Nexo Revista Científica
Vol. 20, No. 01, pp. 19 – 25 / Junio 2007

ISSN 1818-6742
Impreso en Nicaragua
www.uni.edu.ni/Nexo

Caracteres permutacionales del grupo simétrico

J.O. Araujo, J.J. Bigeón, K.A. Paz

NuCOMPA-Facultad de Ciencias Exactas, UNICEN
Paraje Arroyo Seco s/n, 7000. Tandil, Argentina
e-mail: {araujo, jbigeon, kapaz}@exa.unicen.edu.ar

Resumen

En este artículo se presenta una fórmula recursiva para evaluar el producto escalar de caracteres permutacionales del grupo simétrico S_n asociados con las particiones de n. Usamos esta fórmula para encontrar expresiones más acabadas de descomposiciones de ciertos caracteres permutacionales del grupo S_n sobre un cuerpo K de característica cero.

1. Introducción

Un *carácter permutacional* de un grupo G es el carácter asociado a la representación naturalmente inducida por una acción de G en un conjunto X. Formalmente, si notamos a la acción del grupo G en el conjunto X como

$$\sigma \cdot x \text{ para cada } \sigma \in G,\ x \in X$$

y K es un cuerpo de característica 0, la representación ρ sobre el cuerpo K asociada con esta acción está dada por

$$(\rho(\sigma) f)(x) = f\left(\sigma^{-1} \cdot x\right)$$

donde f pertenece al $K-$espacio vectorial V de todas las funciones de X en K.

Si χ es el carácter asociado con ρ, entonces

$$\chi(\sigma) = |\{x \in X : \sigma \cdot x = x\}|$$

es decir, el carácter en σ es el número de puntos fijos de σ en X.
El siguiente teorema relaciona el número de puntos fijos de cada elemento en G con el número de órbitas O en el que la acción de G descompone al conjunto X (ver [DM], Theorem 1.7A)

Teorema 1.1. *(Cauchy-Frobenius) Si el grupo G actúa en el conjunto X, con las notaciones anteriores tenemos que*

$$O = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma)$$

2. El grupo Simétrico S_n

En el caso del grupo simétrico S_n, o grupo de permutaciones de n objetos, los carateres permutacionales juegan un rol importante, dado que es posible exhibir una familia de estos caracteres que, ordenados en cierto modo, permiten expresar todos los caracteres irreducibles de S_n relacionados a través de una matriz triangular unipotente.
Por ejemplo, si consideramos la acción natural de S_n en las sucesiones de n términos formados con los números $1, 2, \ldots, n$, la representación obtenida es equivalente a la representación regular.
Si en las sucesiones admitimos repeticiones, obtenemos otras representaciones permutacionales, que pueden clasificarse según las multiplicidades con la que aparecen los números.
Para $n = 3$ tendríamos tres clases. La primera es

$$123 \quad 132 \quad 213 \quad 231 \quad 312 \quad 321$$

y las multiplicidades son $1, 1, 1$. La segunda es

$$112 \quad 121 \quad 211$$

y las multiplicidades son $2, 1$. La tercera es

$$111$$

y la multiplicidad es 3.
Como puede verse en el ejemplo, las multiplicidades están asociadas con una partición del número n, es decir, si

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \text{ con } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0$$

es una partición de n, asociamos con λ el conjunto de sucesiones que tengan λ_1 números iguales a 1, λ_2 números iguales a 2, y así sucesivamente hasta λ_k números iguales a k. Notemos con E_λ al conjunto de estas sucesiones y con ψ_λ al carácter de S_n asociado con esta partición, es decir si $\pi \in S_n$,

$$\psi_\lambda(\pi) = |\{s \in E_\lambda : \pi(s) = s\}|$$

Notemos que $\psi_\lambda(\pi) = \psi_\lambda(\pi^{-1})$.
Asociado con cada particion λ de n, existe un carácter irreducible de S_n que notaremos con χ_λ. El teorema a continuación, ([M] 6.5 y 7.6) relaciona los caracteres permutacionales con los caracteres irreducibles de S_n.

Teorema 2.1. *Sea m el número de particiones de n. Los caracteres permutacionales y los caracteres irreducibles de S_n pueden ser ordenados de modo tal que:*

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{i} \kappa_{ij} \chi_j$$

donde los coeficientes κ_{ij} son números enteros no negativos y $\kappa_{jj} = 1$, es decir, la matriz $T = [\kappa_{ij}] \in K^{m \times m}$ es triangular y unipotente.

Los números κ_{ij} son conocidos como los *números de Kostka.*
Por ejemplo, si $n = 4$, las particiones pueden ordenarse como sigue

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ (4) & (3,1) & (2,2) & (2,1,1) & (1,1,1,1) \end{array}$$

Las relaciones en este caso están dadas por

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \\ \chi_5 \end{bmatrix}$$

3. La Fórmula recursiva

En estas notas presentamos una fórmula recursiva para evaluar los productos escalares $\langle \psi_i, \psi_j \rangle$, donde

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \psi_i(\pi) \psi_j(\pi)$$

Algunos números de Kostka serán evaluados haciendo uso de dicha fórmula recursiva.
Consideremos $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ una partición de n y k un número natural tal que $k \leq \lambda_m$. Sea $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ una sucesión de números no negativos tales que para todo i, $1 \leq i \leq m$ sea

$$\nu_i \leq \lambda_i$$

Indicaremos con $\lambda - \nu$ a la partición de $n - k$ obtenida al reordenar los términos de la sucesión $\lambda_1 - \nu_1, \ldots, \lambda_m - \nu_m$ descartando los términos nulos. Por ejemplo, si $\lambda = (5,4,4,3,3)$ y $\nu = (0,1,0,2,3)$ tenemos entonces que $\lambda - \nu = (5,4,3,1)$.

Teorema 3.1. *Sean* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *y* $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ *particiones de* n *tales que* $\mu_k = \text{mín} \left\{ \lambda_i, \mu_j : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k \right\}$, *entonces*

$$\langle \psi_\lambda, \psi_\mu \rangle = \sum_{|\nu| = \mu_k} \langle \psi_{\lambda - \nu}, \psi_{\widetilde{\mu}} \rangle$$

donde $|\nu| = \nu_1 + \cdots + \nu_m$ *y* $\widetilde{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_{k-1})$.

Demostración. Teniendo en cuenta que

$$\langle \psi_\lambda, \psi_\mu \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \psi_\lambda(\pi) \psi_\mu(\pi)$$

y como

$$\begin{aligned} \psi_\lambda(\pi) \psi_\mu(\pi) &= \left| \{ s \in E_\lambda : \pi(s) = s \} \right| \times \left| \{ t \in E_\mu : \pi(t) = t \} \right| \\ &= \left| \{ (s,t) \in E_\lambda \times E_\mu : (\pi(s), \pi(t)) = (s,t) \} \right| \end{aligned}$$

consideramos la acción de S_n en $E_\lambda \times E_\mu$ dada por

$$\pi(s,t) = (\pi(s), \pi(t)) \qquad (\pi \in S_n, (s,t) \in E_\lambda \times E_\mu)$$

Encontramos que

$$\langle \psi_\lambda, \psi_\mu \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \psi_{\lambda\mu}(\pi)$$

donde $\psi_{\lambda\mu}$ es el carácter permutacional de S_n asociado con la acción de S_n en $E_\lambda \times E_\mu$.
A partir del teorema 1.1 obtenemos que $\langle \psi_\lambda, \psi_\mu \rangle$ es el número de órbitas en $E_\lambda \times E_\mu$ producidas por la acción de S_n. Para contar el número de estas órbitas, será suficiente fijar un representante para cada una de ellas.
Tomamos entonces pares de sucesiones (s, t) donde

$$s = (s_1, \dots, s_n) \text{ con } s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_n$$

De aquí que (s, t) y (s, u) están en una misma órbita si, y sólo si existe $\pi \in S_n$ tal que $\pi(s) = s$ y $\pi(t) = u$, es decir que basta determinar el número de órbitas en E_μ determinadas por la acción del subgrupo de isotropía de s en S_n. Podemos representar el par (s, t) por una matriz de dos filas por n columnas

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{bmatrix}$$

En la sucesión s hay λ_1 números iguales a 1, siguen λ_2 números iguales a 2, etc. Por la acción del grupo de isotropía de s se pueden permutar arbitrariamente los λ_1 primeros términos entre si, los λ_2 términos siguientes entre si, etc. Esto conduce a pensar el problema del siguiente modo: de cuántas maneras se puede ubicar los elementos de una sucesión t de tipo μ en una hilera de m cajas cuyas capacidades sean $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ respectivamente. Desde este punto de vista se tiene que cada manera de ubicar los μ_k términos iguales de la sucesión t se asocia con una sucesión $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ donde ν_i es la cantidad de términos ubicados en la i-ésima caja, quedando el problema reducido al caso del par $\lambda - \nu$ y $\widetilde{\mu}$, es decir, al número $\langle \psi_{\lambda-\nu}, \psi_{\widetilde{\mu}} \rangle$. Finalmente, $\langle \psi_\lambda, \psi_{\widetilde{\mu}} \rangle$ se descompone como la suma de los números $\langle \psi_{\lambda-\nu}, \psi_{\widetilde{\mu}} \rangle$, si tenemos en cuenta que las distintas entradas de los μ_k términos iguales de la sucesión t.

Proposición 3.2. *Como caso particular del teorema anterior tenemos*
i) Si $\lambda = n$,

$$\langle \psi_\lambda, \psi_\mu \rangle = 1$$

ii) Si $\lambda = n - 1, 1$,

$$\langle \psi_\lambda, \psi_\mu \rangle = k \quad si \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$$

iii) Si $\mu = p, q$ *con* $\lambda_m \geq q$*, entonces*

$$\langle \psi_\lambda, \psi_\mu \rangle = \binom{m+q-1}{q}$$

Demostración. i) Esto resulta del hecho que, en este caso, el grupo de isotropía de λ es S_n.
ii) y *iii)* son consecuencia de *i)* y de la fórmula de recurrencia.

En particular, esta fórmula recurrente podría ser usada para descomponer algunos caracteres permutacionales. Como consecuencia de la proposición anterior, encontraremos que las representaciones asociadas a los caracteres permutacionales $\psi_{m,k}$ son *libres de multiplicidades*, es decir que cada subrepresentación irreducible tiene multiplicidad igual a 1 en la descomposición de $\psi_{m,k}$.

Corolario 3.3. *Con las notaciones precedente tenemos*
i) $\chi_{n-k,k} = \psi_{n-k,k} - \psi_{n-k+1,k-1}$ $(k \geq n-k)$ *es un carácter irreducible de* S_n.
ii) $\psi_{k,n-k}$ *es libre de multiplicidades.*

Demostración. i) Como consecuencia de *iii)* de la proposición anterior, tenemos

$$\langle \psi_{m,k}, \psi_{m,k} \rangle = k+1 = \langle \psi_{m-1,k+1}, \psi_{m,k} \rangle \quad \text{si} \quad m \geq k$$

Luego

$$\begin{aligned} \langle \chi_{n-k,k}, \chi_{n-k,k} \rangle &= \langle \psi_{n-k,k} - \psi_{n-k+1,k-1}, \psi_{n-k,k} - \psi_{n-k+1,k-1} \rangle \\ &= k+1-k+k-k \\ &= 1 \end{aligned}$$

ii) De *i)* obtenemos

$$\psi_{n-k,k} = \sum_{i=0}^{k} \chi_{n-i,i}$$

Concluímos estas notas observando la conexión que hay entre el producto de caracteres permutacionales del grupo simétrico S_n y el siguiente problema combinatorio: *Si una delegación con* n *miembros consta de* λ_1 *miembros de tipo* 1, λ_2 *miembros de tipo* 2 *,...,* λ_m *miembros de tipo* m*, y deben ser*

alojados en n habitaciones μ_1 de éstas en el hotel 1, μ_2 en el hotel 2 ,..., μ_k en el hotel k, ¿de cuántas maneras distintas puede hacerse esto?
Por lo anterior, la respuesta es $\langle \psi_\lambda, \psi_\mu \rangle$ donde $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ y $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$.
Por ejemplo, una delegación con 4 africanos, 3 asiáticos y 3 europeos, podría alojarse en los 3 hoteles, con 4 habitaciones dispoibles en dos de ellos y 2 habitaciones disponibles en el hotel restante de tantas mareras como:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{4,3,3}, \psi_{4,4,2} \rangle &= \langle \psi_{3,3,2}, \psi_{4,4} \rangle + 2\langle \psi_{4,3,1}, \psi_{4,4} \rangle + 2\langle \psi_{3,3,2}, \psi_{4,4} \rangle + \langle \psi_{4,2,2}, \psi_{4,4} \rangle \\
&= 2\langle \psi_{3,3}, \psi_{4,2} \rangle + 4\langle \psi_{4,3}, \psi_{4,3} \rangle + 4\langle \psi_{3,3}, \psi_{4,2} \rangle + 2\langle \psi_{4,2}, \psi_{4,2} \rangle \\
&= 2 \times \binom{3}{2} + 4 \times \binom{4}{3} + 4 \times \binom{3}{2} + 2 \times \binom{3}{2} \\
&= 40
\end{aligned}$$

Referencias

[DM] Dixon, J. y Mortimer, B. *Permutation Groups.* Graduate Text in Mathematics 163, Springer-Verlag, 1996.

[JK] James, G. y Kerber, A., *The Representation Theory of the Symmetric Group.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 16, Addison-Wesley, 1981.

[M] Macdonald, I., *Symmetric Functions and Hall Polynomials,* Clarendon Pres, 1998.

[S] Sagan, B.,*The Symmetric Group, Representations, Combinatorial Algorithms and Symmetric Functions.* Graduate Texts in Mathematics 203, Springer-Verlag, 2000.