Nexo Revista Científica
Vol. 20, No. 01, pp. 13 – 18 / Junio 2007

ISSN 1818-6742
Impreso en Nicaragua
www.uni.edu.ni/Nexo

Desarrollo tipo Taylor de la derivada $k-$ésima de la delta de Dirac soportada en $(x-a)$

M. García, M.A. Aguirre

NuCOMPA-Facultad de Ciencias Exactas, UNICEN
Paraje Arroyo Seco s/n, 7000. Tandil, Argentina
e-mail: {mgarcia, maguirre}@exa.unicen.edu.ar

Resumen

Sea Z el espacio de las funciones cuya transformada de Fourier son elementos del espacio D, donde Z esta definido en ([1],pag.198) y D en ([3]). Consideremos la derivada de orden k de la delta de Dirac soportada en (x-a), $\delta^{(k)}(x-a)$.En este trabajo se obtiene un desarrollo en serie tipo Taylor de $\delta^{(k)}(x-a)$. Estos desarrollos pueden ser utilizados para el estudio de productos de convolución y productos multiplicativos usando transformadas generalizadas.

1. Introducción

La Teoría de funciones generalizadas siempre ha estado presente en los desarrollos de diversas ramas de la matemática.
En cierto modo ellas ya habían sido usadas por los físicos en ciertos desarrollos no muy formales que resultaban sumamente largos.
Las primeras funciones generalizadas fueron introducidas por P. Dirac en sus clásicos papers (1927) donde empleó heurísticamente su famosa función delta δ que surge como una necesidad en el campo de la teoría cuántica. Sin embargo, objetos de la forma $\delta^2, \delta.\delta', \ldots$ los cuales fueron desarrollados en esta teoría no tenían un fuerte rigor matemático. Surge así el problema no trivial de como multiplicar funciones generalizadas.
S. L. Sobolev (1936) da una interpretación de funciones generalizadas como distribuciones, esto es, funcionales lineales y continuas sobre un espacio apropiado de funciones, en conexión con problemas de ecuaciones diferenciales lineales parciales.
La teoría de distribuciones toma un carácter formal cuando aparece el trabajo de Laurent Schwartz (" *Theorie des Distributions" 1950/51)* quien introduce formalmente varios espacios de distribuciones dotándolos de un carácter topológico.
La teoría de los espacios de Sobolev y las distribuciones a la manera de Schwartz constituyen las herramientas principales para el estudio de problemas lineales y no lineales en la física-matemática.
La teoría de las distribuciones leda un sentido riguroso a lo que heurísticamente se venía usando como función δ de Dirac y para algunos otros objetos, sin

embargo el problema del producto de tales objetos permanece sin resolverse. La falta de multiplicación y otras deficiencias dentro de la teoría de distribuciones fueron descubiertas poco después de su creación. En 1954, Schwartz provó la imposibilidad del producto de dos distribuciones arbitrarias, con lo cual reafirma la situación que el problema de la multiplicación es insalvable. Esta teoría no fue suficientemente completa para resolver todos los problemas vinculados con las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales lineales con coeficientes suaves, tal como se puede mostrar en el trabajo de H. Lewy donde se construye un ejemplo de una ecuación diferencial con coeficientes suaves, la cual no tiene solución, y también en las extensiones lineales de los espacios de distribuciones, donde plantean situaciones similares, por ejemplo en el espacio de hiperfunciones de Sato, P. Schapira encontró una ecuación sin solución.
La situación cambió a finales del 70 y al comienzo de 1980, cuando fue creada la teoría no lineal de funciones generalizadas conteniendo a las distribuciones, mencionamos entre otros los trabajos de E.E. Rosinger (*Distributions and nonlinear partial differential equations, 1978, Nonlinear partial differential equations, 1980,* entre otros) en los cuales se desarrolla una teoría general de álgebra de funciones generalizadas y donde se estudian ecuaciones diferenciales parciales no lineales. En 1982, Jean Francois Colombeau (*"Elementary Introduction to New Generalized Functions"* 1985, [5]), introduce un álgebra diferencial de nuevas funciones generalizadas $\mathcal{G}(\Omega)$ con las siguientes propiedades: $\mathcal{G}(\Omega)$ contiene el espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(\Omega)$ como un subespacio lineal, derivadas parciales en $\mathcal{G}(\Omega)$ extienden correspondientes derivadas usuales en $\mathcal{D}'(\Omega)$, el espacio $C^{\infty}(\Omega)$ de todas las funciones infinitamente diferenciables es un subalgebra en $\mathcal{G}(\Omega)$,y el álgebra $\mathcal{G}(\Omega)$ es invariante bajo operaciones no lineales uniformes de polinomios que crecen en el infinito.
Esta es la mejor situación para el álgebra diferencial de funciones generalizadas conteniendo distribuciones, aunque la imposibilidad de multiplicar distribuciones mencionada anteriormente no se resuelve completamente, pero esta teoría de Colombeau de funciones generalizadas abre nuevas posibilidades para encontrar solución a varias clases de problemas de ecuaciones diferenciales no lineales.
Los desarrollos de distribuciones dependientes de un parámetro determinan aproximaciones que sirven para la búsqueda de darle sentido a producto de distribuciones. Algunos productos se obtienen utilizando desarrollos tipo Taylor y desarrollos tipo Laurent.
Sea $\mathcal{D}$ es el espacio de funciones infinitamente diferenciables a soporte compacto ([1], pag. 195). Para una función de prueba $\phi \in \mathcal{D}$, definimos la distribución f asociada a ϕ, por medio de,

$$\langle f(x), \phi(x)\rangle = \int f(x)\ \phi(x)\ dx \tag{1}$$

El espacio de las distribuciones definidas sobre $\mathcal{D}$, lo denominamos con $\mathcal{D}$', también llamado espacio dual de $\mathcal{D}$.
Dentro de este contexto vamos a considerar la función delta de Dirac concentrada en a, con a real,

$$\langle \delta(x-a), \phi(x)\rangle = \phi(a) \qquad ([4], \text{pag. } 44) \tag{2}$$

2. Propiedades de las distribuciones

Para lograr nuestro propósito debemos tener en cuenta ciertas propiedades de las distribuciones.

$$\langle f(-x), \phi(x) \rangle = \langle f(x), \phi(-x) \rangle \qquad ([4], \text{ pag. } 49) \tag{3}$$

$$\langle f(x+c), \phi(x) \rangle = \langle f(x), \phi(x-c) \rangle \qquad ([4], \text{ pag. } 50) \tag{4}$$

$$\left\langle \delta^{(k)}(x), \phi(x) \right\rangle = (-1)^k \left\langle \delta(x), \phi^{(k)}(x) \right\rangle \qquad ([4], \text{ pag. } 51) \tag{5}$$

3. Distribuciones de rápido decrecimiento en el infinito

Las distribuciones de rápido decrecimiento en el infinito son de fundamental importancia en el estudio de los desarrollos asintóticos de funciones generalizadas. Sea S el espacio de Schwartz ([3]), espacio de las funciones de rápido decrecimiento en el infinito y sea S' su dual el espacio de ditribuciones temperadas, llamadas así a todas las distribuciones generadas por funciones del espacio S dadas por la relación (1). Dentro de este espacio vamos a definir el momento de orden p de una función $\mu_p(\varphi) = \mu_p$ por

$$\mu_p = \int_0^\infty \varphi(x)\, x^p dx\ , \qquad \forall \varphi \in S \tag{6}$$

4. Desarrollos tipo Taylor para distribuciones

Sea $\mathcal{Z}$ el espacio de todas las funciones cuya transformada de Fourier son elementos de $\mathcal{D}$ ([1], pag. 198).
Con $\mathcal{Z}'$ denotamos el espacio dual de $\mathcal{Z}$. Definimos a $\mathcal{Z}'$ como el espacio de las ultradistribuciones, funcionales lineales y continuas sobre el espacio $\mathcal{Z}$ ([1], pag.198).
Sea $\phi \in \mathcal{Z}$, definimos la ultradistribución T_f asociada a una función localmente integrable f, de acuerdo a ([1], pag. 199) por,

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \phi(y)\, dy \tag{7}$$

De acuerdo con Estrada-Kanwal ([4], pag. 89) acerca de la Teoría Distribucional de Desarrollos Asintóticos, toda función uniforme $\varphi(x)$ alrededor de $x \in \Re$, admite un desarrollo de Taylor :

$$\varphi(x+\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} \varepsilon^n \qquad \varepsilon \to 0 \tag{8}$$

donde el signo "$\sim$" significa desarrollo asintótico en el sentido descrito en ([4], pag. 5, 8 y 9).

Por dualidad si T es una función generalizada en alguno de los espacios $\mathcal{D}', \mathcal{E}'$ o $\mathcal{S}'$, entonces tenemos el siguiente desarrollo asintótico de Taylor

$$T(x+\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{(n)}(x)}{n!} \varepsilon^n \qquad \varepsilon \to 0 \qquad ([4], \text{pag. } 89) \tag{9}$$

La interpretación de (9) en el sentido distribucional es la siguiente

$$\langle T(x+\varepsilon), \phi(x) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle T^{(n)}(x), \phi(x) \rangle}{n!} \varepsilon^n + O\left(\varepsilon^{n+1}\right) \quad \varepsilon \to 0 \quad ([4], \text{pag. } 89) \tag{10}$$

para alguna función de prueba $\phi(x)$.
Supongamos la distribución $T(x) = \delta(x)$ (Delta de Dirac) , entonces de la relación (9) se tiene,

$$\delta(x+\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^{(n)}(x)}{n!} \varepsilon^n \qquad \varepsilon \to 0 \qquad ([4], \text{pag. } 89) \tag{11}$$

Por otro lado, si $\varphi \in \mathcal{Z}$, su transformada de Fourier $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}$, lo cual implica que $y^k \hat{\varphi}(y)$ también pertenece a $\mathcal{D}$. Por tanto,

$$\varphi^{(k)}(z) = \mathcal{F}^{-1}\left\{(iy)^k \hat{\varphi}(y)\right\} \in \mathcal{Z} \qquad ([1], \text{pag. } 195, \text{ fórmula } 9) \tag{12}$$

Sean k y m enteros no negativos se verifica,

$$\left| y^m \varphi^{(k)}(y) \right| \leq C_{k,m} \qquad y \in \mathbb{R} \tag{13}$$

5. Teorema

Para toda $\varphi \in \mathcal{Z}$ vale el siguiente desarrollo tipo Taylor

$$\delta^{(k)}(x-a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} a^{\nu}}{\nu!} \delta^{(k+\nu)}(x) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$

con $a \in \mathbb{R}$. En particular para $a = 1$ se verifica el siguiente desarrollo,

$$\delta^{(k)}(x-1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} \delta^{(k+\nu)}(x) \tag{15}$$

Demostración:
De (4) y (5) se tiene,

$$\left\langle \delta^{(k)}(x-a), \varphi(x) \right\rangle = \left\langle \delta(x), (-1)^k \varphi^{(k)}(x+a) \right\rangle \tag{16}$$

Dado que $\varphi \in \mathcal{Z}$, entonces es una función entera y admite un desarrollo de Taylor de la forma,

$$\varphi(x+\alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\nu}}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x) \qquad ([1], \text{pag. } 201) \tag{17}$$

que converge para toda a.
De aquí se deduce que si $k = 0, 1, 2, \ldots$ entonces las derivadas de la función $\varphi \in \mathcal{Z}$ admiten el siguiente desarrollo,

$$\varphi^{(k)}(x+\alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\nu}}{\nu!} \varphi^{(\nu+k)}(x) \tag{18}$$

De (16) y (17) se tiene,

$$\begin{aligned} \left\langle \delta^{(k)}(x-a), \varphi(x) \right\rangle &= \left\langle \delta^{(k)}(x), \varphi(x+a) \right\rangle \\ &= \left\langle \delta(x), (-1)^{k} \varphi^{(k)}(x+a) \right\rangle \end{aligned} \tag{19}$$

Reemplazando el desarrollo de Taylor (18) en (19) se tiene,

$$\begin{aligned} \left\langle \delta^{(k)}(x-a), \varphi(x) \right\rangle &= (-1)^{k} \left\langle \delta(x), \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\alpha^{\nu}}{\nu!} \varphi^{(\nu+k)}(x) \right\rangle \\ &= (-1)^{k} \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\alpha^{\nu}}{\nu!} \left\langle \delta(x), \varphi^{(\nu+k)}(x) \right\rangle \end{aligned} \tag{20}$$

Aplicando (5) en (20)

$$\begin{aligned} \left\langle \delta^{(k)}(x-a), \varphi(x) \right\rangle &= (-1)^{k} \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\alpha^{\nu}}{\nu!} (-1)^{\nu * k} \left(\delta^{(\upsilon * k)}(x), \varphi(x) \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^{\nu} \alpha^{\nu}}{\nu!} \left(\delta^{(\upsilon * k)}(x), \varphi(x) \right) \end{aligned} \tag{21}$$

De (21) se deduce que,

$$\delta^{(k)}(x-a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} a^{\nu}}{\nu!} \delta^{(k+\nu)}(x) \tag{22}$$

Que es lo que queríamos probar.
En particular si $a = 1$ obtenemos la fórmula (15).
Problemas abiertos asociados a la fórmula obtenida en este trabajo, están vinculados con productos de convolución y productos multiplicativos. Entre los trabajos más recientes en el tema podemos señalar:

Referencias

[1] Zemanian A. H. *Distribution Theory and Transform Analysis* . Mc Graw Hill Book Company. New York 1965.

[2] Choquet- Bruhat Y.- *Distributions theorie et problemes*- Masson et Cie. Editeurs. (1973).

[3] Schwartz Laurent - *Theorie des distributions*- Hermann, París, 1973.

[4] Estrada R. - Kanwal R. - *Asymtotic Analysis: A Distributional Approach* -Birkhäuser - Boston.Basel.Berlín - 1994

[5] Colombeau Jean F. - *Elementary Introduction to New Generalized Functions*- North-Holland Mathematical Studies, N°113, North-Holland, New York. 1985.