**Resumen.** La familia paramétrica de los sistemas de FitzHugh-Nagumo es rica en bifurcaciones (Rocsoreanu *et al.*, 2000). En este artículo estudiamos las bifurcaciones silla-nodo y de Hopf desde el punto de vista matemático de esta familia y se describen completamente los conjuntos de bifurcación en el espacio de parámetros.

**Palabras clave:** sistemas dinámicos, bifurcaciones, modelos de neuronas.

## Bifurcations of FitzHugh-Nagumo System (FHN)

**Abstract.** The parametric family of FitzHugh-Nagumo systems is rich in bifurcation phenomena (Rocsoreanu *et al.*, 2000). In this paper, we study fold and Hopf bifurcations of this family from a mathematical point of view and bifurcation sets are fully described in parametric space.

**Key words:** dynamic systems, bifurcations, neuron models.

## Introducción

El sistema de FitzHugh-Nagumo (FHN) fue desarrollado de manera independiente por Richard FitzHugh, del laboratorio de biofísica de los National Institutes of Health, USA, y por el ingeniero japonés Jin-ichi Nagumo. Basado en el trabajo de Balthazar van der Pol, FitzHugh propuso una simplificación del modelo neuronal de Hodgkin y Huxley. Siendo susceptible de un análisis bastante completo, el sistema FHN permite una comprensión cualitativa del fenómeno de excitabilidad, desde el punto de vista de la dinámica matemática, y constituye un modelo clásico de la neurofisiología. Por su parte, el investigador japonés Nagumo propuso, como análogo neuronal, un circuito eléctrico no lineal, gobernado por un sistema de ecuaciones también semejantes a las de Van Der Pol. Actualmente, al análogo simplificado propuesto por estos autores, se le conoce como modelo de FitzHugh-Nagumo. La importancia actual de este modelo trasciende el ámbito de la biofísica y la neurofisiología, siendo de interés para los investigadores que necesitan comprender la amplia gama de fenómenos no lineales concomitantes al fenómeno de excitabilidad.

Además de su importancia como modelo de una amplia gama de fenómenos reales, FHN tiene propiedades mate-

máticas sumamente interesantes que vale la pena explorar. La naturaleza de este trabajo es matemática y se concentra en las propiedades de bifurcación del sistema, al variar algunos de los parámetros considerados, desde este punto de vista, prescindiendo en realidad de su significación neurológica o de cualquier otro tipo. Varios artículos e innumerables textos de Biología Matemática explican el significado fisiológico de las ecuaciones y sus parámetros, y el lector es invitado a consultarlos, para lo cual le sugerimos el ya clásico texto de J. D. Murray (1989) o el artículo de C. Barriga Montoya *et al.* (2003), en donde encontrará más referencias.

El sistema de (FHN) se define como un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo no lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -f_a(x) - y + I \\ \dot{y} &= b(x - \gamma y) \end{aligned} \quad (1)$$
$$\text{con } f_a(x) = x(x-a)(x-1) = x^3 - (a+1)x^2 + ax.$$

El espacio de parámetros está definido por las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} 0 &< a < 1; \\ b &> 0; \\ \gamma, I &\geq 0 \end{aligned}$$

Denotaremos  $f_a(x) = f(x)$ , omitiendo el subíndice  $a$ . Las bifurcaciones que analizamos en este trabajo son principalmente bifurcaciones locales, es decir, alrededor de equilibrios. Una breve indicación sobre bifurcaciones globales se da al final de la última sección.

Los equilibrios del sistema son las intersecciones de las ceroclinas, es decir, las curvas en el plano fase dado por las ecuaciones:

$$y = I - f(x)$$

y

$$y = x / \gamma.$$

A partir de las ceroclinas se tiene trivialmente el siguiente lema, que aunque obvio, es fundamental en todo lo que sigue.

**Lema 1.** *Los equilibrios o puntos fijos de (1) son los puntos  $(x_*, x_*/\gamma)$  con  $x_*$  raíz del polinomio cúbico:*

$$P_{\gamma, I}(x) = f(x) + \frac{x}{\gamma} - I = x^3 - (a + 1)x^2 + (a + \frac{1}{\gamma})x - I.$$

El asunto ahora será investigar cuántas raíces, y de qué naturaleza, puede tener el polinomio  $P_{\gamma, I}$ , esto se hace con detalle en el apéndice B. El método estándar del análisis local casi siempre tiene, como primer paso, la linealización del sistema alrededor del equilibrio. La linealización en un equilibrio  $(x^*, x^*/\gamma)$  de FHN es el sistema lineal:

$$\dot{x} = -f'(x^*)x - y$$

$$\dot{y} = b(x - \gamma y),$$

denotaremos por  $DF$  la matriz de la linealización, la cual en el punto  $(x^*, x^*/\gamma)$ , es:

$$DF = \begin{pmatrix} f'(x_*) - 1 & \\ b & -b\gamma \end{pmatrix}$$

Dos son las bifurcaciones más relevantes que se observan en el sistema FHN: las bifurcaciones silla-nodo y la bifurcación de Hopf, esta última por su implicación en el fenómeno de excitabilidad (Barriga M. *et al.*, 2003). La bifurcación silla-nodo consiste en la emergencia de un equilibrio que se separa en dos, una silla y un nodo; la bifurcación de Hopf consiste en el cambio de estabilidad de un equilibrio, de estable a inestable, y la emergencia o desaparición de un ciclo límite (ArrowSmith, 1992). En las siguientes dos secciones estudiamos las curvas de bifurcaciones de silla-nodo y de bifurcaciones de Hopf, obteniendo una descripción completa de cada una de ellas. Con el propósito de completez del trabajo y para no desviar la atención del objetivo principal, los resultados concernientes a la existencia y estabilidad de equilibrios, necesarios para el análisis de las bifurcaciones, serán desarrollados en los apéndices

B y C. La descripción de las curvas de bifurcación recae en dos funciones auxiliares que denotamos  $A(\gamma)$  y  $B(\gamma)$  cuyo análisis se hace en el apéndice D. Cabe mencionar que el método de análisis de las transformaciones de los equilibrios, usado en la sección uno, es original de los autores no encontrándose (hasta donde sabemos) en ningún otro lado.

### 1. Bifurcaciones silla-nodo

La bifurcación silla-nodo o tangente (fold) se dará cuando el polinomio  $p(x) = P_{\gamma, I}(x)$  tenga dos raíces, una simple y otra de multiplicidad dos. Justamente la de multiplicidad dos es la que se bifurca. Siendo así, el polinomio se podría factorizar:

$$p(x) = (x - \alpha)(x - \beta)^2$$

$$= x^3 - (2\beta + \alpha)x^2 + (\beta^2 + 2\alpha\beta)x - \alpha\beta^2$$

siendo  $\alpha$  la raíz simple y  $\beta$  la doble. El equilibrio  $(\beta, \beta/\gamma)$ , de existir, sería no hiperbólico y es, como mencionamos antes, donde se daría la bifurcación. Bajo el supuesto de que el polinomio se puede factorizar como se indica arriba, las raíces  $\alpha$  y  $\beta$  deben satisfacer las condiciones:

a)  $I = \alpha\beta^2,$

b)  $a + \frac{1}{\gamma} = \beta^2 + 2\alpha\beta,$

c)  $a + 1 = 2\beta + \alpha,$

que resultan de las relaciones entre los coeficientes de  $p$  y sus raíces. De las condiciones 2 y 3 obtenemos que  $\beta$  debe satisfacer la ecuación cuadrática:

$$\beta^2 - \frac{2}{3}(a + 1)\beta + \frac{a + \frac{1}{\gamma}}{3} = 0,$$

es decir,

$$\beta = c \pm \frac{\sqrt{a^2 - a + 1 - \frac{3}{\gamma}}}{3}$$

$$= c \pm \sqrt{\frac{1}{3\gamma_0} - \frac{1}{3\gamma}} \tag{2}$$

$$= c \pm A(\gamma),$$

donde  $\gamma_0 = \frac{3}{a^2 - a + 1}$  (ver apéndices B y D), resultando entonces que:

$$a = c \mp 2A(\gamma). \tag{3}$$

Esto nos muestra que  $p$  tendrá únicamente dos raíces reales si y sólo si  $\gamma$  está en el dominio de la función  $A$  (véanse apéndice D y teorema B.9) e  $I = \alpha\beta^2$ , con  $\alpha$  y  $\beta$  dados por las expresiones (3) y (2) respectivamente.

Sean:

$$\beta_1(\gamma) = c + A(\gamma), \alpha_1(\gamma) = c - 2A(\gamma)$$

$$\beta_2(\gamma) = c - A(\gamma), \alpha_2(\gamma) = c + 2A(\gamma)$$

claramente tenemos:

$$\alpha_1 \leq \beta_2 \leq \beta_1 \leq \alpha_2 \tag{4}$$

siendo iguales únicamente cuando  $\gamma = \gamma_0$ .

**Lema 2.** Consideremos  $\gamma$  fija. Para  $\beta = \beta_1(\gamma)$  o  $\beta = \beta_2(\gamma)$ , el punto  $(\beta, \beta/\gamma)$  es un equilibrio no hiperbólico (ArrowSmith, 1992: 80) con  $I = I_\gamma(\beta)$ .

*Demostración.*  $f'(x) = 3x^2 - 6cx + 3c - 1$ ,

$$f'(\beta) = 3[c \pm A(\gamma)]^2 - 6c [c \pm A(\gamma)] + 3c - 1$$

$$= 3[(c^2 \pm 2cA(\gamma) + A(\gamma)^2)] - 6c [c \pm A(\gamma)] + 3c - 1$$

$$= 3A(\gamma)^2 - 3c^2 + 3c - 1$$

$$= 3 \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma} \right) \right] - \frac{1}{\gamma_0}$$

$$= -\frac{1}{\gamma}.$$

Por lo tanto, tenemos que la matriz de la linealización en  $(\beta, \beta/\gamma)$  es:

$$DF = \begin{pmatrix} -f'(\beta) & -1 \\ b & -b\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & -1 \\ b & b\gamma \end{pmatrix}$$

y su determinante

$$\det DF = \frac{-b\gamma}{\gamma} + b = 0. \text{ QED}$$

Para cada valor de  $\gamma > \gamma_0$  tenemos dos valores de  $I$  para los cuales el sistema de FHN tiene solamente dos equilibrios, a saber:

$$I_1(\gamma) = I_\gamma(\beta_1(\gamma)) = \alpha_1(\gamma)\beta_1(\gamma)^2 = I_0 - 3cA(\gamma)^2 - 2A(\gamma)^3$$

$$I_2(\gamma) = I_\gamma(\beta_2(\gamma)) = \alpha_2(\gamma)\beta_2(\gamma)^2 = I_0 - 3cA(\gamma)^2 + 2A(\gamma)^3,$$

cumpléndose la relación  $I_1(\gamma) < I_2(\gamma)$  para  $\gamma > \gamma_0$ .

Extendemos continuamente estas funciones a  $\gamma_0$  definiendo  $I_1(\gamma_0) = I_2(\gamma_0) = I_0$ . El siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en el apéndice D, nos dice que la gráfica de estas funciones es la curva de bifurcaciones silla-nodo.

**Teorema 3.** FHN tiene una bifurcación del tipo silla-nodo en  $I = I_i(\gamma)$ ,  $i = 1, 2$ .

*Demostración.* Ver apéndice D. QED

En el siguiente teorema damos la descripción de estas funciones, lo que nos permitirá conocer sus gráficas (figura 1).

**Teorema 4.** a) Las funciones  $I_1$  e  $I_2$  son estrictamente decrecientes cumpliéndose además:

$$I_1(\gamma) \leq I_2(\gamma) \text{ para toda } \gamma \geq \gamma_0,$$

$$b) \gamma \rightarrow \infty \lim I_1(\gamma) = I_0 - 3cA_\infty^2 - 2A_\infty^3$$

$$\gamma \rightarrow \infty \lim I_2(\gamma) = I_0 - 3cA_\infty^2 + 2A_\infty^3 = f(x_{min}).$$

dónde  $A_\infty = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} A(\gamma)$ .

c) Sea:

$$\gamma_1 = \frac{4}{(a-1)^2}, \text{ entonces } I_1(\gamma_1) = 0.$$

*Demostración.* Por el lema D.2

$$\frac{dA}{d\gamma} > 0$$

si  $\gamma > \gamma_0$  como

$$\frac{dI_1}{d\gamma} = -6AA'(A+c) < 0$$

y

$$\frac{dI_2}{d\gamma} = 6AA'(A-c) = -[6AA'(c-A)] < 0$$

tenemos que  $I_1$  e  $I_2$  son estrictamente decrecientes. La desigualdad es obvia.

Del lema D.2

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} A(\gamma) = A_\infty$$

por lo tanto

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} I_1(\gamma) = I_0 - 3cA_\infty^2 - 2A_\infty^3$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} I_2(\gamma) = I_0 - 3cA_\infty^2 + 2A_\infty^3 = f(x_{min}).$$

(véase (21), apéndice B). Si  $I = 0$

$$p(x) = x \left[ x^2 - (a+1)x + \left( a + \frac{1}{\gamma} \right) \right]$$

de donde, si  $(a+1)^2 = 4 \left( a + \frac{1}{\gamma} \right)$ , el polinomio tendrá una raíz doble. Resolviendo esta última ecuación para  $\gamma$  tenemos:

$$\gamma_1 = \frac{4}{(a-1)^2},$$

se puede comprobar fácilmente que  $\gamma_1 > \gamma_0$ . Como  $I_2(\gamma) \geq f(x_{min}) > 0$  para toda  $\gamma$  debemos de tener que es  $I_1$  quien se hace cero en  $\gamma_1$  en efecto:

$$A(\gamma_1) = \sqrt{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma_1} \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3} \left[ \frac{a^2 - a + 1}{3} - \frac{(a-1)^2}{4} \right]}$$

$$= \frac{a+1}{6},$$

por lo tanto

$$I_1(\gamma_1) = \frac{(a+1)^3}{27} - \frac{(a+1)^3}{36} - \frac{2(a+1)^3}{216} = 0. \text{ QED}$$

**Observación.** Se puede demostrar que  $\gamma \rightarrow \infty \lim I_1(\gamma) = f(x_{max})$  pero esto no se necesita (ver figura 1).  
 pero puede suceder, para valores pequeños de  $b$ , que sea inestable; en la figura 2 se muestran tres equilibrios inestables, una silla y dos nodos.

## 2. Bifurcaciones de Hopf

Esta bifurcación se da cuando, entre otras cosas, la traza de la matriz de linealización es igual a cero:

$$-f'(x) - b\gamma = 0 \tag{5}$$

Si esta ecuación no tiene solución, no se da la bifurcación de Hopf y, como  $f'(x) \geq f'(c)$ , se tiene solución si y sólo si

$$b\gamma < \frac{1}{\gamma_0} = -f'(c)$$

Calculamos ahora los valores de estas soluciones usando (11), apéndice B. Como las raíces reales del polinomio cuadrático

$$x^2 - 2cx + c - \frac{1}{3} + \frac{b\gamma}{3} = 0,$$

son:

$$\xi_{\pm}(\gamma) = c \pm B(\gamma), \text{ éstas existen sólo si: } \gamma \leq 1/(b\gamma_0).$$

Para  $\gamma \leq \frac{1}{b\gamma_0}$ , definimos:

$$J_1(\gamma) = I_{\gamma}[\xi_+(\gamma)] \text{ y } J_2(\gamma) = I_{\gamma}[\xi_-(\gamma)]$$

Para estos valores de  $I$  en el equilibrio  $(\xi_{\pm}, \xi_{\pm}/\gamma)$  la traza de la linealización es cero. Para  $b$  fijo, tenemos dos curvas en el plano paramétrico  $\gamma - I$ , de éstas se forma la curva de bifurcación de Hopf.

Figura 1. Gráfica de las curvas de bifurcaciones silla-nodo en el espacio de parámetros  $\gamma - I$ .

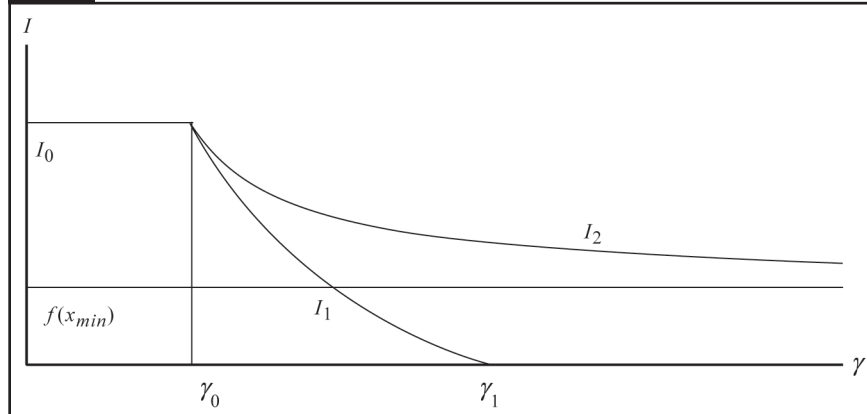
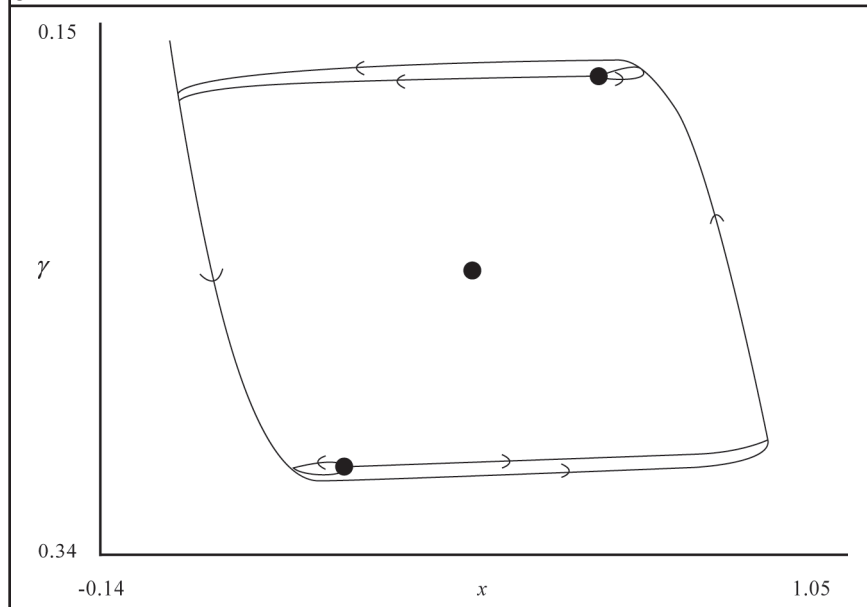


Figura 2. En esta figura se muestran tres equilibrios, una silla y dos nodos. Ambos nodos son inestables.

Nótese que los equilibrios están encerrados por un ciclo límite. Valores de los parámetros  $a = 0.4$ ,  $b = 0.001$ ,  $g = 5.3$  e  $l = 0.07$ .



**Teorema 7.** Si  $\gamma < \min \left\{ \gamma_0, \frac{1}{b\gamma_0} \right\}$ , entonces en  $J_i(\gamma)$ ,  $i = 1, 2$ , se da una bifurcación de Hopf.

*Demostración.* Ver apéndice D. QED

Pasamos ahora al teorema que describe la curva de bifurcación de Hopf, véanse las figuras 3 y 4.

**Teorema 8.**

a) Si:

$$\gamma \leq \gamma_0$$

$$J_2(\gamma) \leq J_1(\gamma),$$

b) para  $i = 1, 2$   
 $\lim_{\gamma \rightarrow 0} J_i(\gamma) = \infty,$

c)  $J_1\left(\frac{1}{b\gamma_0}\right) = J_2\left(\frac{1}{b\gamma_0}\right) = I_1(c)$   
 $= 2c^3 + 3c^2 - c + \frac{c}{b\gamma_0},$

d) Si  $\gamma_0 < 1/(b\gamma_0)$  existe:

$$\gamma_0 \leq \gamma_1 < 1/(b\gamma_0) \text{ tal que:}$$

$$J_2(\gamma_1) = J_1(\gamma_1) \text{ y } J_2(\gamma) > J_1(\gamma)$$

para:  $\gamma_1 < \gamma < 1/(b\gamma_0)$ .

e) Si  $\gamma \leq \gamma_0$

$$\frac{dJ_1}{d\gamma} < 0.$$

*Demostración.* Si  $\gamma \leq \gamma_0$  entonces:

$$\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_0} \geq 0,$$

y por el lema D.9 se tiene el inciso a. El b se sigue del siguiente cálculo

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} J(\gamma) &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} I[\xi(\gamma)] \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \{f[\xi(\gamma)]\} + \frac{\xi(\gamma)}{\gamma} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Como  $B[1/(b\gamma_0)] = 0$ , por los lemas D.8 y D.9

$$\begin{aligned} J_1\left(\frac{1}{b\gamma_0}\right) &= J_2\left(\frac{1}{b\gamma_0}\right) \\ &= \frac{I}{b\gamma_0} [\xi_{\pm 1}(b\gamma_0)] \\ &= \frac{I}{b\gamma_0} (c) \\ &= I_0 + \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_0}\right)c \\ &= c^3 - 3c^3 + 3c^2 - c + \frac{c}{b\gamma_0}. \end{aligned}$$

A partir de lema D.9, la ecuación  $J_2(\gamma) = J_1(\gamma)$  tiene tres soluciones, una de ellas es  $1/(b\gamma_0)$  ya contemplada en el inciso c), otra negativa y la tercera es

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{1 + 3b\gamma_0^2} - 1}{b\gamma_0},$$

se verifica sin problemas que

$$\gamma_0 \leq \gamma_1 < \frac{1}{b\gamma_0}.$$

Si  $\gamma = \gamma_0$

$$\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_0} < 0$$

y como

$$B(\gamma)^2 + \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_0} = \frac{1}{\gamma} - \frac{b\gamma}{3} - \frac{2}{3\gamma_0},$$

entonces

$$-b\gamma_0^2 + 2\gamma - 3\gamma_0 < 0$$

si  $\gamma > \gamma_1$ ; la desigualdad se obtiene de (28) del apéndice D.

Finalmente, por el lema D.7

$$\frac{dJ_1}{d\gamma} = -\frac{1}{\gamma^2}(\xi_+(\gamma)) - \frac{b}{2}$$

$$-\frac{b}{2} \left( B(\gamma) + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_0} \right) \right) < 0$$

si  $\gamma \leq \gamma_0$ . QED.

**Comentarios:** a) Si  $\gamma_0 > \frac{1}{b\gamma_0}$  entonces, para  $\frac{1}{b\gamma_0} < \gamma < \gamma_0$  fijo, y variando el valor del parámetro  $I$ , no se tiene bifurcación de Hopf, pues el único equilibrio existente no cambia su tipo de estabilidad (proposición C.4).

b) Si  $\gamma_0 > \frac{1}{b\gamma_0}$  otras bifurcaciones más exóticas pueden darse en el sistema FHN. Para una revisión más completa de las bifurcaciones de este sistema consúltese la referencia (Rocsoreanu *et al.*, 2000) en donde se estudia una versión equivalente del sistema FHN.

### 2.1. El papel del parámetro b

La influencia del parámetro  $b$  de la segunda ecuación del sistema de FHN en la dinámica del sistema es menos modesta de lo que a primera vista parece. Para valores de orden  $O(b)$ , la bifurcación de Hopf es supercrítica: el equilibrio se ines-

Figura 3. Gráfica de las funciones  $J_i$ .

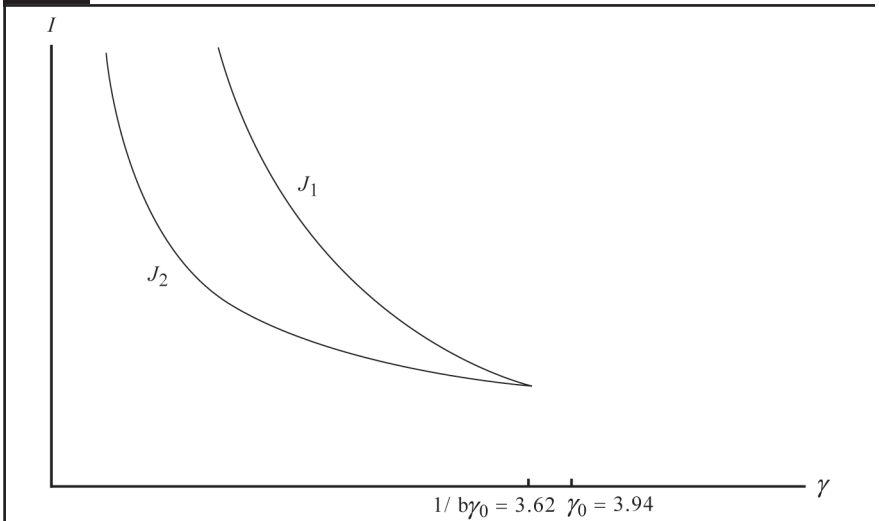
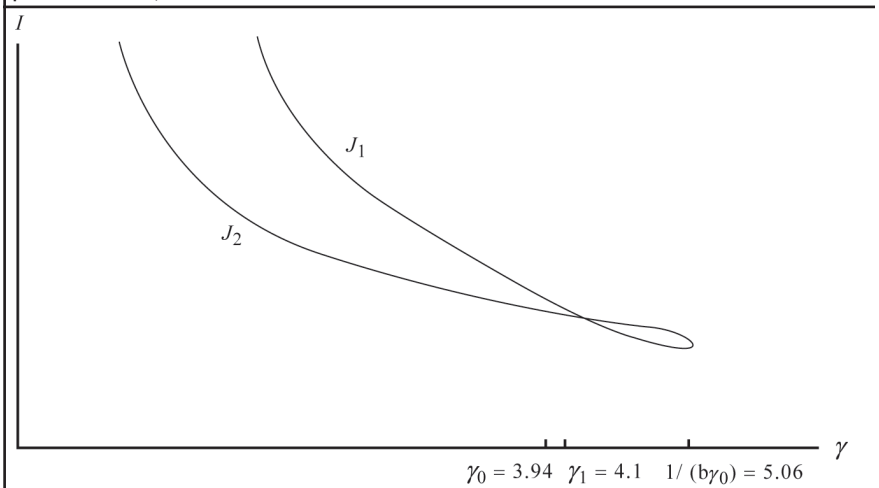


Figura 4. Gráfica de las funciones  $J_i$ . Nótese que se intersectan en  $\gamma_1 \approx 4.1 > \gamma_0 \approx 3.94$ . Valores de los parámetros  $a = 0.4$ ,  $b = 0.05$ .



tabiliza y emerge un ciclo límite estable cuya amplitud crece en el sentido de la bifurcación.

Si el parámetro  $b$  es pequeño, entonces tenemos un sistema rápido-lento y en el caso de presentarse las oscilaciones del sistema son de un tipo especial, conocidas como oscilaciones de relajación. Cuando se tiene un ciclo límite estable en estas condiciones, éste se encuentra a una distancia  $O(b)$  de la variedad lenta, que es la gráfica del polinomio  $y = p_\gamma(x)$ . Esto implica que la amplitud del ciclo estable, en su eje horizontal, es mayor a  $(a + 1)/3$ , cuando se da la bifurcación de Hopf, ya existe un ciclo límite estable; esto significa que antes de la bifurcación coexistían el equilibrio estable y el ciclo límite estable, separando sus cuencas de atracción un ciclo límite inestable (ver la figura 5); la bifurcación consistió en el colapso del ciclo inestable con el equilibrio, esta bifurcación de Hopf se conoce como subcrítica.

Así, el sistema de FHN puede presentar, para diferentes valores del parámetro  $b$  una u otra bifurcación de Hopf. Las condiciones analíticas para determinar si la bifurcación es subcrítica o supercrítica son difíciles de aplicar, pero computacionalmente se puede observar.

En el escenario de la bifurcación subcrítica, antes de darse ésta, ha ocurrido otra bifurcación: la emergencia de un ciclo límite semiestable que después se separa en dos: el estable y el inestable. Ésta es una bifurcación silla-nodo de ciclos. Con ayuda de software desarrollado *ad hoc* para este sistema de FHN podemos ubicar aproximadamente la curva de bifurcación silla-nodo de ciclos (véase la figura 6).

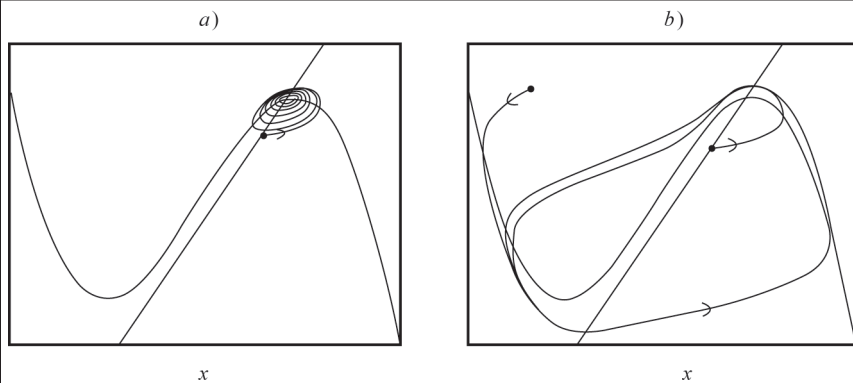
### Conclusiones

Los parámetros en una familia de modelos generalmente representan condiciones del medio en el que evoluciona el

sistema, en el que permanecen constantes o donde cambian lentamente. Algunas de esas condiciones pueden ser predisuestas intencionalmente, por ejemplo, en un laboratorio o algo semejante. Variar los parámetros significa entonces que las condiciones cambian; algunos cambios pueden no afectar de manera importante el comportamiento del sistema, pero otros pueden comportar cambios significativos. Esto es lo que en la Teoría de Sistemas Dinámicos se conoce como bifurcación. En el modelo de FitzHugh-Nagumo, el parámetro  $I$  representa el estímulo externo que recibe una neurona, ya sea de la sinapsis de otras células o de una excitación artificial impuesta por el experimentador o de otra naturaleza. El parámetro  $\gamma$  representa, en cierto sentido, la capacidad de recuperación del sistema (neurona) ante perturbaciones, es decir, su capacidad para regresar al estado de equilibrio o base, como se suele nombrar en fisiología. En este contexto, la bifurcación de Hopf tiene un significado fisiológico importante, pues representa la transición de un estado que se conoce como excitable, a un estado oscilatorio, en donde la actividad eléctrica –potencial de acción– se repite periódicamente. El modelo

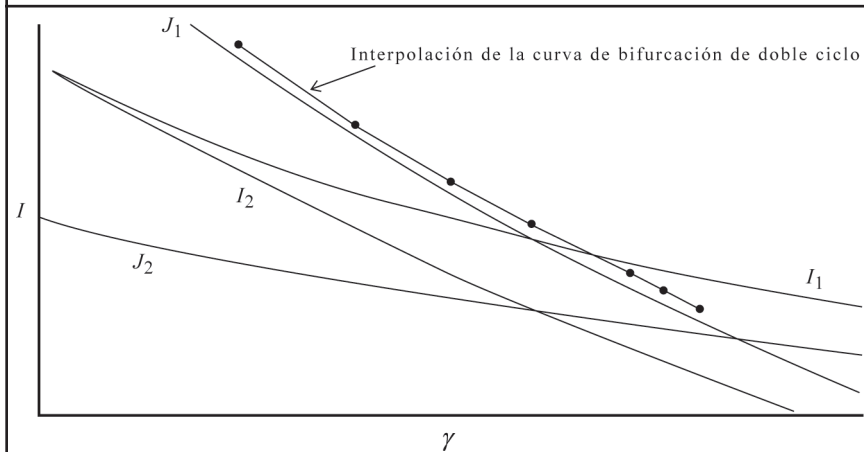
**Figura 5.** Coexistencia de un equilibrio estable y un ciclo límite estable en el plano fase del sistema FHN.

Valores de los parámetros:  $a = 0.5, b = 0.01, \gamma = 4.3989$  e  $I = 0.1267$ . Dimensiones de los ejes:  $-0.78 < x < 1.23, 0.06 < y < 0.2$ .



En la figura a) se muestra una trayectoria con condiciones iniciales  $x = 0.6853, y = 0.1563$ , que converge al equilibrio en la intersección de las ceroclinas.  
En la figura b) se muestran dos trayectorias, con condiciones iniciales  $x = 0.6585, y = 0.15$  (cercanas a la de la figura a)) y  $x = 0.105, y = 0.1785$ , respectivamente, las cuales convergen a un ciclo límite.

**Figura 6.** La figura muestra la interpolación geométrica de la curva de bifurcación de ciclos a partir de puntos estimados mediante un programa gráfico *ex profeso*. Los valores de los parámetros son  $a = 0.5, b = 0.01$ , los intervalos de los parámetros  $\gamma$  e  $I$  son:  $3.94 < \gamma < 5.68, 0.13 < I < 0.82$  respectivamente.



mostraría que aumentar el estímulo externo, el parámetro  $I$ , hasta cierto valor, provoca esta transición, que es justamente la bifurcación. Conocer cómo está la relación entre los parámetros para tener estas bifurcaciones es de gran utilidad teórica y experimental, de allí la importancia de conocer los conjuntos de bifurcación. Aunque en el presente modelo las

conclusiones que fisiológica o biofísicamente puedan extraerse son más bien en el terreno hipotético, la estructura de los conjuntos de bifurcación, que es más o menos universal para estos modelos, permite sacar algunas conclusiones generales de la fisiología eléctrica de las neuronas y, en otros terrenos, de los sistemas excitables en general.

ergo

### Bibliografía

Arrow-Smith, D. K. y C. M. Place (1992). *Dynamical Systems, Differential equations, Maps and Chaotic Behaviour*. Chapman & Hall. London.

Barriga Montoya, C.; C. Carrillo Calvet y F. Ongay Larios (2003). *El Modelo de FitzHugh-Nagumo para el Potencial Eléctrico de una Neuron*. Aportaciones Matemáticas, Serie de Comunicaciones 32.

Kuznetsov, Y. A. (1998). "Elements of Applied Bifurcation Theory", *Applied Mathematical Sciences*. Vol. 112, Springer, New York.

Hirsch, M.W. y S. Smale (1974). *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, San Diego Cal.

Murray, J. D. (1989). *Mathematical Biology*. Springer-Verlag, New York.

Rocsoreanu, C.; A. Georgescu y N. Giurgiteanu (2000). "The FitzHugh-Nagumo Model. Bifurcation and Dynamics", *Mathematical Modelling: Theory and Applications*. Vol. 10, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

### Apéndices

#### Apéndice A. Comportamiento a gran escala

**A.1. Teorema.** Los atractores de FHN son compactos y no hay trayectorias que se "escapen" a infinito. Por lo tanto las trayectorias están definidas para toda  $t \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Supongamos  $x^2 + y^2 > 1$ ,  
 $(-f_a(x) - y + I, b(x - \gamma y)) \bullet (-x, -y)$   
 $= xf_a(x) + xy - Ix - yb(x - \gamma y)$   
 $= xf_a(x) + (1 - b)xy + b\gamma y^2 - Ix$   
 $= x(x^3 - (a + 1)x^2 + ax) + (1 - b)xy + b\gamma y^2 - Ix$   
 $= x^4 - (a + 1)x^3 + ax^2 + (1 - b)xy + b\gamma y^2 - Ix$   
 $\approx x^4 + b\gamma y^2 \geq 0$ ,

lo que significa que las trayectorias se introducen hacia el interior de un círculo de radio muy grande. La conclusión se sigue del teorema de Poincaré-Bendixon (Hirsch y Smale, 1974). QED.

#### Apéndice B. Equilibrios

Resultará útil tener las expresiones explícitas de las derivadas de  $f$ :

$$f'(x) = 3x^2 - 2(a + 1)x + a; \tag{6}$$

$$f''(x) = 6x - 2(a + 1). \tag{7}$$

Reescribimos el lema1 que, como dijimos, es crucial.

**1. Lema.** Los equilibrios o puntos fijos de (1) son los puntos  $(x_*, x_*/\gamma)$  con  $x_*$  raíz del polinomio cúbico:

$$P_{\gamma, I}(x) = p(x) = f(x) + \frac{x}{\gamma} - I = x^3 - (a + 1)x^2 + (a + \frac{1}{\gamma})x - I.$$

Investigaremos ahora cuántas raíces, y de qué naturaleza, puede tener el polinomio  $p_{\gamma, I}$ . Empezamos por considerar una raíz triple.

#### B.1. Lema

$$P(x) = (x - \alpha)^3 \iff \alpha = \frac{a + 1}{3}, \gamma = \frac{3}{a^2 - a + 1}, = \left(\frac{a + 1}{3}\right)^3.$$

*Demostración.* Como  $a + \frac{1}{\gamma} = \frac{(a + 1)^2}{3}$  si y sólo si  $\gamma = \frac{3}{a^2 - a + 1}$ , el resultado se sigue de esta observación. QED.

**B.2. Observación.** Si  $0 < a < 1 \implies a^2 - a + 1 > 0$ .

$$\text{Sean } c = \frac{a + 1}{3},$$

$$\gamma_0 = \frac{3}{a^2 - a + 1} = \frac{1}{3c^2 - 3c + 1},$$

$$I_0 = \left(\frac{a + 1}{3}\right)^3 = c^3.$$

**B.3. Lema**  $c$  es el valor de inflexión de  $f$ .

*Demostración.* De (7) se tiene que:

$$f''(x) = 0 \iff x = \frac{a+1}{3} = c. \quad \text{QED}$$

**B.4. Lema.**

$$\gamma_0 = -\frac{1}{f'(c)}.$$

*Demostración.* Se sigue de un sencillo cálculo a partir de (6). QED

**B.5. Sumario de fórmulas.** Para referencias enlistamos las fórmulas más útiles:

$$c = \frac{a+1}{3}, \quad (8)$$

$$a = 3c - 1;$$

$$f(x) = x^3 - (a+1)x^2 + axf(x) \quad (9)$$

$$= x^3 - 3cx^2 + (3c-1)x; \quad (10)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2(a+1)x + a \quad (11)$$

$$= 3x^2 - 6cx + 3c - 1; \quad (12)$$

$$f''(x) = 6x - 2(a+1) \quad (13)$$

$$= 6x - 6c; \quad (14)$$

$$f(c) = \frac{1}{27}(a+1)(1-2a)(a-2) \quad (15)$$

$$= c \frac{-2a^2 + 5a - 2}{9};$$

$$f'(c) = -\frac{a^2 - a + 1}{3} \quad (16)$$

$$= -3c^2 + 3c - 1.$$

El polinomio cúbico  $p = p_{\gamma, I}$  en términos de  $c$ :

$$P(x) = x^3 - 3cx^2 + (3c - 1 + \frac{1}{\gamma})x - I. \quad (17)$$

y, finalmente

$$\gamma_0 = -\frac{1}{f'(c)} = \frac{3}{a^2 - a + 1} = \frac{1}{3c^2 - 3c + 1}, \quad (18)$$

$$\frac{1}{\gamma_0} = \frac{a^2 - a + 1}{3} = 3c^2 - 3c + 1. \quad (19)$$

**B.6. Proposición.** En  $(y_0, I_0)$ , FHN tiene un único equilibrio en el punto de inflexión  $(c, I_0 - f(c)) = (c, c/\gamma_0)$  de la ceroclina  $x$ .

*Demostración.* Por el lema 6,  $1/\gamma_0$  es el valor de la pendiente de  $y = I - f(x)$  en el punto de inflexión  $(c, c/\gamma)$ . Si  $\gamma = \gamma_0$  e  $I = I_0$ , entonces la recta tangente en  $(c, c/\gamma_0)$  es:

$$y - \frac{c}{\gamma_0} = \frac{1}{\gamma_0}(x - c)$$

$$y = \frac{x}{\gamma_0},$$

y es por tanto la ceroclina y luego el punto de inflexión es un equilibrio. Es obvio que es la única intersección de las ceroclinas. QED.

**B.7. Lema.** Si  $\gamma \leq \gamma_0$  entonces el polinomio  $p_{\gamma, I}$  tiene solamente una raíz real. Esta raíz es simple si  $\gamma < \gamma_0$ . La única posibilidad de que  $p$  tenga una raíz triple es si  $\gamma = \gamma_0$ ,  $I = I_0$  y, en este caso,  $c$  es la raíz triple de  $p$ .

*Demostración.* Supongamos  $\gamma < \gamma_0$ . Se comprueba fácilmente que  $c$  es un mínimo de  $f'$ , por lo tanto  $f'(c) \leq f'(x)$  para toda  $x$ , entonces

$$P'(x) = f'(x) + \frac{1}{\gamma} > f'(x) + \frac{1}{\gamma_0} \geq 0.$$

Supongamos que  $p$  tiene tres raíces reales contando multiplicidades:  $x_0 \leq x_1 \leq x_2$ , entonces  $p(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$  y  $p'(x) = (x-x_0)(x-x_1) + (x-x_0)(x-x_2) + (x-x_1)(x-x_2)$ .

De donde:

$$p'(x_1) = (x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \leq 0.$$

lo que es una contradicción, por lo tanto  $p$  tiene una raíz real simple y dos raíces complejas si  $\gamma < \gamma_0$ .

La segunda parte del lema se sigue del lema B.1. QED.

**B.8. Lema**

$f'(x) = 0 \iff x = c \pm A_\infty$  donde  $A_\infty = (3\gamma_0)^{-1/2}$  (ver apéndice D).

*Demostración.*  $f'(x) = 0 \iff$

$$x = \frac{a+1}{3} \pm \frac{\sqrt{a^2 - a + 1}}{3}$$

$$= c \pm \sqrt{\frac{a^2 - a + 1}{9}}$$

$$= c \pm \frac{1}{3\gamma_0}$$

$$= c \pm A_\infty \quad \text{QED.}$$

Sean

$$x_{min} = c - A_\infty, \quad (20)$$

$$x_{max} = c + A_\infty,$$

$x_{min}$  y  $x_{max}$  son los valores donde  $-f(x)$  alcanza el mínimo y el máximo respectivamente. Por lo tanto  $f'(x) > 0$  si  $x < x_{min}$  o  $x_{max} < x$  y  $f'(x) < 0$  si  $x_{min} < x < x_{max}$ .

**B.9. Teorema.** El sistema FHN tiene un solo equilibrio para toda  $I \geq 0$  si y sólo si  $\gamma \leq \gamma_0$ .

*Demostración.* Por el lema 6 si  $\gamma \leq \gamma_0$  el polinomio  $p(x)$  tiene solamente una raíz y por lo tanto FHN tiene un solo equilibrio (lema B.7).

Probaremos que si  $\gamma > \gamma_0$  entonces, para alguna  $I, p_{\gamma, I}(x)$  tiene más de una raíz. Concretamente se mostrará que existe  $I_\gamma > 0$  tal que  $p_{\gamma, I_\gamma}(x)$  tiene una raíz doble  $x_\gamma$  en el intervalo  $(x_{min}, c)$

Como  $f'(c) \leq f'(x)$  para toda  $x$ , y como  $-1/\gamma > -1/\gamma_0$ , la ecuación:

$$f'(x) = -\frac{1}{\gamma}$$



tiene dos soluciones, una de ellas menor que  $c$ ; llamémosla  $x_\gamma$ . Para toda  $x$  la función  $_I(x) = f(x) - f'(x)x$  da el valor de la ordenada al origen de la recta tangente a  $y = f(x)$  en el punto  $(x, f(x))$ . La derivada de esta función es:

$$\begin{aligned} _I(x) &= f'(x) - f''(x)x - f'(x) \\ &= -f''(x) \\ &= -(6x-2(a+1))x. \end{aligned}$$

La derivada es positiva para  $0 < x < \frac{a+1}{3} = c$ , por lo tanto  $_I(x)$  es estrictamente creciente en ese intervalo. Se sigue que para toda  $x_{min} < x < c$

$$_I(x) > _I(x_{min}) = f(x_{min}) > 0$$

Sea  $_I_\gamma = _I(x_\gamma)$  Como  $-1/\gamma < 0$  se tiene  $x_{min} < x_\gamma < c$  por lo tanto  $I_\gamma > 0$  Ahora

$$\begin{aligned} P(x_\gamma) &= f(x_\gamma) + \frac{x_\gamma}{\gamma} - \gamma I \\ &= f(x_\gamma) + \frac{x_\gamma}{\gamma} - (f(x_\gamma) - f'_\gamma(x_\gamma)x) \\ &= x_\gamma \left( \frac{1}{\gamma} + f'(x_\gamma) \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto  $(x_\gamma, x_\gamma/\gamma)$  es un equilibrio de FHN.

Como  $P'(x) = f'(x) + \frac{1}{\gamma}$ , entonces  $p'(x_\gamma) = 0$  por lo tanto  $x_\gamma$  es una raíz doble de  $p$  y, como  $x_\gamma \neq c$ , por el lema B.7 existe otra raíz distinta del polinomio  $p$ . Por lo tanto FHN tiene dos equilibrios para  $I = _I_\gamma$ . QED.

**B.10. Lema**

$$f(x_{min}) = I_0 - 3cA_\infty^2 + 2A_\infty^3 \tag{21}$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} f(x_{min}) &= f(c - A_\infty) \\ &= f(c - A_\infty)^3 - 3c(c - A_\infty)^2 + a(c - A_\infty) \\ &= c^3 + A_\infty(3c^2 - a) - A_\infty^3 - c(3c^2 - a) \\ &= c^3 + A_\infty \left( \frac{1}{\gamma_0} \right) - A_\infty^3 - c \left( \frac{1}{\gamma_0} \right) \\ &= I_0 - 3cA_\infty^2 + 2A_\infty^3 \end{aligned}$$

puesto que  $\gamma_0^{-1} = 3A_\infty^2$ . QED.

**Apéndice C. Estabilidad de equilibrios**

La linealización en un equilibrio  $(x^*, x^*/\gamma)$  de FHN es el sistema lineal

$$x = -f'(x_*)x - y$$

$$y = b(x - \gamma y)$$

Denotando:

$$DF = \begin{pmatrix} -f'(x) & -1 \\ b & -b\gamma \end{pmatrix}$$

para determinar el tipo de equilibrio, calculamos la traza y el determinante (Hirsch, 1974)

$$trDF = -f'(x) - b\gamma, \tag{22}$$

$$detDF = b(\gamma f'(x) + 1),$$

por lo tanto los eigenvalores de  $DF$  son

$$\lambda = \frac{trDF \pm \sqrt{trDF^2 - 4detDF}}{2} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-(f'(x) + b\gamma) \pm \sqrt{(f'(x) + b\gamma)^2 - 4b(\gamma f'(x) + 1)}}{2} \\ &= \frac{-(f'(x) + b\gamma) \pm \sqrt{(f'(x) - b\gamma)^2 - 4b}}{2} \end{aligned} \tag{24}$$

La condición necesaria y suficiente para que se dé un equilibrio de tipo silla es  $detDF < 0$ , por lo tanto  $(x^*, y^*)$  será una silla si y sólo si

$$f'(x^*) < -\frac{1}{\gamma}.$$

Como para cualquier  $x$ ,  $f'(x) \geq f'(c)$ , tenemos la siguiente proposición

**C.1. Proposición.** Si el equilibrio  $(x^*, y^*)$  es una silla, entonces  $f'(x^*) < 0$  y, necesariamente,  $\gamma > \gamma_0$ .

De acuerdo con la proposición C.1, los equilibrios tipo silla únicamente pueden ocurrir en la parte creciente de la ceroclina- $x$ , es decir, donde  $f'(x) < 0$ , aunque esto no es una condición suficiente como tampoco lo es  $\gamma > \gamma_0$  (ver Proposición C.4 más adelante). Por otro lado, si  $f'(x) \geq 0$ , entonces  $DF > 0$  y  $trDF \leq -\gamma b < 0$ , por lo tanto los equilibrios que se encuentran en la parte decreciente de la ceroclina- $x$  son asintóticamente estables. Esta observación es importante por lo que la anotamos como una proposición.

**C.2. Proposición.** Sea  $(x^*, y^*)$  un equilibrio de FHN. Si  $f'(x^*) \geq 0$ , entonces es asintóticamente estable.

**C.3. Observación.** Recordemos que  $f'(x) \geq 0$  si y sólo si  $x \leq x_{min}$  o  $x_{max} \leq x$ .

Como tenemos que  $f'(0) = a > 0$ , para  $I = 0$  el equilibrio es estable. Se plantea ahora la cuestión de determinar las condiciones para perder estabilidad al variar el parámetro  $I$ . Una posibilidad es que  $trDF = 0$  la cual se daría si  $f'(x^*) = -b\gamma$

Como  $f'(x) \geq f'(c) = -1/\gamma_0$ , entonces tenemos la siguiente proposición.

**C.4. Proposición.** Si  $\gamma > \frac{1}{b\gamma_0}$ ,

entonces el equilibrio es estable para todo valor de  $I$  con una posible excepción si  $f'(x) = -1/\gamma$ .<sup>1</sup>

1. En este caso el equilibrio es no hiperbólico, véase el lema 2.

**Apéndice D. Las funciones  $A(\gamma)$  y  $B(\gamma)$** 

Definimos un par de funciones auxiliares del parámetro  $\gamma$  como:

$$A(\gamma) = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma}\right)},$$

$$B(\gamma) = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\gamma_0} - b\gamma\right)}.$$

El dominio de  $A$  es  $\gamma \geq \gamma_0$ ; el de  $B$  es  $\gamma \leq 1/(b\gamma_0)$ . Ahora bien, de  $p(x) = 0$ , el lugar geométrico de los equilibrios en el plano  $I - x$ , con  $\gamma$  fijo, es la gráfica de

$$I_\gamma(x) = f(x) + \frac{x}{\gamma} \quad (25)$$

$$= x^3 - (a+1)x^2 + \left(a + \frac{1}{\gamma}\right)x$$

$$= x^3 - 3cx^2 + \left(3c - 1 + \frac{1}{\gamma}\right)x.$$

**D.1. Lema.**  $I'_\gamma(x) = 0 \iff x = c \pm A(\gamma)$ , lo cual ocurre si y sólo si  $\gamma \geq \gamma_0$ ; para  $\gamma = \gamma_0$ ,  $I'_\gamma(x) = 0$  solamente tiene una solución real:  $x = c$ .

*Demostración.* Síguese del siguiente sencillo cálculo,  $I'_\gamma(x) = 3x^2 - 6cx + 3c - 1 + \frac{1}{\gamma} = 0 \iff$

$$x = \frac{6c \pm \sqrt{36c^2 - (4)(3)(3c - 1 + \frac{1}{\gamma})}}{6}$$

$$= c \pm \sqrt{c^2 - c + \frac{1}{3} - \frac{1}{3\gamma}}$$

$$= c \pm \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma}\right)}$$

$$= c \pm A(\gamma). \text{ QED.}$$

**D.2. Lema.** La función  $A(\gamma)$ , definida para  $\gamma \geq \gamma_0$  tiene las siguientes propiedades

a)  $\gamma \rightarrow \infty \lim A(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{3\gamma_0}} = A_\infty$ ,

b)  $A(\gamma) \geq 0$ ;  $A(\gamma) = 0 \iff \gamma = \gamma_0$ ,

c)  $A(\gamma) < A_\infty$  y  $x_{\min} = c - A_\infty < c - A(\gamma) \leq c + A(\gamma) < c + A_\infty = x_{\max}$ ,

d)  $\frac{dA}{d\gamma} = \frac{1}{6\gamma^2 A(\gamma)}$

*Demostración.* a), b) y c) son bastante obvios. d) se sigue de un sencillo cálculo. QED.

Si  $\gamma > \gamma_0$

$$c^2 = \frac{a^2 + 2a + 1}{9}$$

$$> \frac{a^2 - a + 1}{9} - \frac{1}{3\gamma}$$

$$= A(\gamma)^2$$

y entonces  $c > A(\gamma)$ . Además, el valor de inflexión de  $I_\gamma$  es el mismo que el de  $f$  puesto que

$$I''_\gamma(x) = 6x - 6c,$$

$$I''_\gamma(x) = 0 \iff x = c,$$

por lo tanto la gráfica de  $I_\gamma(x)$  tiene un punto de inflexión precisamente en el punto  $(c, I_0) = (c, c^3)$ .

La función  $I_\gamma(x) = x^3 - 3cx^2 + (3c - 1 + 1/\gamma)x$  nos da el valor de  $I$  que se necesita para tener un punto de equilibrio con coordenadas  $(x, x/\gamma)$  para un valor dado de  $x$ . Como ya se ha dicho, para estudiar la estabilidad de los equilibrios necesitamos analizar el determinante y la traza de la linealización, a este respecto tenemos un resultado interesante.

**D.3. Lema.**  $\det DF = b\gamma I'_\gamma(x)$ .

*Demostración.* En efecto:

$$I'_\gamma(x) = f'(x) + \frac{1}{\gamma}.$$

De (22) se obtiene inmediatamente la conclusión. QED.

**D.4. Proposición.** Si el equilibrio  $(x^*, x^*/\gamma)$  es tal que:  $c - A(\gamma) < x^* < c + A(\gamma)$ , entonces es una silla.

*Demostración.* Por los lemas D.1 y D.2 para tales valores de  $x$  se tiene  $I'(x) < 0$ . El resultado se sigue del lema D.3. QED.

Se sigue también de los lemas D.1 y D.2 que si  $\gamma > \gamma_0$ , existen valores del parámetro  $I$  para los cuales existen dos o tres equilibrios.

**D.5. Lema.** Si  $\gamma < \gamma_0$ , entonces  $I(x) = I_\gamma(x)$  es invertible y

$$\frac{dx}{dI} > 0.$$

*Demostración.* Del lema D.1, la derivada de  $I(x)$  es positiva si  $\gamma < \gamma_0$ ; derivando implícitamente de (25):

$$\frac{dx}{dI} \left( f'(x) + \frac{1}{\gamma} \right) = 1,$$

como  $\gamma < \gamma_0$ ,  $f'(x) \geq f'(c) = -\frac{1}{\gamma_0} > -\frac{1}{\gamma}$  por lo tanto  $\frac{dx}{dI} > 0$ . QED.

**D.6. Teorema.** Si  $\gamma \leq \gamma_0$ , FHN tiene solamente un equilibrio. Si  $\gamma > \gamma_0$  entonces FHN tiene:

a) tres equilibrios distintos si  $I_1(\gamma) < I < I_2(\gamma)$ ,

b) dos equilibrios distintos si  $I = I_1(\gamma)$  o  $I = I_2(\gamma)$  o

c) un solo equilibrio se  $I < I_1(\gamma)$  o  $I > I_2(\gamma)$ .

*Demostración.* La primera parte pertenece del lema B.7 y el inciso b) es por definición de  $I_1$  e  $I_2$ . Si se dan las condiciones del inciso a), denotando por  $p_i(x) = f(x) + \frac{x}{\gamma} - I_i(\gamma)$ , tenemos  $p_1(x) > p(x) > p_2(x)$

para toda  $x$ , como para  $\gamma > \gamma_0$  las raíces de los polinomios  $p_1$  y  $p_2$  satisfacen las desigualdades (4):

$$\alpha_1(\gamma) < \beta_2(\gamma) < \beta_1(\gamma) < \alpha_2(\gamma),$$

Entonces:

$$\begin{aligned} p(\alpha_1(\gamma)) &< 0 \\ p(\beta_2(\gamma)) &> 0 \\ p(\beta_1(\gamma)) &< 0 \\ p(\alpha_2(\gamma)) &> 0 \end{aligned}$$

Por el teorema del valor intermedio  $p(x)$  debe tener tres raíces,  $x_0, x_1, x_2$ , satisfaciendo:

$$\alpha_1(\gamma) < x_0 < \beta_2(\gamma) < x_1 < \beta_1(\gamma) < x_2 < \alpha_2(\gamma) \quad (26)$$

Como las raíces de  $p$  determinan los equilibrios de FHN, el inciso a) queda demostrado.

Finalmente, el inciso c) se sigue de observar, por un lado, que todos los polinomios  $p(x)$  son traslaciones verticales unos de otros, y por otro lado, que la raíz doble de  $p_1(x)$  está en el mínimo y la raíz doble de  $p_2(x)$  en el máximo. Entonces, si  $I < I_1(\gamma)$ ,  $p_1(x) < p(x)$  y por lo tanto solamente tiene una raíz a la izquierda de la raíz simple de  $p_1$ , el otro caso es análogo. QED.

Demostremos ahora el teorema 3 de la sección 2.

**3. Teorema.** FHN tiene una bifurcación del tipo silla-nodo en  $I = I_i(\gamma)$ ,  $i = 1, 2$ .

*Demostración.* Demostremos este teorema mostrando que cruzando las curvas  $I = I_i(\gamma)$ ,  $i = 1, 2$ , hacia la región donde se tienen tres equilibrios (cf. Teorema D.6) uno de ellos es una silla y los otros nodos o focos.

De acuerdo con la demostración del teorema D.6, y con la misma notación, las abcisas de los tres equilibrios satisfacen las desigualdades (26)

$$\alpha_1(\gamma) < x_0 < \beta_2(\gamma) < x_1 < \beta_1(\gamma) < x_2 < \alpha_2(\gamma).$$

La proposición D.4 implica que  $(x_1, x_1/\gamma)$  es una silla. Demostremos ahora que, si  $\beta_2(\gamma) \leq c$ ,  $(x_0, x_0/\gamma)$  es un nodo o un foco, la demostración para el otro equilibrio es completamente semejante. Si  $x_0 \leq x_{min}$  entonces  $f(x_0) \geq 0$  y, de la proposición C.2, el equilibrio es o un nodo o un foco estable.

Si  $x_{min} < x_0$  entonces  $0 > f'(x_0) > f'(\beta_2(\gamma)) = -1/\gamma$ , de donde  $\gamma f'(x_0) + 1 > 0$  lo cual implica que el determinante de la matriz de linealización de FHN en  $(x_0, x_0/\gamma)$  tiene determinante positivo. Por lo tanto los dos eigenvalores tienen el mismo signo y el equilibrio es un nodo. QED.

Esta bifurcación se da cuando, entre otras cosas, la traza de la matriz de linealización es igual a cero

$$-f'(x) - b\gamma = 0 \quad (27)$$

Si esta ecuación no tiene solución, no se da la bifurcación de Hopf y, como  $f(x) \geq f(c)$ , tiene solución si y sólo si  $b\gamma < \frac{1}{\gamma_0} - f'(c)$ .

Calculamos ahora los valores de estas soluciones, usando (11), como las raíces reales del polinomio cuadrático

$$x^2 - 2cx + c - \frac{1}{3} + \frac{b\gamma}{3} = 0,$$

es decir

$$\xi_{\pm}(\gamma) = c \pm \sqrt{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{\gamma_0} - b\gamma \right)} = c \pm \sqrt{A_{\infty}^2 - \frac{b\gamma}{3}} = c \pm B(\gamma)$$

Tenemos un lema semejante al lema D.2.

**D.7. Lema.** La función  $B(\gamma)$ , definida para  $\gamma \leq 1/(b\gamma_0)$  tiene las siguientes propiedades

a)  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} B(\gamma) = A_{\infty}$ ,

b)  $B(\gamma) \geq 0$ ;  $B(\gamma) = 0 \iff \gamma = \frac{1}{b\gamma_0}$ ,

c)  $x_{min} = c - A_{\infty} < c - B(\gamma) = \xi_{-}(\gamma) \leq \xi_{+}(\gamma) = c + B(\gamma) < c + A_{\infty} = x_{max}$ ,

d)  $\frac{dB}{d\gamma} = \frac{-b}{6B(\gamma)}$

Demostremos ahora el teorema 7 de la sección 3.

**7. Teorema.** Si  $\gamma < \min \left\{ \gamma_0, \frac{1}{b\gamma_0} \right\}$ , entonces en  $J_i(\gamma)$ ,  $i = 1, 2$ , se da una bifurcación de Hopf.

*Demostración.* Notemos primero que  $B(\gamma) \neq 0$  para  $\gamma < \min \left\{ \gamma_0, \frac{1}{b\gamma_0} \right\}$ . En  $J_i(\gamma)$ ,  $i = 1, 2$ , la traza de la linealización se anula; se demostrará que al cruzar la curva  $I = J_i(\gamma)$ ,  $i = 1, 2$ , la derivada de la función traza

$$T(I) = -f'(x(I)) - b\gamma$$

es distinta de cero.

Consideremos primero la función  $Tr(x) = -f'(x) - b\gamma$  la cual alcanza su máximo en  $x = c$  (al igual que  $-f'(x)$ ), como  $\gamma < \frac{1}{b\gamma_0}$ ,

$$Tr(c) = \frac{1}{\gamma_0} - b\gamma > 0,$$

por lo tanto

$$Tr'(x) = -f''(x) = 6x - 6c \neq 0$$

si  $x \neq c$ .  $Tr(x) = 0$  implica que  $x \neq c$ , y entonces la derivada de  $Tr(x)$  no se anula en  $x = \xi_{\pm}$ . Como para  $\gamma < \gamma_0$ ,  $T(I) = Tr(x(I))$  entonces,

$$\frac{dT}{dI} = \frac{dTr}{dx} \frac{dx}{dI}$$

por el lema D.5 la derivada no se anula en  $I = J_i(\gamma)$  y por el teorema de bifurcación de Hopf (Arrow-Smith y Place, 1992) y el teorema A.1, este teorema queda completamente probado. QED.

**D.8. Lema.**

$$\xi_{-}\left(\frac{1}{b\gamma}\right) = \xi_{+}\left(\frac{1}{b\gamma_0}\right) = c \quad y$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \xi_{-}(\gamma) = x_{min}, \quad \lim_{\gamma \rightarrow 0} \xi_{+}(\gamma) = x_{max},$$

*Demostración.* Como  $B\left(\frac{1}{b\gamma_0}\right) = 0$  y  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} B(\gamma) = \lim_{b \rightarrow 0} B(\gamma) = A_{\infty}$  usando (20) se tiene el resultado. *QED.*

**D.9. Lema.**

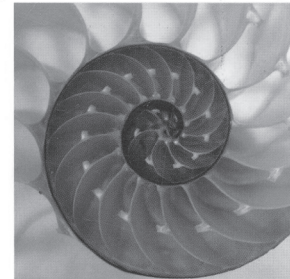
$$J_1(\gamma) = I_0 + \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_0}\right)c + \left(B(\gamma)^3 + \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_0}\right)B(\gamma)\right) \quad (28)$$

$$J_2(\gamma) = I_0 + \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_0}\right)c - \left(B(\gamma)^3 + \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_0}\right)B(\gamma)\right)$$

# ESPIRAL

Estudios sobre Estado y Sociedad

**48** Volumen XVI  
mayo / agosto de 2010



## Teoría y Debate

- 9 **Anselmo Flores Andrade.** Control y sanción: el financiamiento público a las agrupaciones políticas nacionales en México (2000-2005).
- 47 **Javier Aguilar García.** Globalización y sindicalización: comparación de México y Francia

## Estado

- 87 **Luis Ibarra.** Los consejos de salarios en Uruguay con el gobierno de la izquierda.
- 103 **Adrián Joaquín Miranda Camarena y Luis Antonio Corona Nakamura.** Iniciativa de decreto sobre la propuesta de reforma política del presidente Felipe Calderón.
- 139 **Hiram A. Ángel Lara.** Entre la tradición y la modernidad. Dos momentos de la legislación indígena en México: de la Colonia al liberalismo decimonónico.

## Sociedad

- 181 **Javier E. García de Alba García, Ana Leticia Salcedo Rocha y Luis Alberto Vargas Guadarrama.** Conocimiento compartido sobre las causas de la presión arterial alta, en tres grupos de diferentes edad de Guadalajara, Jalisco, México..
- 205 **José de la Paz Hernández Girón, María Luisa Domínguez Hernández y Luis Mendoza Ramírez.** Desempeño de negocios de artesanía después del movimiento social de 2006 en Oaxaca, México.

## Reseñas

- 243 **David Foust Rodríguez.** Buenas intenciones y seguridad social para todos: la propuesta Levy.
- 251 **Miguel Albarrán S.** Perspectivas hacia la integración regional de América Latina.
- 255 **Marcos Pablo Moloeznik.** Alcances y contenidos de la corrupción policial .



UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA  
Centro Universitario  
de Ciencias Sociales y Humanidades

