Jaime Arrieta Vera, Leonora Díaz Moreno

UNA PERSPECTIVA DE LA MODELACIÓN DESDE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA

A modeling perspective from Socioepistemology

RESUMEN

Se caracteriza a la modelación como una práctica que articula dos entidades, con la intención de intervenir en una de ellas a partir de la otra. La diversidad, tanto de las entidades que intervienen en la articulación como de la naturaleza de la intervención, hacen posible identificar a la modelación como una práctica recurrente en diferentes comunidades. La práctica de modelación permite tender puentes entre lo que se hace en la escuela y lo que se hace en comunidades no escolares. En esta práctica el modelo no existe independiente de la actividad humana, se manifiesta como modelo en tanto se usa para intervenir en otra entidad que, a partir de este momento, es lo modelado. Si bien la interacción con la entidad a modelar es necesaria, la suficiencia se logra con la intervención sobre ella, a partir de la actividad con el modelo. Es en esta intervención que se establece el acto de modelar. La articulación de diferentes modelos con el fenómeno, da lugar a redes de modelos que potencian la actividad humana para la intervención.

PALABRAS CLAVE:

- *Prácticas de modelación*
- *Articulación de entidades*
- *Intención de intervenir*
- *Redes de modelos*

ABSTRACT

Defining modeling as a practice articulating two entities has the aim of intervening on one of them from the other. The diversity of both entities intervening in the articulation, as well their nature, make possible to identify modeling as a recurrent practice in different communities. Modeling practice allows building bridges between what is done in school and in communities outside schools. In this practice, the model doesn´t exist independent of the human activity. It manifests as model while intervening in the other entity, at this moment

KEY WORDS:

- *Modeling practices*
- *Entities articulation*
- *Intervening intension*
- *Modeling networks*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2015) *18* (1): 19-48.
Recepción: Septiembre 18, 2013 / Aceptación: Octubre 27, 2014. DOI: 10.12802/relime.13.1811

it is called the modeled entity. Despite the interaction with the entity to be modeled is necessary, its adequacy comes about with the intervention on it, through carrying out activity with the model. It is through this intervention that the modeling act is established. Articulating different models with the phenomenon, gives rise to a modeling network that strengthen the human activity for the intervention.

RESUMO

A modelação como prática se caracteriza como aquela que articula duas entidades, com a intenção de intervir em uma delas, a partir da outra. A diversidade, tanto das entidades que intervêm na articulação, quanto a natureza da intervenção, tornam possível a identificação da modelação como prática recorrente em diferentes comunidades. A prática de modelação permite estabelecer pontes entre o que se faz na escola e nas comunidades fora delas. Nesta prática, o modelo não existe independente da atividade humana. Manifesta-se como modelo quando é usado para intervir em outra entidade que, a partir deste momento se chamará o modelado. Apesar de ser necessária a interação com a entidade a ser modelada, a suficiência se alcança com a intervenção sobre ela, a partir da atividade realizada com o modelo. É nesta intervenção que o ato de modelar se estabelece. A articulação de diferentes modelos com o fenómeno dá lugar a redes de modelos que potenciam a atividade humana para a sua intervenção.

PALAVRAS CHAVE:

- *Práticas de modelação*
- *Articulação de entidades*
- *Intenção de intervir*
- *Redes de modelos*

RÉSUMÉ

La définition de modélisation comme pratique articuler deux entités a pour but d'intervenir sur l'un d'eux de l'autre. La diversité, des deux entités qui interviennent dans l'articulation, ainsi que leur nature, permettent d'identifier la modélisation comme une pratique récurrente dans différentes communautés. Pratique de modélisation permet de construire des ponts entre ce qui se fait à l'école et dans les collectivités situées en dehors des écoles. Dans cette pratique, le modèle n'existent pas indépendamment de l'activité humaine. Elle se manifeste comme modèle en intervenant dans l'autre entité, en ce moment, qu'on l'appelle l'entité modélisée. Malgré l'interaction avec l'entité à modéliser est nécessaire, que son adéquation passe avec l'intervention à ce sujet, par activité avec le modèle. C'est grâce à cette intervention que l'acte de modélisation est établi. Articuler les différents modèles avec le phénomène, donne naissance à un réseau de modélisation qui renforcent l'activité humaine pour l'intervention.

MOTS CLÉS:

- *Pratiques de modélisation*
- *Articulation des entités*
- *Intervenanteintension*
- *Modélisation des réseaux*

1. Separación de la escuela y su entorno

Desde los ochenta, Lave (1988) y Walkerdine (1988) reportan cierta separación entre la escuela y su entorno. Abordan el viejo problema educativo de la transferencia del conocimiento y, al respecto, puntualizan que: las comprensiones cotidianas no escolares y los procedimientos mentales que involucran ciertos funcionamientos y relaciones matemáticas elementales, son totalmente diferentes de aquellos que se esperan de estudiantes en la escuela y en tareas experimentales similares, no obstante que involucren las mismas acciones y relaciones; y, que estas comprensiones cotidianas y procedimientos no deben ser juzgados como algo de menor calidad que aquellos desarrollados en el currículum tradicional. La imposibilidad de la transferencia del conocimiento escolar a situaciones de resolución de problemas cotidianos, es planteada como una consecuencia de la primera puntualización. Su segundo aserto sugiere que cada problema de "transferencia de conocimiento", puede ser entendido desde una epistemología que no coloca al conocimiento académico como un modelo a seguir por sobre las formas cotidianas de saber y de resolver problemas.

En esta misma óptica, la etnomatemática muestra cómo, comunidades no escolares, usan diferentes procedimientos y herramientas matemáticas (D'Ambrosio, 1990, 2001; Teresi, 2003).

Carraher, Carraher y Schliemann (1991) en su libro "En la escuela diez, en la vida cero", destacan que hay personas que en la vida, vendiendo cocos, se desempeñan muy bien y en la escuela no.

Este fenómeno también se manifiesta en espacios formativos de profesionales. Se ilustra con una experiencia de aula, de matemáticas superiores. Se plantea a los estudiantes la paradoja de Zenón. Debaten acerca de si Aquiles alcanza o no a la tortuga, algunos opinan que sí y otros que no. Se obtiene consenso a partir de la opinión de Emilio:

Episodio 1. En la vida real sí pero en la escuela no

Emilio: Aquiles no alcanza a la tortuga porque siempre le faltará algo.

Raquel: Si, pero cada vez le falta algo más pequeño.

Emilio: Pequeño pero le falta algo.

Raquel: Pero es muy pequeño, menos que un pedacito de paso. Pero, que no ves que si corremos y yo corro más rápido te alcanzo.

Emilio: Bueno ya, afuera, en la vida real, claro que Aquiles alcanza a la tortuga, hasta la rebasa, aquí no la alcanza.

Sus compañeros manifiestan aprobación, concordando con la posición de Emilio.

Profesionales en formación aceptan la proposición y su negación, dependiendo del lugar en que estén situados. Naturalizan la dualidad de los mundos de la escuela y la “vida real”.

Es tan profunda esta escisión que el profesorado habla de “abordar problemas de la vida real” cuando propone problemáticas no escolares en su aula, ¡como si la escuela no fuera parte de esa vida real!

La escisión se manifiesta también en el campo profesional. Por ejemplo, para dar seguimiento a sus egresados un instituto tecnológico de México, en el año 2004, aplicó una encuesta a 238 Ingenieros en Sistemas Computacionales en servicio. Llaman la atención las respuestas que dieron a la pregunta:

¿En su vida profesional utiliza usted ecuaciones diferenciales?

a) Frecuentemente

b) Ocasionalmente

c) Nunca

El 96% optó por la opción “c” y el 4% no contestó. Ninguno de ellos contestó ocasionalmente ni frecuentemente. Esto muestra que lo que se hace en aulas de ecuaciones diferenciales no tiene sentido en el trabajo profesional de ingenieros en ejercicio. Corroborando la desvinculación entre las prácticas de la escuela, de la vida diaria y profesionales, Rivera (2005) reporta que las prácticas de profesionales, incluidos ingenieros dedicados al desarrollo y/o investigación, poco tienen que ver con resolver ecuaciones diferenciales. Sea que se trate de prácticas de ingenieros de la línea de producción o no, recurrirán a unas matemáticas distintas a las de los técnicos y de aquellos que participan en investigación y desarrollo (Romo y Oktaç, 2007; Landa, 2008; Trejo, 2008; Galicia, Díaz y Arrieta, 2011).

Nuestra preocupación se instala en la separación de lo que se hace en la escuela y fuera de ella, con el propósito de tender puentes entre la escuela y su entorno.

2. Naturaleza de los puentes

Las problemáticas que concurren con la separación de la escuela de su entorno han sido atendidas desde diferentes perspectivas, con respuestas y propuestas de diversa índole. Algunas miradas consideran que la situación se atiende poniendo los conocimientos en contextos adecuados. Desde el inicio de los ochenta, Freudenthal lo resalta afirmando que "las matemáticas deberían ser enseñadas dentro de contextos y a mí me gustaría que las matemáticas más abstractas fueran enseñadas dentro de los contextos más concretos" (Freudenthal, 1981, p. 139).

> 2. ☑ Una taza de café se calienta en un horno de microondas. Luego, se extrae del horno y se expone al ambiente, que se encuentra a una temperatura del15°C. Supongamos que, en los primeros 10 minutos, la temperatura de la taza disminuye uniformemente. La siguiente gráfica representa *una aproximación* a la forma en que la temperatura de la taza disminuye en los primeros 10 minutos.

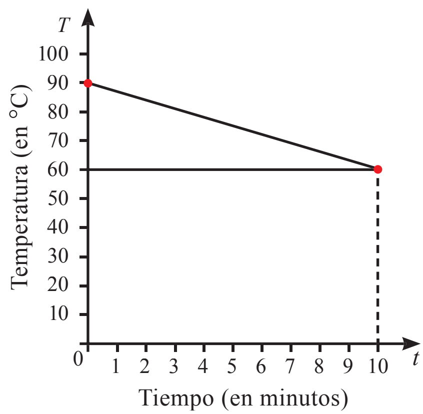


Figura 1. Enfriamiento del café (Escareño y López, 2007, p. 153)

Sin embargo, esta opción ha llegado a plantear situaciones francamente artificiales. Por ejemplo, en la búsqueda de contextualizaciones adecuadas, se recurre a fenómenos de las ciencias naturales con propiedades que no poseen. Escareño y López (2007) muestran un problema en su libro de texto que supone que la temperatura del café desciende uniformemente. Se afirma que la recta que aparece en la figura 1, es "una aproximación a la forma en que la temperatura del café disminuye" en el tiempo. Situación burda pues el comportamiento de la temperatura en el tiempo, es exponencial. Por qué escoger un fenómeno cuyos modelos no tienen una variable que disminuye uniformemente, cuando existen fenómenos cuyos modelos sí la tienen. Asimismo, no se plantea la experimentación y se prefiere dar los datos (numéricos o gráficos) artificiales, "bonitos y sin ruido" (Arrieta y García, 2009).

En palabras de Alsina (2007) esta situación corresponde a una realidad inventada, esto es, a realidades ficticias, maquilladas como situaciones aparentemente posibles. A menudo incluyen datos o medidas equivocadas, conduciendo a creencias falsas e induciendo errores inadmisibles. Alsina (2007) en su clasificación de realidades presentes en situaciones de los libros de texto de matemáticas, distingue entre inventadas, falseadas y manipuladas, inusuales, caducas, lejanas, ocultas y no adecuadas.

Si bien Freudenthal propone que las matemáticas más abstractas sean enseñadas en los contextos más concretos, también manifiesta su preocupación para concebirlos "¿Cómo crear contextos adecuados para poder enseñar matematizando? [...] necesitamos problemas matemáticos que tengan un contexto significativo para los estudiantes" (Freudenthal, 1981, p. 139).

La separación de la escuela con su entorno también se aborda desde una óptica curricular, modificando los planes de estudio. Ejemplo de estas acciones curriculares son las reformas emprendidas en la secundaria y el bachillerato mexicano, así como para la escolaridad obligatoria de Colombia y de Chile.

Por ejemplo, la Reforma de la Educación Secundaria de México (RES) establece que cada estudiante debe interpretar y explicar procesos sociales, económicos, financieros, culturales y naturales para tomar decisiones individuales o colectivas que favorezcan a todos (Secretaría de Educación Pública, 2011, p. 32). Mientras que la Reforma Integral de la Educación Media Superior de México (RIEMS) plantea un currículo basado en competencias y que una de las características fundamentales de las competencias genéricas es que deben ser "aplicables en contextos personales, sociales, académicos y laborales amplios. Relevantes a lo largo de la vida" (Secretaría de Educación Pública, sf, p. 6).

Sin embargo, estos lineamientos establecidos para los programas no siempre pueden ser atendidos por los docentes en el aula, dando como resultado que las reformas a los planes de estudio presenten un curriculum formal que dista de las prácticas en el aula, es decir, que dista del curriculum vivido (Díaz Barriga, 2003).

Las problemáticas a las que da lugar la separación de la escuela de su entorno están aún lejos de ser resueltas. En la escuela se siguen construyendo lugares artificiales donde suceden cosas que en la vida cotidiana no suceden o no tienen razón de ser.

3. Las prácticas Situadas, puentes entre lo que se hace en la escuela y lo que se hace fuera de la escuela

Inspirados en Carraher, Carraher y Schliemann (1991) se reprodujo la experiencia que relatan de cómo niños brasileños venden cocos. Se conversó con César, un niño que vende chicles en una de las calles de Acapulco. A continuación, reproducimos un fragmento de la conversación:

Episodio 2. ¿Es un problema de matemáticas?

Nancy: ¿A qué precio das tus chicles?
César: Tres cincuenta
Nancy: Me das cinco (saca un billete de veinte pesos y se lo entrega)
César: Gracias (entrega una moneda de cincuenta centavos y dos de un peso)
Nancy: ¿Cómo te llamas?
César: César
Nancy: ¿Me puedes ayudar respondiendo unas preguntas y te compro toda tu caja de chicles?
César: ¡Sí! (entusiasmado pues la caja de chicles la vende en un día completo)
Nancy: Bien, explícame ¿Cómo haces tus cuentas? Parece que no te equivocas. ¿Cómo supiste cuánto me tendrías que dar de cambio?
César: Muy fácil, mira, son cinco de a tres pesos, son quince, ajá, son cinco de cincuenta (se refiere a monedas de cincuenta centavos), son dos cincuenta, ajá, quince más dos cincuenta son diecisiete cincuenta. Así le hago.
Nancy: Y el cambio (le extiende, en la mano, las monedas de cambio que le dio)
César: Ajá, diecisiete cincuenta más cincuenta (toma la moneda de cincuenta centavos de la mano de Nancy) dieciocho, y un peso más (toma una moneda de un peso) diecinueve, y un peso (toma la otra moneda de un peso) veinte.

Es muy fácil (con aires de suficiencia), me traigo a veces a mi hermanito porque tiene que aprender. Si no sale la caja, mi madre se enoja mucho (se refiere a que debe de entregar el dinero completo de la caja entera).

Nancy: ¿Cómo sabes que está bien?, ¿cómo aprendiste?
César: No sé. Así se hace, no me equivoco.
Nancy: ¿En qué año vas en la escuela?
César: En tercero (tercero de primaria, tiene 10 años), perdí un año.
Nancy: Te invito un helado y me ayudas a resolver un problema
César: Sí (entusiasta)

Se dirigen a una heladería y se sientan en una mesa. Piden el helado. Nancy saca una libreta y un lápiz y se los da a César.

Cesar: Mmm, problems (expresión para decir que está en problemas)
Nancy: César, por favor ayúdame a resolver un problema de matemáticas: Hay un niño en la Gran Plaza (el centro comercial donde están) y

vende chicles a tres cincuenta, llega una señora y le compra cinco, le paga con un billete de a veinte, ¿cuánto debe darle de cambio?

(César toma el lápiz y mira a Nancy con una media sonrisa, como si se preguntara ¿y ella qué quiere?)

César: ¿Es un problema de matemáticas?

Nancy: Sí

(César escribe. Después de un tiempo dice)

César: No sé

Nancy: Explícame

César: Tres punto cincuenta por cinco (señala en el papel lo que escribió). ... Me da … ¿cinco por cero? cero, cinco por cinco veinticinco y llevo dos (con su mano, levanta dos dedos), cinco por tres quince y dos que llevaba (levanta los dos dedos de su mano) son diecisiete. Pero, ¿dónde va el punto? mmm

Nancy: Aquí (señala entre siete y cinco)

César: Ah, bueno, ajá, veinte (escribe 20 aparte), diecisiete cincuenta (escribe debajo de veinte), ajá, ¿cero menos cero? cero, ¿cero menos cinco? no alcanza, le pido a veinte uno, diez menos cinco, cinco, mmm, ahora… (se mueve de un lado a otro) no sé

Nancy: ¿Por qué?

César: Ya me hice bolas, no sé cuánto es aquí ahora (señala el veinte) porque pedí prestado uno, cero no me puede prestar,… ajá, ¿cero le pide prestado a dos?… No sé, nunca he sido bueno en las cuentas.

En la calle César tiene la intención de dar bien el "vuelto". Equivocarse tiene consecuencias inmediatas, lo castiga su madre o le reclama el cliente. En la escuela las exigencias corresponden al contrato escolar y las consecuencias son de otra índole. Las primeras exigencias se expresan en su mundo vital inmediato, en su integridad, en tanto que en la escuela corresponden a las calificaciones, que no siempre tienen consecuencias vitales inmediatas.

Los procedimientos son diferentes y los argumentos para sustentarlos también:

Nancy: ¿Cómo sabes que está bien?, ¿cómo aprendiste?

César: No sé. Así se hace, no me equivoco.

César plasma en esta interacción "un conocimiento en forma de acción". Este se aprende y se construye "en", "a través de" y "como parte de" las actividades cotidianas, de un modo consciente o inconsciente.

Las formas de emergencia y de constitución de ambas prácticas son distintas. En este sentido César ilustra cómo la práctica cotidiana resulta ser, a la vez, fruto del conocimiento y un medio para conocer:

> César: (…) Es muy fácil (con aires de suficiencia), me traigo a veces a mi hermanito porque tiene que aprender.

Por su parte, la práctica escolar se constituye con base en un conjunto de actos con unos sentidos descritos pormenorizadamente, que se desarrollan en ambientes escolares y que configuran, entre otros, los roles de ser docente y de ser estudiante.

Las matemáticas en juego son diversas, una es la escolar y otra es la que le funciona a César para vender chicles. En la calle, usa el cálculo mental como herramienta; en la escuela, usa el lápiz y el papel. En la calle, opera con cantidades de chicles y cantidades de monedas; en la escuela, opera con números. César vive una dualidad. Es una persona vendiendo chicles, ejerciendo el oficio de vendedor. Es otra en la escuela viviendo como estudiante, procediendo en consecuencia. La complejidad de lo identitario en César se configura con la concurrencia de éstas y otras vivencias. César es quien es, entre otras cosas, porque vende chicles y esto que hace, lo distingue.

Estudiar la práctica situada desde una perspectiva compleja nos centra en intenciones, procedimientos, herramientas, argumentos y sus procesos de emergencia y constitución. Estos seis elementos se relacionan con el por qué se hace, cómo se hace, con qué se hace, cómo se justifica y cómo es que la práctica llega a ser como es y qué horizontes plantea su devenir. Los cuatro primeros dan cuenta de la práctica situada, los dos últimos permiten explicaciones que trascienden el estar ahí, ubicando a la práctica en el tiempo. Es una práctica situada deviniendo en el tiempo.

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2013), plantea la práctica social como un constructo teórico central con diferentes funciones, entre ellas la normativa, la discursiva, la identitaria y la pragmática. Reconocemos la diferencia epistemológica entre práctica social y práctica situada y en este escrito nos referimos a esta última como una actividad recurrente de diferentes comunidades. Si bien se abordan cuestiones pragmáticas, discursivas y normativas, ello se emprende desde la observación directa de lo que se hace ahí, en el sentido de Heidegger (1999), Lave (1988), De Certeau (2000). En lo que sigue nos referimos a prácticas situadas sólo como prácticas.

Distinguimos tres esferas de prácticas relacionadas a la actividad matemática -no siempre disjuntas-, la de la matemática escolar, de la matemática científica y del uso no escolar de las matemáticas (Arrieta, 2003). Esta distinción se plantea desde la óptica de lo que se hace ahí, que si bien trae saberes implícitos y explícitos característicos de cada esfera, estos son analizados en su concurrencia en el hacer situado.

Las esferas de las prácticas del uso no escolar de las matemáticas y de las prácticas escolares, difieren en intenciones, herramientas, argumentos y procedimientos, configurando la separación de la escuela respecto de su entorno. Esta separación no responde al "nivel de realidad" de ambos mundos. Tan importante y "real" es la escuela como el mundo no escolar. Tampoco se establece por la naturaleza de los conocimientos que viven en cada mundo, no obstante que estos marcan diferencias. Cobra sentido entonces proponer prácticas que se desplacen desde ambientes escolares a no escolares, que funcionen como puente entre las esferas de prácticas. Una de ellas, planteamos en el presente artículo, es la modelación.

Se procura ubicar prácticas de comunidades para establecer puentes, estudiando sus intenciones, sus procedimientos, sus herramientas, los argumentos con que justifican sus acciones, su emergencia y constitución y el ámbito sociocultural que les da cabida. Este propósito rebasa el terreno de la contextualización.

Al proceso de "descomponer" la práctica, desde los seis elementos planteados anteriormente, le llamamos la *deconstrucción de la práctica* (Ulloa, 2013; Galicia et al., 2011). Esta deconstrucción es útil para nuestros fines, pues puede ser base de diseños de aprendizaje que sean incorporados al sistema escolar. Estos diseños serán diseños escolares, y no se pretende reproducir en ellos la práctica sobre la que se basan. No es posible reproducir en el aula aspectos como las intenciones y los argumentos de las prácticas situadas en ambientes no escolares.

La modelación, desde esta configuración, se constituye como una práctica que establece puentes entre la escuela y su entorno.

4. Desplazamientos de la modelación en Matemática Educativa

En esta sección damos cuenta de desplazamientos de la modelación en Matemática Educativa, apoyándonos en tres artículos que ilustran posturas actuales de la modelación, desarrolladas en Brasil y México.

En Brasil existe una gran tradición de modelación en educación matemática, que data de los años setentas. Un artículo que informa de esta tradición es el de Biembengut (2012). Por su parte, en México, Cordero (2006) hace un posicionamiento a la modelación desde una perspectiva latinoamericana de la Matemática Educativa que ha cobrado relevancia, la Socioepistemología. Y de este mismo país, Rodríguez (2010) expone una visión de la modelación desde la Teoría Antropológica de Chevallard.

La producción a nivel de investigación, en modelación en nuestra disciplina, es amplia. Por ejemplo Biembengut (2012) identificó entre 1979 y 2008, en Brasil, 812 trabajos en anales de congresos (resúmenes y trabajos en extenso).

Los enfoques de investigación son variados y aun cuando algunas posiciones iniciales se han mantenido, otras muestran importantes desplazamientos.

Un primer desplazamiento corresponde al terreno de los instrumentos con los que se modela, es decir, los modelos. Las referencias a los modelos han transitado desde asumir al modelo como una ecuación o un sistema de ecuaciones algebraicas y/o diferenciales, a visiones más amplias. Por ejemplo, para Biembengut y Hein (1997, p. 211) "un modelo puede ser formulado en términos familiares, tales como: expresiones numéricas o fórmulas, diagramas, gráficos o representaciones geométricas, ecuaciones algebraicas, tablas, programas computacionales, entre otros".

Un segundo desplazamiento ocurre en el ámbito de las intenciones en Matemática Educativa. Los propósitos y las motivaciones han cambiado, ampliando su diversidad. Biembengut (2012), al referirse a los orígenes del movimiento de la modelación matemática en los años setenta, menciona que las primeras propuestas responden al cuestionamiento de los estudiantes de ingeniería, sobre la utilidad de las matemáticas que se les enseñan, y a la crítica de los empresarios, sobre la formación matemática de los estudiantes. Estos dos propósitos siguen presentes en una variedad de artículos. Las intencionalidades en ese entonces se desenvolvían en el terreno de la aplicación de la matemática. Sin embargo, una corriente importante se desplaza al terreno de la didáctica, planteando a la modelación como herramienta al servicio de objetivos pedagógicos. Esta autora, a partir de cuatro principios, a saber: motivación, actividades, contenidos y, referencias y consideraciones; analiza 64 producciones de modelación matemática en la enseñanza media, referidas a prácticas de aula y ensayos teóricos. Desde su análisis distingue tres concepciones de modelación matemática: como método de enseñanza y de investigación, como alternativa pedagógica de la matemática y como ambiente de aprendizaje. Se piensa no solo en el esquema de *enseñar matemáticas para poder aplicarlas,* sino que se instala otro esquema, correspondiente a *utilizar la modelación para el aprendizaje de las matemáticas* o *la generación de diversas capacidades* u *otros propósitos en la escuela*.

En México, Cordero (2006) afirma que la modelación es, en sí misma, una construcción del conocimiento matemático: "Modelación no significa una "herramienta didáctica" que ayuda o facilita a construir el concepto de función, sino (que) es una actividad que trasciende y se resignifica, que transforma al objeto en cuestión" (p. 66). El autor hace una distinción entre la obra matemática, la matemática escolar y la funcional. Uno de los elementos clave en su análisis es el de resignificación, establecido como un diálogo entre la obra matemática y la matemática funcional.

> (Al) debate, (del) conocimiento matemático, entre su función y su forma… hemos convenido en llamarle resignificación. Entonces debemos ir creando marcos de referencia, en el sistema educativo, que ayuden a resignificar el conocimiento matemático (Cordero, 2006, p. 64).

Sustenta que,

> la hipótesis consiste en considerar a la práctica social como la fuente de la reorganización de la obra matemática y del rediseño de la matemática escolar… En el marco de estas consideraciones, las estructuras y los conceptos son situaciones que se resignifican a través del desarrollo de las prácticas sociales (Cordero, 2006, pp. 73, 75).

Caracteriza, entonces, a la modelación como una práctica que resignifica a la obra matemática.

> Asimismo, la suma de funciones $f=g+h$ significa una situación de comportamiento local y global que tendrá que ser resignificado hasta alcanzar la estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales $ay'+y=f$ por medio de la modelación o bien de la graficación como una práctica (Cordero, 2006, p. 74).

Para Cordero la modelación relaciona la obra matemática y la matemática funcional.

La relación entre el modelo y lo modelado se desplaza por diferentes esquemas. Una de estas relaciones es la de realidad con la matemática. Desde el terreno representacionista, se ubica a la modelación como una tarea de representar, o bien a la realidad, o bien a los objetos matemáticos.

> Podemos dizer que, de modo geral, o termo 'modelagem matemática' refere-se à busca de uma representação matemática para um objeto ou um fenómeno que pode ser matemático ou não (De Almeida e Ferruzzi, 2009).

El esquema realidad-matemáticas es visto en Biembengut y Hein (1997) en términos de que "matemáticas y realidad son dos conjuntos disjuntos y el modelaje es un medio de conjugarlos" (p. 210). Proponen el siguiente esquema

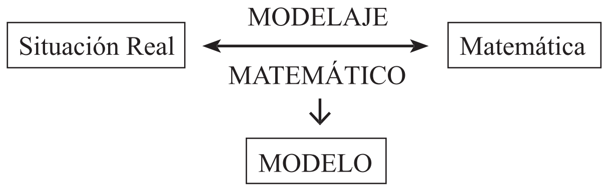


Figura 2. Esquema "Realidad-Modelaje-Matemáticas" de Biembengut y Hein (1997, p. 210)

En la concepción de modelación de Rodríguez (2010) esta relación se amplía a una relación entre los dominios real, pseudo-concreto y matemático. La autora entiende como dominio real al mundo de situaciones de la realidad que, a partir de simplificar magnitudes de interés, dan lugar a modelos pseudo-concretos. Desde este dominio pseudo-concreto se transita al modelo matemático con apoyo de hipótesis explícitas e implícitas. En el dominio matemático se estudian los modelos, dando como consecuencia resultados matemáticos, que, al interpretarlos establecen resultados pseudo-concretos. Estos, a su vez, al validarlos y confrontarlos con la realidad, dan lugar a resultados reales, como generalizaciones y predicciones, que dan cuenta de la situación real en otro nivel. De esta forma dialogan los dominios real, pseudo-concreto y matemático para Rodríguez (2010).

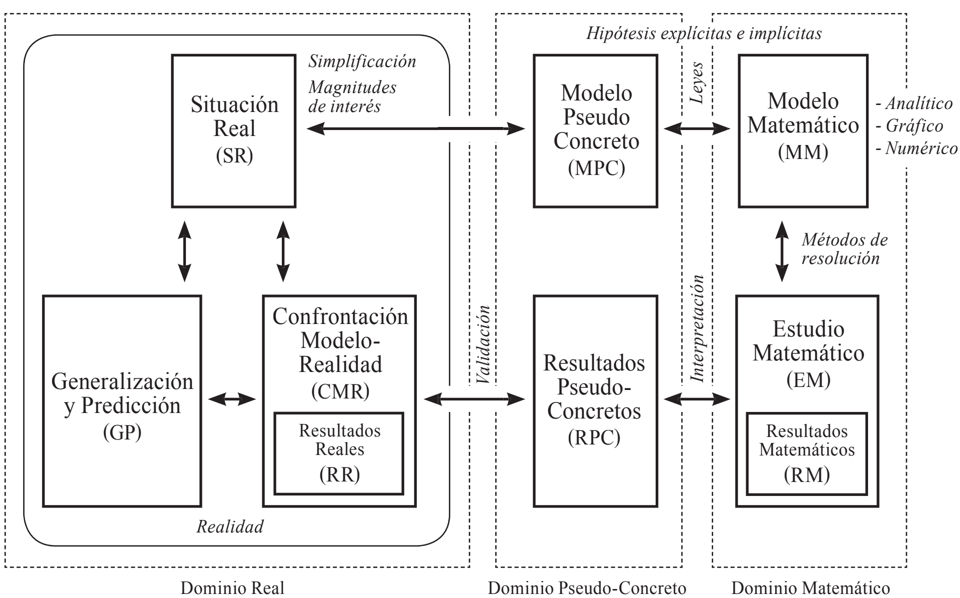


Figura 3. Ciclo de modelación de Rodríguez (2010)

En los casos de Biembengut y de Rodríguez se hace referencia explícita a una separación del mundo de la matemática y el real, que la modelación relaciona. Sus posiciones al respecto se permean por las situaciones de modelación que estudian. Por ejemplo, Rodríguez (2010) propone modelar un desfibrilador para situar la incorporación de modelos físicos.

En Cordero (2006) la evocación de la realidad no es explícita en su postura sobre la modelación y no presenta una caracterización explícita de lo que entiende como modelo. La mirada no está puesta en la relación entre lo modelado y el modelo. Las situaciones que propone dan cuenta de ello, por ejemplo, en la siguiente no se explicita qué es lo modelado y qué es el modelo.

> la actividad de la linealidad del polinomio consiste en formular una función con comportamiento tendencial. La construcción formula la tendencia y el patrón de comportamiento. El argumento consistiría en establecer relaciones entre una función polinómica y la ecuación de una recta, a través de determinar un comportamiento que tiende a otro comportamiento cuando *x* toma valores en un intervalo de cero, con ello el estudiante reconstruirá significados a las relaciones (Cordero, 2006, p. 69).

Diseño de situación de Modelación-Graficación: Variación de parámetros

Se propicia que el estudiante relacione la "gráfica completa" y la expresión analítica general a través de construirle significados a los coeficientes A, B, C y D.

Los procedimientos que se propician son:

1) mover la gráfica (traslaciones y transformaciones) para encontrar el patrón de comportamiento de la expresión analítica, y

2) Al variar los parámetros A, B C, y D, de la expresión analítica se identifican los patrones de comportamiento de la gráfica

Con este diseño de situación se espera que el estudiante construya argumentos de la función como una instrucción que organiza comportamientos

El estudiante formula propiedades de las funciones al realizar ajustes en una estructura para obtener un patrón deseado

$$Y = A\,[\,f\,(Bx + C)] - D$$

Figura 4. Diseño de situación de Modelación, graficación propuesta (Suárez y Cordero, 2008, p. 53)

Aparentemente no plantea la relación entre "la situación real" y el modelo. Sin embargo, deja entrever esta relación cuando señala "si usamos los graficadores y sensores como instrumentos de modelación, (…) la graficación sería anclada como un dominio de conocimiento, con el cual modelaríamos y simularíamos a través de situaciones reales o virtuales" (Cordero, 2006, p. 67).

En Suárez y Cordero (2008) el papel de lo modelado es más explícito. En el texto refieren a situaciones o fenómenos a modelar. Los autores establecen la relación entre situación y modelación en los siguientes términos: se plantea una situación, la que se describe a partir de la modelación con gráficas, se analiza a partir de las simulaciones de diversas características de la situación y se regresa a la situación como punto de partida, constituyendo un ciclo: "Al pasar por las etapas de modelación y simulación se propicia una perspectiva global y local de la situación de movimiento. El regreso constituye una resignificación de la situación" (Suárez y Cordero, 2008, p.57).

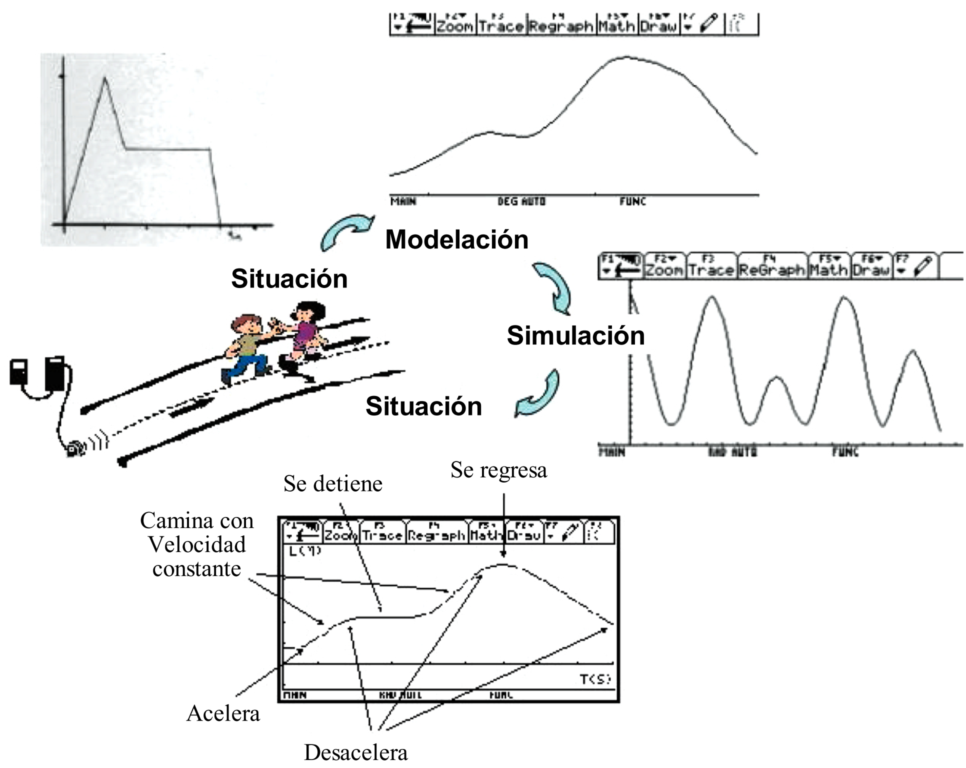


Figura 5. Ciclo situación - modelación - simulación - situación propuesta en Suárez y Cordero (2008, p. 57)

Las situaciones que plantean están en relación con ese ciclo: describir gráficamente el descenso de temperatura de un cuerpo, describir gráficamente el movimiento de un balón que cae libremente o que se tira verticalmente hacia arriba o que se tira verticalmente hacia abajo con rebote; describir gráficamente el movimiento de una persona que se aleja 500 metros de un punto de partida para regresar a él después de nueve minutos de recorrido, habiéndose detenido cuatro minutos durante el trayecto; describir gráficamente el movimiento de un elevador de un edificio habitacional a lo largo de un día de la semana.

Los autores establecen el binomio modelación-graficación para la construcción de conocimiento matemático en el salón de clases con un ambiente tecnológico, principalmente con el uso de sensores y calculadoras graficadoras.

Otro aspecto importante de la modelación en la escuela es la interacción con el fenómeno a modelar o la experimentación amplia. Al respecto Rodríguez (2010) establece que el tránsito de la situación real hacia el modelo pseudo-concreto es poco usual en el ambiente escolar. La autora resalta la importancia de la transición de la situación real hacia el modelo pseudo-concreto, desde un punto de vista didáctico, y enfatiza la importancia de la construcción del modelo pseudo-concreto adecuado para establecer posteriormente los modelos físicos y/o matemáticos que sean pertinentes a la problemática en cuestión.

Este énfasis en el tránsito de la situación real al modelo pseudo-concreto, ilustra la importancia que concede a la interacción con el fenómeno a modelar.

5. La modelación, el acto de modelar, el modelo y lo modelado

En este artículo se concibe a la modelación constituida por actividades recurrentes en diversas comunidades, en particular en las comunidades de profesionales.

Un cardiólogo escudriña gráficas para diagnosticar el estado de salud de sus pacientes, en lugar de observar su corazón directamente. Ésta es una práctica recurrente en su profesión.

Un ingeniero analiza gráficas del osciloscopio para determinar el funcionamiento de un componente electrónico. No puede “ver” directamente las corrientes, las resistencias u otras propiedades del dispositivo. Las gráficas del osciloscopio son un buen instrumento para el diseño y evaluación de los componentes.

El ingeniero pesquero examina tablas de datos de cultivos de fitoplancton y zooplancton para determinar los parámetros ambientales óptimos para la supervivencia y el desarrollo de los organismos. Este ingeniero no comprendería la evolución de poblaciones marinas u otras, sin el auxilio de los datos organizados.

El ingeniero civil calcula la flexión de una viga a partir de ecuaciones.

Una característica común de estas prácticas es que se interviene en una entidad a partir de otra. Se interviene en el corazón del paciente, en el componente electrónico, en la población de microrganismos y en una viga, a partir de gráficas, tablas de datos y ecuaciones. A esta característica común de estas prácticas le llamamos *el acto de modelar*. Este acto es un elemento que permite clasificar y discriminar, distinguiendo prácticas de modelación de las que no lo son. Decimos que el cardiólogo está modelando cuando analiza la salud del paciente a partir de una gráfica, o que el ingeniero en electrónica modela cuando lee la gráfica del osciloscopio para determinar si su componente es adecuado para los fines que lo diseñó.

La modelación es, entonces, una práctica de articulación de dos entes, para actuar sobre uno de ellos, llamado lo modelado, a partir del otro, llamado modelo. La intervención sobre lo modelado es diversa, por ejemplo, para la predicción, el diagnóstico y/o la evaluación.

El ente se convierte en modelo cuando el actor lo usa para intervenir en el otro ente, por lo que deviene en herramienta. Los entes matemáticos al modelar, son herramientas. Desde esta perspectiva el modelo no existe independiente de la actividad de quién modela.

La articulación de los entes iniciales da lugar a un nuevo ente, al modelo (mo), que resulta adherido a lo modelado (ma). Tal articulación constituye una nueva entidad para la vivencia de quien modela y que podemos denotar (ma, mo) y que nominamos *dipolo modélico* (DM). Por ejemplo, un electro para un niño de ocho años es un pedazo de papel con líneas. Para su padre es resultado de uno de los exámenes solicitados por el médico, pero que no le informa sobre la actividad de su corazón, pues no ha construido el DM (corazón, electro). El cardiólogo tiene un cierto nivel de acceso al corazón de su paciente, al leer una gráfica de su funcionamiento. El electro en la vivencia del niño cobra una naturaleza distinta que para el padre del niño y para el cardiólogo. Este último ha articulado la actividad del corazón con una gráfica: (corazón, electro). El DM es un ente que ni el niño, ni el padre han construido como el cardiólogo y, por tanto, son vivencias distintas. El cardiólogo modela, ellos no.

La naturaleza de la modelación radica en la potencia que imprime la articulación y la intencionalidad de intervenir. Esto implica la necesidad de interactuar con la entidad que se desea intervenir, es decir, la necesidad de la experimentación en sentido amplio. Sin embargo, la interacción con lo que se pretende modelar, no es suficiente para caracterizar a las prácticas de modelación, esta suficiencia se establece con el acto de articular dos entes con la intención de intervenir en uno a partir del otro.

El acto de modelar también proporciona elementos para analizar la configuración de las prácticas de modelación. En efecto, nos devela fases que componen a estas prácticas, distinguiendo las necesarias y las suficientes, las intencionalidades de las mismas y, en consecuencia, provee de un medio para caracterizar cuándo un actor modela.

La diversa índole de las entidades matemáticas nos permite contar con un amplio juego de modelos. Entre ellos se cuentan: ecuaciones o sistemas de ecuaciones algebraicas y/o diferenciales, gráficas cartesianas, trayectorias, formas geométricas, datos organizados en tablas, descripciones verbales y elementos proporcionados por la tecnología (tablas de datos en hojas de cálculo, gráficas o imágenes desde un sensor o un osciloscopio), entre otros.

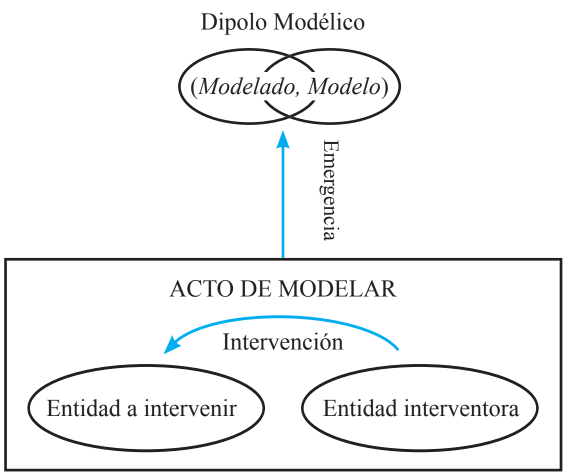


Figura 6. La modelación: El acto de modelar, el modelo, lo modelado y el dipolo modélico

El interés por el estudio de las prácticas de modelación de diversas comunidades, responde a la intención de construir diseños de aprendizaje basados en estas prácticas y con posibilidades de incorporarlas al aula de matemáticas. La "transferencia" de las prácticas de comunidades a la escuela no consiste en tomar lo que hacen los profesionistas de las comunidades y reproducirlo en el aula. No es posible reproducir las intencionalidades de las comunidades en el aula, ni ejercer la modelación con las mismas herramientas, ni justificar su actuar con los mismos argumentos. Las entidades con las que interactúan los profesionistas en el ejercicio de sus prácticas son diferentes a las entidades con las que se interactúa en la escuela. Lo que sí "trasportamos" al aula es el acto de modelar, el cómo se han logrado construir los dipolos modélicos.

Para que las prácticas de las comunidades puedan ser base de diseños de aprendizaje, éstas deben someterse a un proceso de deconstrucción. La deconstrucción de prácticas es un análisis exhaustivo de la práctica situada. Su interés está puesto en dilucidar las intenciones de los actores para hacer lo que hacen; entender los procesos que desarrollan, identificando las redes de prácticas que ejercen; distinguir las herramientas con las que actúan, materiales o no; y determinar los argumentos con que justifican su acción.

6. Un diseño de aprendizaje basado en la modelación lineal

Presentamos una experiencia ilustrativa de modelación con 18 estudiantes, de 15 años de edad, que cursaban el tercer grado de educación secundaria en México. Ellos participaron en la puesta en escena del diseño de aprendizaje "La elasticidad de los resortes", basado en la práctica de modelación que llamamos "numerización de fenómenos" (Arrieta, 2003). Esta práctica parte de datos numéricos, obtenidos de la interacción con el fenómeno, para establecer redes de modelos con el fenómeno.

El diseño de aprendizaje se elaboró siguiendo la Ingeniería Didáctica como metodología. El objetivo del diseño es que los estudiantes modelen linealmente la elasticidad de los resortes. En este caso el fenómeno, que será lo modelado, es la elasticidad de los resortes. Los estudiantes, mediante actividades, articulan con el fenómeno, tablas de datos, gráficas y fórmulas: estos serán los modelos.

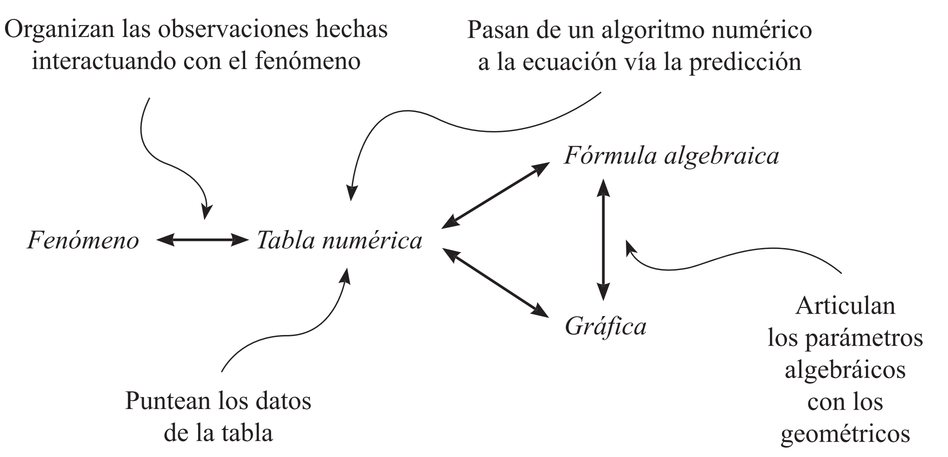


Figura 7. La numerización de los fenómenos

El diseño de aprendizaje está estructurado en cuatro fases, a saber, la interacción con el fenómeno -la experimentación en sentido amplio-, el acto de modelar, la articulación de redes de modelos con el fenómeno y la analogía. La dinámica del diseño considera el trabajo en equipo y la discusión de las propuestas obtenidas, para establecer consensos.

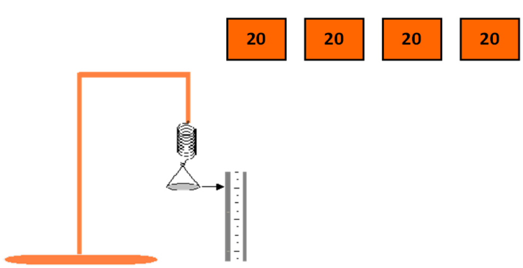
6.1. *Fase I. La interacción con el fenómeno, la experimentación*

La experimentación puede plantearse en tres ambientes. En el presencial los datos se obtienen desde la experimentación directa con el fenómeno; en el virtual, recurriendo a simulaciones del fenómeno con aplicaciones informáticas; y en el discursivo, cuando se recurre a la narración, desde la tabla inicial de datos, durante la experimentación. Cada modalidad de la experimentación trae consigo características propias que imprimen su huella en la forma de modelar. La experiencia de modelar, que se presenta a continuación, considera la experimentación discursiva.

En la experimentación discursiva, los estudiantes se encuentran con los datos y el planteamiento de una situación en lenguaje natural, que no siempre relacionan con el fenómeno a modelar. Emplean recursos discursivos para ligar los datos dados con la situación.

La situación inicial planteada

> Vamos a investigar la elasticidad de un resorte. Tenemos un soporte universal y un resorte colgando de él. En su extremo le colocamos un portapesas que contiene un indicador, una flechita que apunta a una regla y contamos con seis pesas de 20 gramos cada una. Entonces, colocando pesas y leyendo las posiciones de la flechita del portapesas, elaboramos una tabla.



Peso p	Posición del portapesas x
0	45
20	75
40	105
60	135
80	165
100	195
120	225

Figura 8. Planteamiento de la situación

La experimentación discursiva se desarrolla proponiendo tres actividades: a) describir el fenómeno con sus propias palabras; b) preguntar acerca de la posición del resorte cuando se coloca un peso que se da en la tabla; c) preguntar sobre el peso del portapesas si la posición del indicador es 135. Para responder estas últimas actividades basta con "leer" la tabla de datos. Se requiere ligar los datos con la situación planteada. Esta articulación la establecen discurriendo con sus compañeros.

Sin la interacción con el fenómeno no hay modelación, pero no basta interactuar con el fenómeno para modelar ¿Cuándo decimos: "los estudiantes están modelando"?

6.2. *Fase II. El acto de modelar, la predicción*

La predicción del fenómeno a partir de la tabla de datos es la actividad que articulará las dos entidades.

El diseño de aprendizaje plantea la situación:

> *Si colocamos 50 gramos ¿En qué posición estará la flechita del portapesas?*

Los estudiantes no "tienen" pesas de 10 gramos, no pueden colocar en el portapesas los 50 gramos que exige la situación. Tendrán que utilizar la tabla de datos para determinar lo que sucederá con el resorte en el arreglo experimental. En las actividades de la fase anterior bastaba con leer la tabla, ahora se requiere actuar desde la tabla para decir qué sucederá con el resorte.

Ante esta situación algunos estudiantes construyen un procedimiento de predicción que llamamos "método de puntos medios".

> *50 está a la mitad de 40 y 60 entonces la flechita debe de estar a la mitad de 105 y 135, o sea, en 120.*

Un estudiante advierte que, "para decir qué va a pasar con el resorte", se vale de otra cosa, de la tabla de datos. Este es un acto que caracteriza a la modelación. En este momento el estudiante utiliza la tabla de datos como un modelo del fenómeno, para responder a situaciones del fenómeno. Establece la articulación para intervenir en lo modelado. Un dipolo modélico (elasticidad de los resortes, tabla de datos) queda establecido por la articulación "predicción por puntos medios" - "DM1".

Al preguntar a un estudiante si la tabla es una representación de la elasticidad de los resortes, duda en un inicio y dice no. Al cuestionarle si es una representación de la función lineal, inmediatamente dice no. Entonces se pregunta: ¿qué es?, y él responde enfáticamente: ¡Una tabla de datos!

Para él la tabla de datos tiene materialidad, es una hoja donde están escritos datos numéricos, y la articula con el fenómeno para predecir sobre él. Ésta es una articulación entre dos entidades, no está enmarcada en la dualidad realidad/matemáticas o realidad/teoría.

Este DM1, apoyado en la forma de predecir que han construido los estudiantes, es muy básico. El diseño de aprendizaje plantea ahora una nueva situación, donde los estudiantes rompan con el DM1 y articulen las entidades con otra relación, con otra forma de predecir.

Si colocamos 38.7 gramos ¿En qué posición se encontrará la flechita?

Un equipo persiste en la estrategia de subdividir los 20 gramos, ahora en 4, en 10 o en 20. Sin embargo, tres equipos plantean diferentes formas de predicción. A continuación, presentamos dos episodios de la interacción de un equipo ante esta nueva situación.

Episodio 3. Siempre funciona la regla de tres

Maestro: *¿Si colocamos 38.7 gramos?*

(Con 38.7 gramos ya no es tan fácil utilizar el método anterior y la mayoría recurre a la regla de tres.)

Denisse: *Es 145.125 milímetros.*

...

Erika: *Sí, 20 es a 75 como 38.7 es a x. Entonces multiplicamos 75 por 38.7 y se divide por 20 y nos da 145.125 milímetros.*

Denisse: *¿El resultado no checa con los datos?*

Erika: *Sí, está bien.*

Denisse: *No, eso sí que está mal, ¡no puede rebasar a 105!*

Erika: *¿Por qué?*

Denisse: *Porque si pones 40 tienes 105; si pones menos peso no puede estirarse más el resorte.*

Fandila: *Entonces, ¿no funciona siempre la regla de tres?*

La tabla de datos indica 45mm cuando el portapesas no tiene peso. Esto hace que el uso de Erika de la regla de tres no le funcione. En esta situación los estudiantes rompen tanto con el "método de los puntos medios" como con el uso de la regla de tres de Erika, cuestionando la inercia que causa la "centración en la regla de tres". No solo no recurren al DM1, sino que niegan la posibilidad de conformar la articulación de las dos entidades por medio de la regla de tres.

El mismo equipo privilegia una forma de predecir: “el método de Leonel”.

Episodio 4. El método de Leonel

Leonel: *Miren, les voy a explicar mi teorema, ¿cuánto se estira con un gramo?*
Lety: 1.5
Leonel: *¡Ajá!*
Erika: *¿Por qué?*
…
Lety: *Mira Erika, estamos en 40 y son 75, y si pones 60 son 105, con 20 gramos se estira 30 milímetros con un gramo se estira 1.5 milímetros.*
Denisse: *O sea 20 entre 30, no, no, al revés 30 entre 20.*
Leonel: *Bueno ¿ya? Son 38.7 gramos. Multiplicar 1.5 por 38.7 y nos da... ¿Cuánto nos da, Leticia?*
Lety: *58.05*
Leonel: *Más 45 milímetros, nos da...*
Lety: *103.05*
…
Lety: *Encuentras cuánto se estira por cada gramo, y luego lo multiplicas por el peso, y le sumas donde empieza el portapesas y ya.*
Denisse: *¡Ajá! Dame un peso a ver si le entendí*
Lety: *26.7*
Denisse: *Se estira 1.5 por gramo, por 26.7 gramos, se estira* (hace operaciones con la calculadora) *40.05, y le sumo donde empezó el portapesas, queda 85.05.*
Lety: *Está bien.*

A partir de predecir las posiciones del indicador, los estudiantes construyen el algoritmo: *encuentras cuánto se estira por cada gramo, luego lo multiplicas por el peso, y le sumas donde empieza el portapesas.* La tabla de datos y la elasticidad de los resortes conforman un nuevo dipolo modélico, DM2, (elasticidad, tabla-razón de cambio), relacionados por el algoritmo planteado por Leonel.

Este algoritmo puede llevar a otro tipo de modelo, el algebraico. Ante la situación “Si preguntas por la posición del indicador al colocar un peso p”, aplican su algoritmo y responden p por 1.5 más 45. Más tarde, ante otra situación, proponen como modelo algebraico a $x = 1.5p + 45$. Sin embargo, hay una distancia entre el algoritmo establecido y el modelo algebraico.

La ecuación por sí misma no es un modelo. Lo es para ellos porque la usan para predecir el comportamiento del resorte. Los estudiantes han construido un modelo algebraico a partir de la predicción. El dipolo modélico que establecen es (elasticidad de los resortes, $x = 1.5p + 45$).

Hasta aquí, han articulado el fenómeno con una tabla de datos, constituyendo dipolos modélicos DM1 y DM2 (fenómeno, tabla de datos). Prediciendo a partir de ellos, han dado lugar al dipolo modélico DM3 ([fenómeno-tabla de datos]-ecuación).

El diseño plantea graficar los datos de la tabla y predecir. Los estudiantes proponen gráficas como la del equipo 2, en la figura 9. La situación que se plantea para construir un nuevo dipolo es la siguiente

Utilizando la gráfica ¿En qué posición se encuentra el portapesas si se colocan 64 gramos?

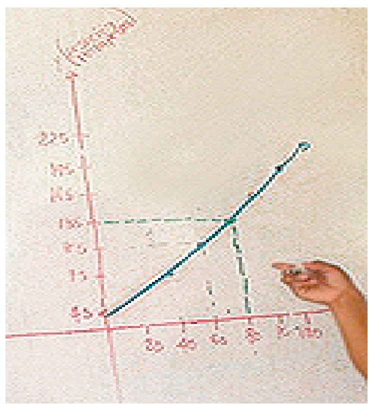


Figura 9. Modelo gráfico de la elasticidad del resorte del equipo 2

Los estudiantes del equipo 2 predicen la posición del indicador cuando el portapesas tiene 64 gramos, localizando en el eje de los pesos (la abscisa) el 64 y buscando la posición correspondiente del indicador en el eje *x* (de las ordenadas). Con esta acción dotan a la gráfica del carácter de modelo gráfico de la elasticidad del resorte. Constituyen así el dipolo modélico DM4 ([fenómeno-tabla de datos]- gráfica).

6.3. *Fase III. La articulación de los modelos y el fenómeno en una red*

En esta fase del diseño los estudiantes articulan los modelos entre sí y estos con el fenómeno, configurando una red, a la que llamamos *red de lo lineal.*

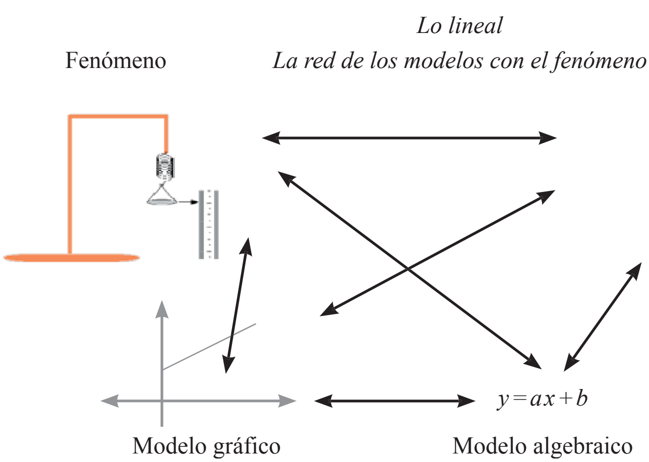
Con este objetivo se plantean situaciones como:

– Si el resorte es más elástico, más flojito o más duro, ¿cómo será la gráfica?
– Si modificamos la elasticidad del resorte, ¿qué es lo que cambia en la ecuación?
– ¿Qué cambiará en la tabla de datos?
– Cómo modifico el arreglo experimental, para que la recta esté más arriba o más abajo
– Si modifico la altura de la recta, ¿qué cambia en la fórmula o en la tabla?

Entre los consensos que levantan los actores, está el que la gráfica será “más vertical” si el resorte es más elástico y que lo que cambia en la tabla de datos -al modificar la elasticidad de un resorte-, “son los milímetros por gramo”, es decir, la razón de cambio. De este modo, articulan los modelos y el fenómeno en una *red de lo lineal*. Se muestran evidencias en el siguiente episodio, del equipo uno.

Episodio 5. Es hablar de lo mismo con diferentes palabras

Omar: *No nos vamos a dar cuenta de que es un modelo lineal hasta que hagamos la gráfica.*
Rubí: *Pero los datos van de 30, de 30, de 30...* (se refiere a la tabla).
Miguel: *Pero eso también lo podemos hacer conociendo la tabla nada más.*
Sarit: *Para saber si es lineal ya no hay necesidad de hacer esto* (señala la gráfica) *y esto* (señala la ecuación)
Omar: *¡Ajá!, es como hablar de lo mismo pero con diferentes palabras.*
Miguel: *Sí, puedes ver la ecuación o la gráfica o la tabla.*



Peso p	Posición del indicador x
0	45
20	75
40	105
60	135
80	165
100	195
120	225

Figura 10. La red de lo lineal

Los estudiantes construyen una red que articula la elasticidad del resorte con el coeficiente de la variable x del modelo algebraico, la inclinación de la recta y la razón de cambio $\frac{\Delta x}{\Delta p}$ de la tabla.

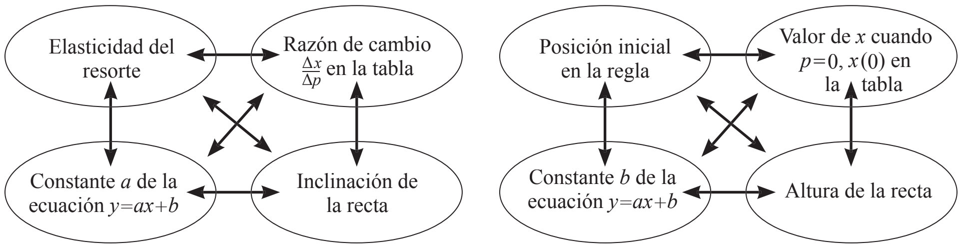


Figura 11. Redes que articulan la elasticidad del resorte o la posición de la regla con los parámetros de los modelos

Asimismo, los estudiantes construyen una red que articula la posición de la regla con el coeficiente independiente del modelo algebraico, y "la altura" de la recta y el valor x, cuando p es 0 en la tabla.

De esta forma, *lo lineal* se ha configurado con base en estas *redes que articulan fenómenos y modelos a través de prácticas.* La especificidad de la modelación de *lo lineal* corresponde a las redes de modelos que se ponen en funcionamiento.

6.4. *Fase IV. Descentrar la red del fenómeno vía la analogía*

Méndez (2008) relata cómo estudiantes, que construyen la red de lo lineal, modelando la elasticidad de un resorte, al intentar modelar con esa red otro fenómeno, como el del llenado de un estanque cilíndrico, tienen dificultades comparables a las que vivenciaron con la elasticidad del resorte. Así que la "transferencia" de esta modelación, al modelado del llenado de un estanque cilíndrico, no es inmediata. Los estudiantes construyeron la red de lo lineal anclada a la elasticidad del resorte. Para que esta red de modelos se use para modelar otros fenómenos, tendrá que descentrarse del fenómeno de origen. Es preciso modelar diferentes fenómenos con sus propias redes y articularlas vía la analogía. Esta red determina *lo propio* de cada fenómeno a la vez que los relaciona, identificando *lo distinto* y *lo semejante* entre los fenómenos en cuestión.

La experimentación con un resorte es de naturaleza distinta a la experimentación con el llenado de un estanque cilíndrico, constante el volumen de fluido entrante por unidad de tiempo. Con el resorte se ponen pesos, con el estanque se abre la llave, mientras que el "resorte baja", el "agua sube". Si bien las variables están ancladas a magnitudes, para los estudiantes la tabla de datos no es solo un agregado de números, sino que son elongaciones del resorte cuando se colocan cantidades de peso, o niveles de agua del estanque cuando se abre la llave. Para ellos "cuánto se estira el resorte por un gramo", no es lo mismo que "cuánto aumenta el nivel de agua en un segundo". Para los estudiantes se trata de dos razones de cambio diferentes y de formas de predicciones distintas, aún cuando para los expertos sean las mismas. Los modelos algebraicos y gráficos, tampoco son los mismos.

Mientras que la distinción radica en la naturaleza de cada fenómeno, las semejanzas radican en las características de sus dipolos modélicos y sus redes. La analogía es la articuladora de "redes de lo lineal".

No se ha construido *lo lineal* cuando se modela la elasticidad de un resorte para después aplicarlo al modelar el llenado de un estanque cilíndrico. Los estudiantes construyen dos redes, una para cada fenómeno, para luego, por la acción articuladora de la analogía, lograr una nueva entidad de *lo lineal*, no anclada en los fenómenos. Así, configuran *lo lineal* como una familia de redes asociadas a fenómenos análogos. Esto distingue a la modelación propuesta del enfoque que asume que modelar es aplicar matemáticas.

7. Conclusiones

Se presentó a la modelación como una práctica que articula entidades, para configurar otras nuevas. La articulación se establece al intervenir en una de las entidades desde la otra, proveyendo a la vivencia de quién modela, de una tercera y nueva entidad: el dipolo modélico.

Ilustramos cómo los actores construyen dipolos modélicos (*mo*, *ma*), mismos que se organizan en redes de modelos, asociados al fenómeno y articuladas por procedimientos.

Esta concepción de modelación propicia diseños de enseñanza y de aprendizaje que consideran a la modelación como medio y fin.

Para quien modela, el modelo emerge como tal cuando lo utiliza para intervenir en lo modelado, generando en ese mismo movimiento, un dipolo modélico. Los dipolos se modifican cuando la articulación cambia. El estudiante articula la tabla de datos con la elasticidad de un resorte cuando predice con puntos medios, obteniendo el primer dipolo (elasticidad, tabla). Éste cambia a un segundo dipolo (elasticidad, tabla-razón de cambio) cuando captura a la razón como herramienta de predicción.

La relatividad de los modelos, lo modelado y los dipolos modélicos, exige del análisis de las prácticas situadas. Éste requiere de elementos temporales y escénicos; da cuenta, tanto de cómo son y de cuándo emergen los modelos, lo modelado y los dipolos, como de la vivencia de quienes modelan.

Las nuevas entidades, los dipolos modélicos y las redes de dipolos, dan cuenta de una vivencia construida de los actores y ésta, a su vez, los hace diferentes, en tanto la modifican.

A modo de cierre se esquematizan elementos que caracterizan a la perspectiva de modelación, presentada en este artículo.

1. La gama de modelos como instrumentos para la modelación, es amplia.
2. Las intenciones de la modelación en el aula van más allá de la aplicación de las matemáticas. Se desplazan desde la modelación como herramienta didáctica, como construcción de conocimientos matemáticos, hasta valorar su ejercicio por sí misma.
3. No hay separación tajante entre "las matemáticas" y "el mundo real".
4. La relación entre modelo y modelado no es representacionista, es articuladora.
5. La experimentación amplia es necesaria más no suficiente para la modelación.
6. Caracteriza a la práctica de modelación el acto de modelar, siendo la articulación su actividad fundamental.
7. Modelos y lo modelado surgen en el ejercicio de la modelación. Esto implica la diferencia entre las dos entidades primarias y una tercera que emerge en la modelación, el dipolo modélico.
8. La intervención en una entidad a partir de otra es diversa, una de ellas es la predicción.
9. La potenciación de la articulación se plasma en las redes de dipolos modélicos.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? *Revista Iberoamericana de Educación, 43*, 85-101.

Arrieta, J. (2003). *La modelación como proceso de matematización en el aula* (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Distrito Federal, México.

Arrieta, J. y García, C. (2009). Un estudio del tratamiento de datos con ruido en los sistemas escolares. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 22, 429-440. Distrito Federal, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Biembengut, M. (2012). Concepções e Tendências de Modelagem Matemática na Educação Brasileira. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *7*(10), 195-204.

Biembengut, M. y Hein, N. (1997). Modelo, modelación y modelaje: métodos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", 38,* 209-222.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona, España: Gedisa.

Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, A. (1991). *En La vida diez en la escuela cero* (1era. ed.). Distrito Federal, México: Siglo Veintiuno. (*Na vida dez, na escola zero,* Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, A., 1988, São Paulo, Brasil: Cortez editora).

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica*, *20*(1), 59-79.

De Almeida, L. e Ferruzzi, E. (2009). Uma Aproximação Socioepistemológica para a Modelagem Matemática. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, *2*(2), 117-134.

Díaz Barriga, A. (2003). Currículum. Tensiones conceptuales y prácticas. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 5*(2), 81-93.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática*. São Paulo, Brasil: Ática.

D'Ambrosio, U. (2001). "What Is Ethnomathematics, and How Can it Help Children in Schools?" *Teaching Children Mathematics*, *7*(6), 308-310.

De Certeau, M. (2000) *La invención de lo cotidiano. I. Artes de hacer.* (2da. ed.). Distrito Federal, México: Universidad Iberoamericana.

Escareño, F. y López, O. L. (2007). *Matemáticas 2.* Distrito Federal, México: Trillas.

Freundental, H. (1981). Major Problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 133-150. doi: 10.1007/BF00305618

Galicia A., Díaz L. y Arrieta J. (2011). Práctica social de modelación del ingeniero bioquímico: Análisis microbiológico. En CIAEM (Ed.), *Anais do XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Recuperado de http://www.lematec.no-ip.org/CDS/XIIICIAEM/index.html?info_type=fulllist&lang_user=en

Heidegger, M. (1999). *El ser y el tiempo.* Distrito Federal, México: Fondo de Cultura Económica.

Landa, L. (2008). *Diluciones seriadas y sus herramientas, una práctica de estudiantes de ingeniería bioquímica al investigar la contaminación del río de la Sabana*, (Tesis de maestría no publicada). Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México.

Lave, J. (1988). *Cognition in Practice: Mind, mathematics, and culture in everyday life*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Méndez, M. (2008). *Un estudio de la evolución de la práctica: La experiencia de modelar linealmente situaciones análogas* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México.

Rivera, M. (2005). *La algoritmia: una práctica social de las comunidades de ingenieros en sistemas computacionales* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México.

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13* (4), 191-210.

Romo A. y Oktaç, A. (2007) Herramienta metodológica para el análisis de conceptos matemáticos en el ejercicio de la ingeniería. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10* (1), 117-143.

Secretaría de Educación Pública (2011). Plan de estudios 2011, Educación Básica. Recuperado de http://basica.sep.gob.mx/reformasecundaria/doc/programas/2011/plan_estudios_2011_web.pdf

Secretaría de Educación Pública (sf). *El Perfil del Egresado en la Educación Media Superior.* Recuperado de http://www.reforma-iems.sems.gob.mx/work/sites/riems/resources/LocalContent/171/1/trip_egresado_altares.pdf

Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 3*(1), 51–58.

Teresi, D. (2003). *Lost Discoveries: The Ancient Roots of Moderns Science – from the Babylonians to the Maya*. Nueva York, Estados Unidos: Simon & Schuster.

Trejo, M. (2008). *Hacia una deconstrucción de las prácticas: las técnicas Bromatológicas* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México.

Ulloa, J. (2013). *Las prácticas de modelación y la construcción de lo exponencial en comunidades de profesionales: un estudio socioepistemológico* (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, Distrito Federal, México.

Walkerdine, V. (1988). *The Mastery of Reason.* Londres, Inglaterra: Routledge.

Autores

Jaime Arrieta Vera. Universidad Autónoma de Guerrero, México. jaime.arrieta@gmail.com

Leonora Díaz Moreno. Universidad de Valparaíso, Chile. leonora.diaz@uv.cl