Nexo Revista Científica

Vol. 20, No. 01, pp. 35 – 45 / Junio 2007

ISSN 1818-6742
Impreso en Nicaragua
www.uni.edu.ni/Nexo

Nuevas fórmulas acerca del residuo de la distribución $P_{\pm}^{\gamma}$

M.A. Aguirre*, L. Mercado†

*NuCOMPA-Facultad de Ciencias Exactas, UNICEN
Paraje Arroyo Seco s/n, 7000. Tandil, Argentina
e-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar

†Dirección de Investigación, Universidad Nacional de Ingeniería (UNI). Managua, Nicaragua.
e-mail: luisa.mercado@usr.uni.edu.ni

Abstract

Se sabe que el residuo de la familia de funciones distribucionales $P_{\pm}^{\gamma}$ existe en los puntos $\gamma = -k, k = 1, 2, ..$ y $\gamma = -\frac{n}{2} - s, s = o, 1, 2, ...$ ([1],páginas 253-266) y ([4],páginas 34-36), donde $P_{\pm}^{\gamma}$ están definidas por las fórmulas (2) y (9).Usando las condiciones $k \geq \frac{n}{2} - 1$ y $l \geq \frac{n}{2} - 1$, en este trabajo se obtienen una nueva fórmula para

$$\mathrm{Re}\, s_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} P_{\pm}^{\lambda}$$

cuando p y q son ambos pares y también cuando ambos son impares. Como consecuencia de esta nueva fórmula se obtienen formulas para $\mathrm{Re}\, s_{\lambda=-\frac{n}{2}-k}(P + i0)^{\lambda}$, $R_{-2k}(u)$ y $R_{-2k}(u) * R_{-2l}(u)$ para μ para, ν par, $k \geq \frac{n}{2} - 1$, $l \geq \frac{n}{2} - 1$ y $\mu + \nu = n$ dimensión del espacio, donde $(P + i0)^{\lambda}$ está definida por (63), $R_{\alpha}(u)$ es la familia de funciones distribucionales debido a Y. Nozaki ([7]) y está definida por la fórmula(68).

1 Introdución

La teoría de distribuciones es una herramienta fundamental para las aplicaciones de los Métodos de la matemática aplicados a la Ingeniería. Este trabajo esta enmarcado dentro de la teoría de distribuciones especialmente la teoría de distribuciones dependientes de un parámetro. En téminos generales se extienden

*Este trabajo está parcialmente soportado por la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (C.I.C.), Argentina.

†Proyecto de Investigación de la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI), Nicaragua.

resultados que aparecen el libro de I.M.Gelfand and G.E. Shilov.,Generalized Functions,Vol.I,(ver ([1]). Los resultados que se van a desarrollar contribuyen a extender fórmulas vinculadas con las singulariudades de la familia de funciones distribucionales definidas en(2) que son introducidas en([1]). Además de extender resultados vinculados con el núcleo de Y. Nozaki definido por la fórmula(68), nuestros resultados permitan estudiar productos de distribuciones del tipo $\delta^{(k)}(P).\delta^{(l)}(P)$ utilizando el concepto de residuo de P_+^λ en sus puntos singulares.

Sea $x = (x_1, x_2, ...x_n)$ un punto en en el espacio $n-$dimensional Euclideano R^n.

Consideremos una forma cuadrática en n variables definida por

$$P = P(x) = x_1^2 + ...x_p^2 - x_{p+1}^2 ... - x_{p+q}^2 \tag{1}$$

donde $p + q = n$ es la dimensión del espacio.

Llamamos $\varphi(x)$ la función C^∞ con soporte compacto definido de R^n a R.

De([1]),pagina 253, formula (2)) la distribución P_+^λ es definido por

$$\left(P_+^\lambda, \varphi\right) = \int_{P>0} (P(x))^\lambda \varphi(x) dx \tag{2}$$

donde λ es un número complejo y $dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$. Para la parte Real$(\lambda) \geq 0$, la integral definida en (2) converge y es una función analítica de λ. La prolongación analítica para la Real$(\lambda) < 0$ puede ser usada para extender la definición de $\left(P_+^\lambda, \varphi\right)$ .Más aún de ([1],page 254),se tiene,

$$\left(P_+^\lambda, \varphi\right) = \int_0^\infty u^{\lambda + \frac{p+q}{2} - 1} \ {}_q\Phi_\lambda(u) du \tag{3}$$

donde

$${}_q\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{4} \int_0^\infty t^{\frac{q-2}{2}} (1-t)^\lambda \phi_1(u, tu) dt \tag{4}$$

$$\phi(r, s) = \phi_1(u, v) \tag{5}$$

$$\phi(r, s) = \int \varphi d\Omega_p d\Omega_q, \tag{6}$$

$$r = \sqrt[2]{x_1^2 + ...x_p^2} \ , \tag{7}$$

$$s = \sqrt[2]{x_{p+1}^2 + ...x_{p+q}^2} \ , \tag{8}$$

$d\Omega_p$ *y* $d\Omega_q$ son los elementos de área de la superficie en la esfera unitaria en R^py R^q respectivamente.

Similarmente podemos también definir la función generalizada P_-^λ por

$$(P_-^\lambda, \varphi) = \int_{-P>0} (-P(x))^\lambda \varphi(x) dx \tag{9}$$

Más aún se obtiene la siguiente expresión

$$(P_-^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty v^{\lambda + \frac{p+q}{2} - 1} \ {}_p\Phi_\lambda(v) dv \tag{10}$$

donde

$${}_p\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{4} \int_0^\infty t^{\frac{p-2}{2}} (1-t)^\lambda \phi_1(vt, v) dt. \tag{11}$$

De(1) la hipersuperficie $P = 0$ es un is a hypercone con un punto singular (el vértice) en el origen.

Por otra parte, de([1],page 249),se tiene,

$$\left(\delta^{(k)}(P), \varphi\right) = \int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial}{2s\partial s} \right)^k \left\{ s^{q-2} \frac{\phi(r,s)}{2} \right\} \right]_{s=r} r^{p-1} dr \tag{12}$$

y

$$\left(\delta^{(k)}(P), \varphi\right) = (-1)^k \int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial}{2r\partial r} \right)^k \left\{ r^{p-2} \frac{\phi(r,s)}{2} \right\} \right]_{r=s} s^{q-1} ds \tag{13}$$

donde $\phi(r,s)$ es definida por la ecuación(6).

También de([1]),page250),las funciones generalizadas $\delta_1^{(k)}(P)$ y $\delta_2^{(k)}(P)$ son definidas por

$$\left(\delta_1^{(k)}(P), \varphi\right) = \int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial}{2s\partial s} \right)^k \left\{ s^{q-2} \frac{\phi(r,s)}{2} \right\} \right]_{s=r} r^{p-1} dr \tag{14}$$

y

$$\left(\delta_2^{(k)}(P), \varphi\right) = (-1)^k \int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial}{2r\partial r} \right)^k \left\{ r^{p-2} \frac{\phi(r,s)}{2} \right\} \right]_{r=s} s^{q-1} ds \tag{15}$$

donde $\phi(r,s)$ es $r^{1-p}s^{1-q}$ multiplicada por la integral de φ sobre la superficie $x_1^2 + x_2^2 + ... x_p^2 = r^2$ y $x_{p+1}^2 + x_{p+2}^2 + ... x_{p+q}^2 = s^2$.

Las integrales(14) y (15) convergen y coinciden para

$$k < \frac{p+q-2}{2}. \tag{16}$$

Si, por otra parte,

$$k \geq \frac{p+q-2}{2} \tag{17}$$

esas integrales deben entenderse en el sentido de la regularización(ver([1],page 250)). Ahora en general $\delta_1^{(k)}(P)$ y $\delta_2^{(k)}(P)$ pueden no ser la misma función generalizada.

Note que la definicion de esas funciones generalizadas implica que en cualquier caso

$$\delta_2^{(k)}(P) = (-1)^k \delta_1^{(k)}(-P). \tag{18}$$

De([1],página278), las siguientes fórmulas son válidas,

$$\delta^{(k)}(P_+) = (-1)^k k! \operatorname{Re} s_{\lambda=-k-1} P_+^{\lambda} \tag{19}$$

and

$$\delta^{(k)}(P_-) = (-1)^k k! \operatorname{Re} s_{\lambda=-k-1} P_-^{\lambda} . \tag{20}$$

donde con la abreviatura $\operatorname{Re} s$ se indica Residuo en el sentido clásisco ò usual de la variable compleja.

Por otra parte, de([1],página278), para n impar, y también para n par pero con la condición $k < \frac{n}{2} - 1$ se tiene,

$$\delta^{(k)}(P_+) = \delta_1^{(k)}(P) = \delta^{(k)}(P) \tag{21}$$

y

$$\delta^{(k)}(P_-) = \delta_1^{(k)}(-P). \tag{22}$$

En el caso de dimensión par y bajo la condición $k \geq \frac{n}{2} - 1$

$$\delta^{(k)}(P_+) - \delta_1^{(k)}(P) \tag{23}$$

y

$$\delta^{(k)}(P_-) - \delta_1^{(k)}(-P) \tag{24}$$

son funciones generalizadas concentradas en el vértice del cono $P = 0$ ([1],página279).

De([1],página279), se tiene:

Si p y q son ambos pares y si $k \geq \frac{n}{2} - 1$,entonces

$$(-1)^k \delta^{(k)}(P_+) - \delta^{(k)}(P_-) = a_{q,n,k} L^{k+1-\frac{n}{2}} \{\delta(x)\} \tag{25}$$

mientras que en todos los otros casos vale que

$$\delta^{(k)}(P_-) = (-1)^k \delta^{(k)}(P_+) \quad . \tag{26}$$

En (25)

$$a_{q,n,k} = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{4^{k-\frac{n}{2}+1}(k - \frac{n}{2} + 1)!} \tag{27}$$

y L^j es un operador diferencial lineal homogéneo iterado j veces definido de la siguiente forma:

$$L^j = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \right\}^j . \tag{28}$$

El operador $L = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \right\}$ es con frecuencia llamdo ultrahiperbólico.

De([1],página255), $\left(P_+^\lambda, \varphi\right)$ dos conjuntos de singularidades a saber

$$\lambda = -1, -2, -3, \ldots \tag{29}$$

y

$$\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} - 1, \ldots \tag{30}$$

y de([1],páginas256-269 y página352),se tiene,

$$\operatorname{Re} s_{\lambda=-k-1} P_+^\lambda = \frac{(-1)^k}{k!} \delta_1^{(k)}(P) \text{ si } p \text{ es par y } q \text{ impar}, \tag{31}$$

$$\operatorname{Re} s_{\lambda=-k-1} P_+^\lambda = \frac{(-1)^k}{k!} \delta_1^{(k)}(P) \text{ si } p \text{ es impar y } q \text{ par}, \tag{32}$$

$$\operatorname{Re} s_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} P_+^\lambda = 0 \text{ si } p \text{ es par y } q \text{ impar} \tag{33}$$

y

$$\operatorname{Re} s_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k! \Gamma(\frac{n}{2}+k)} L^k \left\{ \delta(x \right\} \text{ si } p \text{ es impar y } q \text{ par}. \tag{34}$$

Donde L^k es el operador ultrahiperbólico iterdao k-veces definido por la fórmula(28).

Similarmente $\left(P_-^\lambda, \varphi\right)$ tiene singularidades en los mismos puntos que $\left(P_+^\lambda, \varphi\right)$ y tomando en cuenta todo lo que hemos expresado con respecto a P_+^λ también son propiedades que valen para P_-^λ excepto que deben intercambiarse p y q en todas las expresiones y en todas las fórmulas deben reemplazarse $\delta_1^{(k)}(P)$ por

$$\delta_1^{(k)}(-P) = (-1)^k \delta_2^{(k)}(P) \tag{35}$$

y (L) por $(-L)$ (confrontar con([1],pages279 and 352)), tomando en cuenta todas las aclaraciones anteriormente expresadas se deducen las siguientes fórmulas,

$$\operatorname{Re} s_{\lambda=-k-1} P_-^\lambda = \frac{(-1)^k}{k!} \delta_1^{(k)}(-P) \text{ si } p \text{ es impar y } q \text{ par}, \tag{36}$$

$$\operatorname{Re} s_{\lambda=-k-1} P_-^\lambda = \frac{(-1)^k}{k!} \delta_1^{(k)}(-P) \text{ si } p \text{ es par y } q \text{ impar}, \tag{37}$$

$$\operatorname{Re}s_{\lambda=-\frac{n}{2}-k}P_{-}^{\lambda}=0 \text{ si } p \text{ es impar y } q \text{ par} \tag{38}$$

y

$$\operatorname{Re}s_{\lambda=-\frac{n}{2}-k}P_{-}^{\lambda}=\frac{(-1)^{\frac{p}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^{k}k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)}(-L)^{k}\left\{\delta(x\right\} \text{ si } p \text{ es par y } q \text{ impar.} \tag{39}$$

Si la dimensión n del espacio es par, p y q pares, P_{+}^{λ} tiene polos simples en $\lambda=-\frac{n}{2}-k$,donde k es un entero no negativo y el residuo está dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}s_{\lambda=-\frac{n}{2}-k,k=0,1,2,..}P_{+}^{\lambda}=\tfrac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+k)}\delta_{1}^{(\frac{n}{2}+k-1)}(P)+\\+\tfrac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^{k}k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)}L^{k}\left\{\delta(x\right\}\end{aligned} \tag{40}$$

ver([1],página268),donde L^{k} es definbido por la fórmula(28).

Si, por otra parte, p y q son impares, P_{+}^{λ} tiene polos de orden dos en $\lambda=-\frac{n}{2}-k$ y de([1],página 269),se tiene

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}s_{\lambda=-\frac{n}{2}-k}P_{+}^{\lambda}=\tfrac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+k)}\delta_{1}^{(\frac{n}{2}+k-1)}(P)+\\+\tfrac{(-)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{2^{2k}k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)}.\\\left[\psi(\tfrac{p}{2})-\psi(\tfrac{n}{2})\right].L^{k}\left\{\delta(x)\right\},\end{aligned} \tag{41}$$

donde

$$\psi(x)=\frac{\Gamma^{'}(x)}{\Gamma(x)}. \tag{42}$$

y $\Gamma(x)$ es la función gama definida por

$$\Gamma(x)=\int_{0}^{\infty}e^{-z}z^{x-1}dz. \tag{43}$$

Para enteros y para valores fraccionarios el argumento de la función $\psi(x)$ está dado por

$$\psi(k)=-\gamma+1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{k-1}\quad, \tag{44}$$

$$\psi(k+\frac{1}{2})=-\gamma-2\ln(2)+2\left(1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2k-1}\right)\quad, \tag{45}$$

donde γ es la constante de Euler.

Similarmente

$$\operatorname{Re} s_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} P_{-}^{\lambda} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+k)} \delta_1^{(\frac{n}{2}+k-1)}(-P) + \tag{46}$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{p}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k! \Gamma(\frac{n}{2}+k)} (-L)^k \{\delta(x\} \text{ si } p \text{ y } q \text{ son impares.}$$

y

$$\operatorname{Re} s_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} P_{-}^{\lambda} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+k)} \delta_1^{(\frac{n}{2}+k-1)}(-P) +$$

$$+ \frac{(-)^{\frac{p+1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1}}{2^{2k} k! \Gamma(\frac{n}{2}+k)}. \tag{47}$$

$$\left[\psi(\tfrac{q}{2}) - \psi(\tfrac{n}{2})\right] (-L)^k \{\delta(x)\} \text{ si } p \text{ y } q \text{ son impares.}$$

De(40),(41),(46) y (47) sabemos que el residuo de $P_{\pm}^{\lambda}$ existe en $\lambda = -\frac{n}{2} - s, s = 0, 1, 2, \ldots$.

Considerando como condiciones esenciales $k \geq \frac{n}{2} - 1$ y $l \geq \frac{n}{2} - 1$, en este trabajo se obtiene una nueva fórmula para

$$\operatorname{Re} s_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} P_{\pm}^{\lambda}$$

cuando p y q son ambos pares y también cuando p y q son ambos impares. Como consecuencia de estas fórmulas se obtiene fórmulas nuevas para la familia de funciones distribucionales $R_{-2k}(u)$ y para el producto de convolución $R_{-2k}(u) * R_{-2l}(u)$ para μ par, ν para, $k \geq \frac{n}{2} - 1$, $l \geq \frac{n}{2} - 1$ where $\mu + \nu = n$(dimensión del espacio),$R_{\alpha}(u)$ es la familia de funciones distribucionales debido a Y. Nozaki ([7]) y está definida por las fórmula(68).

Para obtener nuestros resultados necesitamos las siguientes fórmulas:

$$\delta_1^{(k)}(P) = A_{k,p,q} L^{k-\frac{n}{2}+1} \delta \tag{48}$$

si p y q son pares y $k \geq \frac{n}{2} - 1$([2])

$$\delta_1^{(k)}(P) = B_{k,p,q} L^{k-\frac{n}{2}+1} \{\delta(x)\} \text{ para } p \text{ y } q \text{ impares y } k \geq \frac{n}{2} - 1 \tag{49}$$

([2]),

$$\delta_1^{(k)}(P) - \delta_2^{(k)}(P) = C_{k,p,q} L^{k-\frac{n}{2}+1} \{\delta(x)\} \text{ para } p \text{ y } q \text{ pares y } k \geq \frac{n}{2} - 1 \tag{50}$$

([3],página 94,fórmula 63),

$$\delta_1^{(k)}(P) - \delta_2^{(k)}(P) = D_{k,p,q} L^{k-\frac{n}{2}+1} \{\delta(x)\} \text{ para } p \text{ y } q \text{ impares y } k \geq \frac{n}{2} - 1 \tag{51}$$

([3],página 94,fórmula 64),where

$$A_{k,p,q} = \frac{(-2)(-1)^k (-1)^{\frac{q}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{4^{k-\frac{n}{2}+1}(k - \frac{n}{2} + 1)!} \text{ para } p \text{ y } q \text{ pares y } k \geq \frac{n}{2} - 1 \tag{52}$$

([2]) y

$$B_{k,p,q} = \frac{2(-1)^{k-1}(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^{k-\frac{n}{2}+1}(k-\frac{n}{2}+1)!}$$
$$\left[\psi(\tfrac{p}{2}) - \psi(\tfrac{n}{2})\right].L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} \tag{53}$$

([2]), donde

$$C_{k,p,q} = \frac{(-1)(-1)^k(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^{k-\frac{n}{2}+1}(k-\frac{n}{2}+1)!} \text{ para } p \text{ y } q \text{ pares,} \tag{54}$$

$$D_{k,p,q} = \frac{(-1)^k(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^{k-\frac{n}{2}+1}(k-\frac{n}{2}+1)!}.$$
$$\left[\psi(\tfrac{q}{2}) - \psi(\tfrac{n}{2})\right].L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} \text{ para } p \text{ y } q \text{ impares.} \tag{55}$$

Nosotros podemos observar de (48),(49),(50) y (51) que las siguientes fórmulas son válidas

$$\delta_2^{(k)}(P) = C_{k,p,q}L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} \text{ para } p \text{ y } q \text{ pares y } k \geq \frac{n}{2} - 1 \tag{56}$$

y

$$\delta_2^{(k)}(P) = E_{k,p,q}L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} \text{ para } p \text{ y } q \text{ impares y } k \geq \frac{n}{2} - 1, \tag{57}$$

donde $C_{k,p,q}$ está definida por (54) y

$$E_{k,p,q} = \frac{(-1)^{k-1}(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^{k-\frac{n}{2}+1}(k-\frac{n}{2}+1)!}.$$
$$\psi(\tfrac{p}{2}) + \psi(\tfrac{q}{2}) - 2\psi(\tfrac{n}{2}) \tag{58}$$

2 Resultados principales

De las fórmulas (40),(41),(46) and (47) y aplicando las fórmulas (48),(49),(56) y (57) nosotros obtenemos las nuevas fórmulas siguientes:

$$\operatorname{Re} s_{\lambda=-\frac{n}{2}-k}P_+^\lambda = \frac{(-1)(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)} \text{ para } p \text{ y } q \text{ pares y } k \geq \frac{n}{2} - 1, \tag{59}$$

$$\operatorname{Re} s_{\lambda=-\frac{n}{2}-k}P_+^\lambda = \frac{(-1)(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^k k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)}$$
$$\left[\psi(\tfrac{p}{2}) - \psi(\tfrac{n}{2})\right].L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} \quad \text{para } p \text{ y } q \text{ impares y } k \geq \tfrac{n}{2} - 1, \tag{60}$$

$$\operatorname{Re} s_{\lambda=-\frac{n}{2}-k}P_-^\lambda = \frac{2(-1)^k(-1)^{\frac{p}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)}L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} \text{ para } p \text{ y } q \text{ pares y } k \geq \frac{n}{2}-1 \tag{61}$$

and

$$\operatorname{Re} s_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} P_-^{\lambda} = \frac{(-1)(-1)^k(-1)^{\frac{p+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^k k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)}$$
$$\left[\psi(\tfrac{p}{2})-\psi(\tfrac{n}{2})\right].L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} \quad \text{for } p \text{ and } q \text{ odd and } k \geq \tfrac{n}{2}-1, \tag{62}$$

3 Aplicaciones de Fórmulas básicas

Usando la fórmula

$$(P \pm i0)^{\lambda} = P_+^{\lambda} + e^{\pm\lambda\pi i} P_-^{\lambda} \tag{63}$$

([1],página276) y usando las nuevas fórmulas(59) y (61) nosotros obtenemos las siguientes fórmulas

$$\operatorname{Re} s_{\lambda=-\frac{n}{2}-k}(P+i0)^{\lambda} = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)} L^k\{\delta(x)\} \text{ para } p \text{ y } q \text{ pares y } k \geq \frac{n}{2}-1. \tag{64}$$

La fórmula(64) aparece en([6],page 192) y en ([1], page 276).

Similarmente de(63) y usando las fórmulas(61) y (62) nosotros obtenemos las siguientes fórmulas

$$\operatorname{Re} s_{\lambda=-\frac{n}{2}-k}(P+i0)^{\lambda} = 0 \text{ para } p \text{ y } q \text{ impares and } k \geq \frac{n}{2}-1. \tag{65}$$

La fórmula (65) aparece en ([1],página 278).

Por otra parte, nosotros sabemos de([4],páginas143,147) que las siguientes fórmulas son válidas

$$R_{-2k}(u) = \frac{k!(-1)^k}{2^{-2k-1}\pi^{\frac{n}{2}}(-1)(-1)^{\frac{\mu}{2}}}.$$
$$\left[\delta_1^{(\frac{n}{2}+k-1)}(u) + \frac{(-1)^{\frac{\nu}{2}}\square^k\delta}{4^k k!(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}\right] \tag{66}$$

si μ es par y ν es par ([4],página143,fórmula 2.41) y

$$R_{-2k}(u) = (-1)\square^k\delta \tag{67}$$

si μ y ν son impares ([4],página147,fórmula 2.57). Donde $R_\alpha(u)$ es la familia de distribuciones debido a Y. Nozaki ([7]) y es definida de la siguiente forma

$$R_\alpha(u) = \begin{cases} \frac{u^{\frac{\alpha-n}{2}}}{k_n(\alpha)} & \text{if } x \in \Gamma_+ \\ 0 \text{ if } x \notin \Gamma_+, \end{cases} \tag{68}$$

$$u = u(x) = x_1^2 + ...x_\mu^2 - x_{\mu+1}^2 ... - x_{\mu+\nu}^2,$$

$\mu+\nu = n$ dimensión del espacio, α es un número complejo, Γ_+ designa el interior de un cono

$$\Gamma_+ = \{x \in R^n : x_1 > o, u > o\},$$

$$\square^k = L^k$$

es definido por la fórmula(28) y la constantante $k_n(\alpha)$ está definida por la fórmula

$$k_n(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{\alpha-n+2}{2})\Gamma(\frac{1-\alpha}{2})\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\frac{\alpha-\mu+2}{2})\Gamma(\frac{-\alpha+\mu}{2})}. \tag{69}$$

Ahora usando la nueva fórmula(59) y tomando en cuenta las propiedades

$$\lim_{\alpha\to-2k} k_n'' = \frac{2^{-2k-1}\pi^{\frac{n}{2}}(-1)(-1)^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(k+1)(-1)^k} \tag{70}$$

([4],página142,fórmula 2.38) y usando la fórmula

$$\operatorname{Re} s_{\alpha=-2k}\Gamma(\frac{\alpha-n+2}{2}) = \frac{2}{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}(\frac{n}{2}+k-1)!}, \tag{71}$$

se tiene

$$R_{-2k}(u) = \lim_{\alpha\to-2k} R_\alpha(u) = \frac{\operatorname{Re} s_{\alpha=-2k} u^{\frac{\alpha-n+2}{2}}}{\operatorname{Re} s_{\alpha=-2k}\Gamma(\frac{\alpha-n+2}{2})} . \lim_{\alpha\to-2k} \frac{1}{k_n''} \quad =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}(\frac{n}{2}+k-1)!}{2}\left[\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+k)}\delta_1^{(\frac{n}{2}+k-1)}(u) + \frac{(-1)^{\frac{\nu}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}\square^k\delta}{4^k k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)}\right]. \tag{72}$$

$$. \lim_{\alpha\to-2k} \frac{1}{k_n''(\alpha)}.$$

Donde si μ es es par,

$$k_n(\alpha) = \Gamma(\frac{\alpha-n}{2}+1)\acute{k}(\alpha)$$

([4], páginas136-137) y

$$\acute{k}(\alpha) = \frac{2^{\alpha-1}\pi^{\frac{n}{2}}(-1)(-1)^{\frac{\mu}{2}}}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})\cos\frac{\alpha}{2}\pi}$$

([4],página142).

Ahora usando las fórmulas(48),(52) y usando la fórmula(70), de(72) nosotros obtenemos la siguiente fórmula

$$R_{-2k}(u) = (-1)\square^k\delta \tag{73}$$

si μ y ν son pares y $k \geq \frac{n}{2}-1$.

Por otra parte usando la propiedad

$$L^{k-(\frac{n}{2})+1}\{\delta\} * L^{l-(\frac{n}{2})+1}\{\delta\} = L^{k+l-(\frac{n}{2})+1-(\frac{n}{2})+1}\{\delta\} \tag{74}$$

donde con el símbolo $*$ nosotros significamos la operación de convolución y el operador L^j está definido por la fórmula(28), la cual aparece en([5],página346, fórmula (5.3)) bajo las condiciones:

i) n para

ii) k entero no-negativo tal que $k \geq \frac{n}{2} - 1$, se tiene

$$L^t\{\delta\} * L^s\{\delta\} = L^{t+s}\{\delta\} \tag{75}$$

para t y s enteros no negativos.

De(73),usando(75) y considerando que

$$\Box^k = L^k$$

nosotros obtenemos la siguiente propiedad:

$$R_{-2k}(u) * R_{-2l}(u) = (-1)(-1)\Box^k\delta * \Box^k\delta = \Box^{k+l}\delta = (-1)R_{-2(k+l)}(u) \tag{76}$$

para μ par, ν par, $k \geq \frac{n}{2} - 1$, $l \geq \frac{n}{2} - 1$ y $\mu + \nu = n$ dimensión del espacio.

References

[1] I.M.Gelfand and G.E. Shilov.,Generalized Functions,Vol.I, Academic Press, New York,1964.

[2] M.A.Aguirre T. Proportionality of k-th derivative of Dirac delta in hypercone, Mathematica Balkanica, Vol.14 (2000), Book 3-4, pp.253-263, 200, Bulgariam Academic of Science

[3] M.A.Aguirre T.relations of k-th derivative of Dirac delta in hypercone operator, Teoría y Aplicaciones, Vol.6, Nro.2, pp.87-95,1999, Costa Rica

[4] M.A.Aguirre T., The distributional hankel Transform of Marcel Riesz's Ultrahyperbolic kernel, STUDIES APPLIED MATHEMATICS, Vol. 93, pp.133-162, 1994

[5] M.Aguirre T., The distribution $\delta^{(k)}(P \pm i0 - m^2)$,Journal of Computational and Applied Mathematics 88 (1977),pp.339-348

[6] A.González Domínguez., On some Heterodox Distributional Multiplicative Products, Revista de la Unión Matemática Argentina,Vol.20, 1980

[7] Y. Nozaki.,On Riemann-Liouville integral of ultra-hyperbolic type, Kodai Mathematical Seminar Reports, 6(2):69-87 (1964)