Nexo Revista Científica
Vol. 20, No. 01, pp. 26 – 34 / Junio 2007

ISSN 1818-6742
Impreso en Nicaragua
www.uni.edu.ni/Nexo

Descomposición de ciertas representaciones polinomiales de S_n

J.O. Araujo, J.J. Bigeón, L.B. Fernández

NuCOMPA-Facultad de Ciencias Exactas, UNICEN
Paraje Arroyo Seco s/n, 7000. Tandil, Argentina
e-mail: {araujo, jbigeon, lfernan}@exa.unicen.edu.ar

Resumen

En este trabajo damos una demostración simple de la descomposición de ciertas representaciones polinomiales del grupo simétrico basadas en la parametrización de sus representaciones irreducibles desarrollada en [2].

1. Notaciones y definiciones generales

Sea K un cuerpo de característica 0, V el espacio vectorial K^n, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de V y $\{x_1, \ldots, x_n\}$ la base de V^* dual a $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Denotemos por $\mathcal{A}$ al anillo de polinomios $K[x_1, \ldots, x_n]$ y por $End_K(\mathcal{A})$ al anillo de homomorfismos $K-$lineales de $\mathcal{A}$.

Definición 1.1. *A la $K-$subálgebra de $End_K(\mathcal{A})$ generada por los operadores de multiplicación x_i (con $1 \leq i \leq n$) y los operadores diferenciales $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ (con $1 \leq i \leq n$), la llamaremos el álgebra de* operadores diferenciales $K-$lineales *y la denotaremos por $\mathcal{W}$.*

Observemos que $\mathcal{W} = K\langle x_1, ..., x_n, \partial_1, ..., \partial_n\rangle$ donde hemos colocado los símbolos $\langle\rangle$ para indicar que los generadores no conmutan, es decir $\partial_i x_i = 1 + x_i\partial_i$ para cada $1 \leq i \leq n$. Como es usual, para cada $i \geq 0$ sea $\mathcal{A}_i$ los polinomios homogéneos en $K[x_1, \ldots, x_n]$ de grado i.

Sea $\mathbb{I}_n = \{1, \ldots, n\}$ y $\mathcal{M}_n$ el conjunto de funciones $\alpha : \mathbb{I}_n \to \mathbb{N}_0$, donde $\mathbb{N}_0$ denota al conjunto de enteros no-negativos. Un elemento de $\mathcal{M}$ lo llamaremos un *multi-índice* y notaremos con $\alpha_i = \alpha(i)$ y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Dados dos multi-índices $\alpha, \beta \in \mathcal{M}_n$ usamos la siguiente notación:

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad \alpha! = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i, \quad \binom{\alpha}{\beta} = \beta! \prod_{i=1}^{n} \binom{\alpha_i}{\beta_i},$$
$$x^\alpha = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \quad \text{y} \quad \partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}}.$$

Proposición 1.2. *Cada elemento D de $\mathcal{W}$ se escribe de modo único como una suma finita*

$$D = \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{M}_n} c_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial^\beta$$

con $c_{\alpha,\beta} \in K$.

Demostración [3] Proposition 1.2.

Definición 1.3. *Sea $\{\mathcal{W}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ la $\mathbb{Z}-$graduación en $\mathcal{W}$ dada por*

$$\deg(D) = \max_{\alpha, \beta \in \mathcal{M}_n | c_{\alpha,\beta} \neq 0} \{|\alpha| - |\beta|\}$$

para cada $D \in \mathcal{W}$ no nulo.

Sea V un $KG-$módulo fiel, entonces la acción natural de G en V^* dada por

$$(g \cdot \varphi)(v) = \varphi\left(g^{-1} \cdot v\right) \qquad \varphi \in V^*, v \in V, g \in G \tag{1}$$

se extiende a una acción de G en $\mathcal{A}$ dada por

$$(g \cdot p)(v) = p\left(g^{-1} \cdot v\right) \qquad p \in \mathcal{A}, v \in V, g \in G$$

de modo tal que la acción de cada elemento de G en $\mathcal{A}$ es un homomorfismo de $K-$álgebras. Es decir, para cada $\alpha \in \mathcal{M}_n$ y $g \in G$

$$g \cdot x^\alpha = (g \cdot x_1)^{\alpha_1} \cdots (g \cdot x_n)^{\alpha_n}$$

Entonces tenemos una acción de G en $End_K(\mathcal{A})$ dada por

$$(g \cdot D)(p) = g \cdot \left(D\left(g^{-1} \cdot p\right)\right) \qquad p \in \mathcal{A}, D \in End_K(\mathcal{A}), g \in G$$

Dado $p \in \mathcal{A}$, sea $l_p \in End_K(\mathcal{A})$ dado por

$$l_p(q) = pq \qquad q \in \mathcal{A}$$

Además sea $[g_\mathcal{C}]$ la matriz de g en la base canónica $\mathcal{C}$ de V, es decir

$$g \cdot e_i = \sum_{j=1}^{n} [g_\mathcal{C}]_{ji} e_j$$

Proposición 1.4. *Con las notaciones anteriores, si $g \in G$ entonces*
i) para cada $p \in \mathcal{A}$,

$$g \cdot l_p = l_{g \cdot p}$$

ii) para cada i, $1 \leq i \leq n$,

$$g \cdot \partial_i = \sum_{k=1}^{n} [g]_{k,i} \partial_k$$

Demostración [1], pag. 37.
Por lo tanto la acción de G en $End_K(\mathcal{A})$ se restringe a una acción en $\mathcal{W}$. Sea $\mathcal{I}_G$ la $K-$subálgebra de los elementos $G-$invariantes de $\mathcal{W}$, es decir

$$\mathcal{I}_G = \{D \in \mathcal{W} \mid g \cdot D = D, \forall g \in G\}$$

Sea

$$\mathcal{I}_G^- = \{D \in \mathcal{I}_G \mid \deg(D) < 0\}$$

y $\mathcal{N}_G$ el subespacio de $\mathcal{A}$ dado por

$$\mathcal{N}_G = \left\{p \in \mathcal{A} \mid D(p) = 0, \forall D \in \mathcal{I}_G^-\right\}$$

Teorema 1.5. *$\mathcal{N}_G$ es de dimensión finita y todo $KG-$módulo irreducible es un constituyente de $\mathcal{N}_G$.*

Demostración [1] Theorem 2.3.

2. Representaciones de $\mathcal{S}_n$ en anillos de polinomios

En esta sección vamos a realizar una parametrización para las representaciones irreducibles de $\mathcal{S}_n$, utilizando el teorema 1.5. Por simplicidad denotaremos por $\mathcal{N}$ en lugar de $\mathcal{N}_{\mathcal{S}_n}$.
A este fin consideremos la representación de permutación de $\mathcal{S}_n$ en K^n, es decir

$$\sigma \cdot e_i = e_{\sigma(i)} \qquad \sigma \in \mathcal{S}_n, 1 \leq i \leq n$$

Entonces la acción anterior induce la acción natural sobre $(K^n)^*$ dada por

$$\sigma \cdot x_i = x_{\sigma(i)} \qquad \sigma \in \mathcal{S}_n, 1 \leq i \leq n \tag{2}$$

El grupo simétrico $\mathcal{S}_n$ actúa sobre $\mathcal{M}_n$ por

$$\sigma \cdot \alpha = \alpha \circ \sigma^{-1} \qquad \sigma \in \mathcal{S}_n, \alpha \in \mathcal{M}_n \tag{3}$$

Esta acción induce un homomorfismo natural de $\mathcal{S}_n$ en $Aut(\mathcal{A})$, dado por

$$\sigma\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{M}_n} \lambda_\alpha x^\alpha\right) = \sum_{\alpha\in\mathcal{M}_n} \lambda_\alpha x^{\sigma\alpha} \qquad \lambda_\alpha \in K, \sigma \in \mathcal{S}_n$$

Definición 2.1. *Sea $\mathcal{O}$ el espacio de las órbitas de $\mathcal{S}_n$ en $\mathcal{M}_n$ para la acción dada por (3). Si $\alpha, \beta \in \mathcal{M}_n$ pertenecen a la misma órbita, diremos que α y β son equivalentes y lo denotaremos por $\alpha \sim \beta$.*

Para cada $\gamma \in \mathcal{O}$ definimos

$$\mathcal{S}_\gamma = \left\{\sum_{\alpha\in\gamma} a_\alpha x^\alpha : a_\alpha \in K\right\}$$

Observamos que $\mathcal{S}_\gamma$ es entonces un $K\mathcal{S}_n-$módulo.

Definición 2.2. *Dados $\gamma, \mu \in \mathcal{O}$ diremos que son* equivalentes *y lo denotaremos por $\gamma \sim \mu$ si existe una biyección $\varphi : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ tal que*

$$\mu = \{\varphi \circ \alpha : \alpha \in \gamma\}$$

Definición 2.3. *Dado $\gamma \in \mathcal{O}$ diremos que γ es $n-$*minimal *si para toda μ tal que $\mu \sim \gamma$, es $|\gamma| \leq |\mu|$.*

Las órbitas $n-$minimales se caracterizan completamente con el siguiente lema.

Lema 2.4. *Si $\gamma \in \mathcal{O}$, entonces*
i) γ es $n-$minimal si y sólo si existe un entero no negativo h tal que

$$\mathrm{Im}(\alpha) = \{0, \ldots, h-1\} \qquad \forall \alpha \in \gamma$$

y

$$\left|\alpha^{-1}(i)\right| \geq \left|\alpha^{-1}(i+1)\right| \qquad 0 \leq i < h-1$$

ii) Existe una única clase $n-$minimal equivalente a γ.

Demostración [2] Proposition 2.4.
Si $\gamma \sim \mu$ y φ es una biyección como en la definición 2.2, definimos el operador $\partial_\gamma^\mu \in \mathcal{W}$ por

$$\partial_\gamma^\mu = \frac{1}{\mu!} \sum_{\alpha \in \gamma} x^\alpha \partial^{\varphi \circ \alpha}$$

Este operador tiene las siguientes propiedades.

Proposición 2.5. *Con las notaciones anteriores*
i) $\partial_\gamma^\mu \in \mathcal{I}_{\mathcal{S}_n}$
ii) $\partial_\gamma^\mu : \mathcal{S}_\mu \to \mathcal{S}_\gamma$ es un isomorfismo de $K\mathcal{S}_n-$módulos.

Demostración [2] Proposition 2.1.
Como consecuencia de esta proposición tenemos la siguiente descomposición de $\mathcal{N}$.

Corolario 2.6. $\mathcal{N} = \bigoplus_{\gamma\ n-minimal} \mathcal{N} \cap \mathcal{S}_\gamma.$

Demostración [2] Corollary 2.3.
Para cada $A \subseteq \mathbb{I}_n$, si $A = \{l_1, \ldots, l_r\}$ con $l_1 \leq \ldots \leq l_r$, definimos

$$e_{\beta|A} = \det\left[x_{l_j}^{\beta_{l_i}}\right]$$

Definición 2.7. *Sea $\gamma \in \mathcal{O}$ y $\alpha \in \gamma$ diremos que una partición $\mathcal{P} = \{I_k\}$ de $\mathbb{I}_n$ es una $\alpha-$partición si las restricciones $\alpha\ |_{I_k}$de α a cada I_k son $|I_k|-$minimales e inyectivas. Sea $\mathcal{F}_\alpha$ el conjunto de $\alpha-$particiones y para cada $\mathcal{P} \in \mathcal{F}_\alpha$ definimos*

$$e_P = \prod_k e_{\alpha|I_k}$$

Además sea

$$\delta_\alpha = \sum_{\mathcal{P}\in\mathcal{F}_\alpha} e_{\mathcal{P}}$$

Definimos $\partial \in \mathcal{I}^{-}_{\mathcal{S}_n}$ dado por

$$\partial = \sum_{i=1}^{n} \partial_i$$

y para cada $\gamma \in \mathcal{O}$, sea $\mathcal{S}^o_\gamma$ el subespacio de $\mathcal{S}_\gamma$ definido por:

$$\mathcal{S}^o_\gamma = \{P \in \mathcal{S}_\gamma : \partial(P) = 0\}$$

Observamos que al igual que $\mathcal{S}_\gamma$, $\mathcal{S}^o_\gamma$ es también un $K\mathcal{S}_n-$módulo.

Teorema 2.8. *Sea $\gamma \in \mathcal{O}$ una órbita $n-$minimal y $\alpha \in \gamma$, entonces*
i) $\delta_\alpha \neq 0$.
ii) el $K\mathcal{S}_n-$módulo generado por δ_α: $\langle\delta_\alpha\rangle$ es irreducible.
iii) $\mathcal{S}^o_\gamma = \mathcal{N}\cap\mathcal{S}_\gamma = \langle\delta_\alpha\rangle$.
iv) El conjunto $\{\mathcal{N}\cap\mathcal{S}_\gamma\}_{\gamma\ n-minimal}$ es un conjunto completo de representaciones irreducibles de $\mathcal{S}_n$.

Demostración Corolario 2.6 y [2] Theorem 4.2.

3. La descomposición de $\mathcal{S}_\gamma$

Definición 3.1. *Diremos que $\gamma \in \mathcal{O}$ es una órbita de tipo 0^k1^{n-k} para algún k, $0 \leq k \leq n$ si γ es la órbita a la cual pertenece el multi-índice α_k dado por*

$$\alpha_k(j) = \begin{cases} 0 & si\ 1 \leq j \leq k \\ 1 & si\ k < j \leq n \end{cases}$$

Además, si $\gamma \in \mathcal{O}$ es una órbita de tipo 0^k1^{n-k} y π es la biyección $\pi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ dada por

$$\pi(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 1 \\ 1 & \text{si } j = 0 \\ j & \text{si } j \neq 0, 1 \end{cases}$$

entonces la órbita de tipo $0^{n-k}1^k$, que denotaremos por $\pi \circ \gamma$, es equivalente a γ.

Dado

$$I = \{i_1, \ldots, i_r\}$$

definimos

$$x^I = \prod_{s=1}^{r} x_{i_s}$$

y para cada l, $0 \leq l \leq r$

$$e_l\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\right) = \sum_{J \subset I, \sharp J = l} x^J$$

y por $\sharp J$ indicamos al cardinal de J. Observamos, por simple inspección del término

$$\prod_{s=1}^{r-1} x_{i_s}$$

que si $l = 0$,

$$\partial e_0\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\right) = 0$$

y si $l > 0$

$$\partial e_l\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\right) = (r - l + 1)\, e_{l-1}\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\right)$$

Teorema 3.2. *Si $\gamma \in \mathcal{O}$ es una órbita del tipo $0^k 1^{n-k}$ y para cada j, $0 \leq j \leq n$, $\mu_j \in \mathcal{O}$ es una órbita del tipo $0^j 1^{n-j}$ entonces*
i) si $2k \geq n$

$$\mathcal{S}_\gamma = \bigoplus_{j=k}^{n} S^o_{\mu_j}$$

ii) Si $2k < n$

$$\mathcal{S}_\gamma = \bigoplus_{j=n-k}^{n} S^o_{\mu_j}$$

Demostración Lo demostraremos recursivamente.
Si $k = n$

$$\mathcal{S}_\gamma = \langle 1 \rangle = \mathcal{S}^o_\gamma$$

Sea $k < n$. Si $2k < n$, $\pi \circ \gamma \sim \gamma$ y además $\pi \circ \gamma$ es $n-$minimal. Entonces la aplicación

$$\partial^\gamma_{\pi\circ\gamma} : \mathcal{S}_\gamma \to \mathcal{S}_{\pi\circ\gamma}$$

es un isomorfismo de $K\mathcal{S}_n-$módulos y como $\pi \circ \gamma$ es una órbita del tipo $0^{n-k}1^k$ entonces por la recursión $\mathcal{S}_\gamma$ es isomorfo como $K\mathcal{S}_n-$módulos a $\mathcal{S}_{\pi\circ\gamma}$, es decir a

$$\bigoplus_{j=n-k}^{n} S^o_{\mu_j}$$

Si $2k \geq n$, γ es $n-$minimal y consideremos la aplicación

$$\partial : \mathcal{S}_{\mu_k} \to \mathcal{S}_{\mu_{k+1}}$$

Veamos que ∂ es sobre. Si $\alpha \in \mu_k$, sean

$I = \alpha^{-1}(1) = \{i_1, \ldots, i_{n-k-1}\}$ y $J = \alpha^{-1}(0) = \{1, \ldots, n\} - I = \{j_1, \ldots, j_{k-1}\}$

Para cada j, $0 \leq j \leq n-k-1 < k$, definimos

$$a_j = \frac{j!\,(k-j)!}{(k+1)!}$$

y

$$p = \sum_{j=0}^{n-k-1} (-1)^j a_j e_{n-k-1-j}\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k-1}}\right) e_{j+1}\left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k+1}}\right) \in \mathcal{S}_{\mu_{k+1}}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\partial p &= \sum_{j=0}^{n-k-2} (-1)^j a_j (j+1)\, e_{n-k-j-1}\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k-1}}\right) e_{j+1}\left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k+1}}\right) + \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-k-1} (-1)^j a_j e_{n-k-1-j}\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k-1}}\right) (k+1-j)\, e_j\left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k+1}}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-k-2} (-1)^j \left[a_j (j+1) - a_{j+1}(k-j)\right] e_{n-k-j-1}\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k-1}}\right) e_{j+1}\left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k+1}}\right) + \\
&\quad + a_0 (k-1)\, e_{n-k-1}\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k-1}}\right) \\
&= x^I = x^\alpha
\end{aligned}$$

Además $S^o_\gamma = Ker(\partial)$ y entonces el teorema se sigue de la recursión.
Del teorema anterior observamos inmediatamente que

$$\dim\left(\mathcal{S}^o_\gamma\right) = \dim Ker(\partial) = \binom{n}{k} - \binom{n}{k+1}$$

Referencias

[1] Araujo, J. O. y Aguado, J. L., Representations of Finite Groups on Polynomial Rings, Actas V Congreso de Matemática Dr. Antonio Monteiro, U.N.S., 1999.

[2] Aguado, J. L. y Araujo, J. O., A Gel'fand Model for the Symmetric Group, Communications in Algebra, 29(4), 1841-1851 (2001).

[3] Björk, J. E., Rings of Differential Operators, North-Holland Publishing Company, 1979.

[4] Curtis, C. y Reiner, I., Methods of Representation theory with Applications to Finite Groups and Orders. Vol. I, John Wiley & Sons, 1981.

[5] Fulton, W. y Harris, J., Representation Theory. A First Course. Springer-Verlag, 1991. Graduate Text in Mathematics 129.

[6] James, G. y Liebeck, M., Representations and Characters of Groups. Cambridge University Press, 1995.