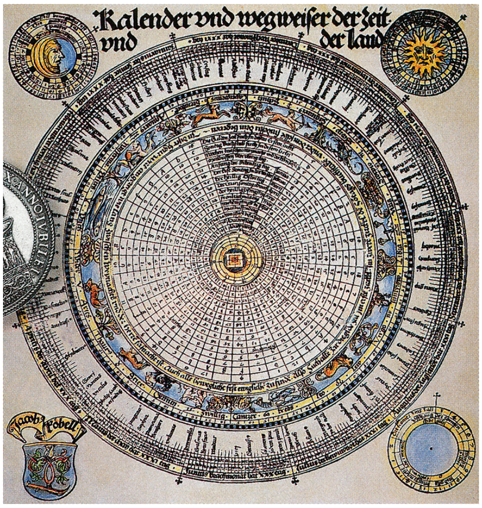
Problemas y rompecabezas

Sandor Ortegón
Profesor de cátedra del Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes
sj.ortegon@uniandes.edu.co

La siguiente colección de problemas tiene algo en común: son ejercicios interesantes que pudieron ser propuestos por los profesores en distintas clases de la universidad. El primer ejercicio pudo ser propuesto por un profesor de un curso de probabilidad, el segundo ejercicio, por un profesor de cálculo —de hecho, en el curso de señales de Ingeniería Electrónica fue propuesta una pregunta similar—, mientras que el tercero pudo ser propuesto en un curso de precálculo o de geometría euclidiana. Los dos primeros ejercicios son clásicos, es decir, es prácticamente imposible establecer quién pensó esas preguntas por primera vez, mientras que el tercer ejercicio es una pregunta original de quien escribe esta columna, basada en un resultado clásico de geometría.



Calendario Gregoriano
Fuente: http://static.squarespace.com/static/51cdd10de4b08819bd7bc9b4/t/52c5d6d9e4b01d575eab41a8/1388697307433/SciSource_BS5853.jpg

Problema 1

En nuestro país, al igual que en la mayoría de países del mundo, nos regimos por el sistema del calendario gregoriano para asignar fechas y saber cuántos días tiene cada año. Por ejemplo, se siguen las siguientes reglas para decidir cuáles años son bisiestos y cuáles no:

- Los años que no son múltiplos de 4 tienen 365 días (no son bisiestos). Por ejemplo, este año, 2014, no es un año bisiesto.
- Los años que son múltiplos de 4, pero que no son múltiplos de 100, tienen 366 días (son bisiestos). Por ejemplo, el año 2016 será bisiesto.
- Un año que sea múltiplo de 100 es bisiesto solo en caso de que dicho año sea también múltiplo de 400. Por ejemplo, el año 1900 no fue bisiesto, mientras que el año 2000 sí lo fue.

Si se escoge al azar un año, siendo el año un número natural, determine la probabilidad de que el 31 de diciembre sea un lunes. Como ayuda, la respuesta no es 1/7.

Problema 2

¿Es posible encontrar un número natural *n* tal que sen(*n*) sea menor que 0,0000001?

En caso de que sea posible, encuentre un número *n* que cumple la condición; en caso de que no sea posible, explique por qué. Aquí se supone que *n* representa un ángulo dado en radianes.

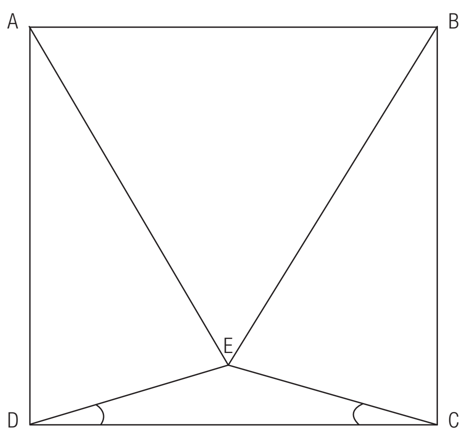
Problema 3

En la figura de abajo, el cuadrilátero *ABCD* es un cuadrado, y los dos ángulos pequeños marcados, ($\angle EDC$, $\angle ECD$), miden 15°.
Un ejercicio clásico de geometría consiste en explicar por qué el triángulo *AEB* es equilátero, es decir, por qué todos sus lados tienen la misma medida. Existen muchas justificaciones del hecho; por ejemplo, se puede justificar usando trigonometría, y por ello es un ejercicio que varios profesores de precálculo pueden asignarlo en el capítulo de trigonometría. Hay también demostraciones muy imaginativas que usan transformaciones geométricas como rotaciones, dilataciones, etc.

El problema que se propone es el siguiente: explique por qué el triángulo *AEB* es equilátero, pero teniendo en cuenta las siguientes restricciones en su justificación:

- No se pueden definir nuevos puntos a partir de la figura ni realizar construcciones geométricas adicionales. En otras palabras, no puede rayar la figura.
- Su argumento lo debe poder comprender un estudiante de octavo grado de educación básica secundaria. Es decir, no puede involucrar trigonometría, sino geometría elemental de triángulos.

Como ayuda, hay muchas formas de equivocarse en dicho ejercicio, es decir, debe tener cuidado de no caer en un razonamiento circular.



Soluciones del número 15

Problema 1

El objetivo es mover las fichas negras de la figura 1 a las posiciones que ocupaban originalmente las fichas blancas y viceversa —como muestra la figura 2—, siguiendo unas reglas sencillas que se explican a continuación: a) Una casilla no puede estar ocupada por dos o más fichas a la vez. b) Las fichas negras solo pueden moverse hacia la derecha, y las blancas solo hacia la izquierda. c) Una ficha puede moverse de una casilla a la siguiente si se encuentra desocupada, o puede saltar por encima de una ficha contigua, si la casilla siguiente a esa ficha se encuentra desocupada.

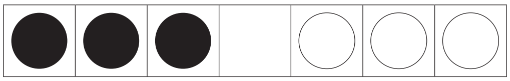


Figura 1

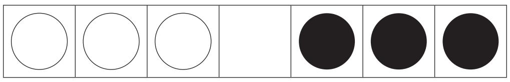


Figura 2

a) ¿Puede encontrar un procedimiento para resolver el problema, si en lugar de tres fichas blancas y tres negras, hubiera *N* fichas blancas y *N* fichas negras a cada lado, separadas, de la misma manera, por una sola casilla desocupada, siendo *N* un número entero positivo cualquiera?

b) ¿Cuántos movimientos en total (entre saltos y movimientos de avanzar una casilla) se deben hacer como mínimo en el problema original a fin de lograr el objetivo? En el problema general de *N* fichas a cada lado, ¿puede hallar una fórmula para ese número mínimo de movimientos en términos de *N*?

Solución

Supongamos que se tienen *N* fichas negras al lado izquierdo y *N* fichas blancas al lado derecho, y consideremos lo necesario para lograr el objetivo de intercambiar la posición de las fichas negras y blancas siguiendo las reglas. Las figuras 1 y 2 muestran el caso de $N = 3$.

Es claro que, además de las reglas del juego, se deben cumplir las siguientes pautas:

a) Cuando "se encuentren" dos fichas de distinto color (es decir, fichas que están una al lado de la otra y que vayan en direcciones opuestas), debe haber un salto, como muestra la figura 3.
b) No deben realizarse saltos entre fichas del mismo color. De lo contrario, crearía una situación en la que se bloquea el paso para futuros movimientos de fichas que vayan a pasar al otro lado.
c) Esta última condición implica que entre las fichas de un mismo color, por ejemplo las blancas, situadas originalmente en la parte derecha, la casilla que originalmente estaba más a la izquierda quedará en la posición más a la izquierda al otro lado, y así sucesivamente. Lo mismo sucederá con las casillas negras.

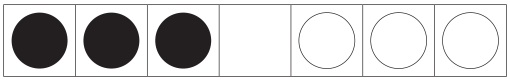


Figura 1

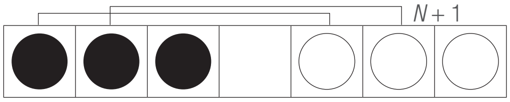


Figura 2

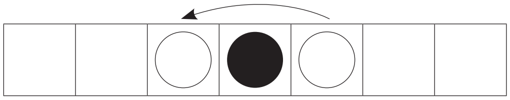


Figura 3

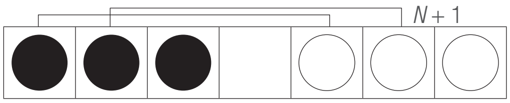


Figura 4

Vemos, entonces, que si queremos contar el número de jugadas realizadas, según la pauta (c), cada ficha avanzará $N + 1$ posiciones hacia su posición definitiva al finalizar el juego, como muestra la figura 4. En consecuencia, sumando todas las posiciones que avanzan las $2N$ fichas dispuestas en el juego, se habrá hecho un avance de $2N(N + 1) = 2N^2 + 2N$ posiciones. Cada avance en una posición significa una jugada realizada, con excepción de las jugadas de salto en las que en una jugada, una ficha avanza dos posiciones. Según las normas (a) y (b), el número de saltos es igual al número de cruces que puede haber entre una ficha blanca y una negra. Como hay N fichas de cada color, habrá $N \times N = N^2$ saltos. Por lo tanto, el número de jugadas que se realiza para completar el juego siempre es igual a $(2N^2 + 2N) - N^2 = N^2 + 2N$. ¿Es claro por qué se debe restar N^2? En el rompecabezas original, con $N = 3$, se necesitan 15 jugadas.

Respecto a una estrategia o algoritmo para completar el juego, se deja al lector la verificación de que el siguiente procedimiento funciona:

- Use la mano izquierda para mover las fichas negras y la mano derecha para mover las fichas blancas. Empiece usando la mano izquierda.
- Se irán alternando los movimientos de mano izquierda y mano derecha, siguiendo la siguiente regla: en cada turno —mano izquierda o mano derecha—, la mano debe mover las fichas tantas posiciones y tantas fichas como sea posible, bien sea mediante saltos o pasos unitarios, siempre y cuando se evite que, como efecto de una jugada, aparezcan dos fichas del mismo color en posiciones consecutivas. Justo antes de que eso pase, se debe cambiar de mano.

Se recomienda que el lector ensaye el procedimiento para $N = 3$ y $N = 4$ con monedas de dos denominaciones distintas que hagan el papel de fichas blancas y fichas negras.

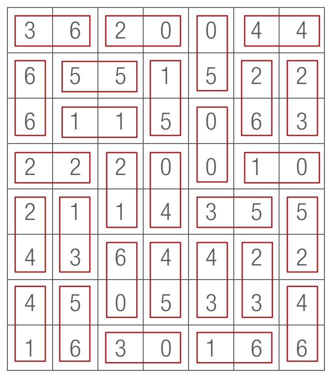
Problema 2

En la “sopa de números”, agrupe las casillas de manera que pueda obtener todas las 28 fichas de un juego de dominó, suponiendo que los números indican cuántos puntos hay a cada lado de la ficha.

3	6	2	0	0	4	4
6	5	5	1	5	2	2
6	1	1	5	0	6	3
2	2	2	0	0	1	0
2	1	1	4	3	5	5
4	3	6	4	4	2	2
4	5	0	5	3	3	4
1	6	3	0	1	6	6

Solución

La dificultad del ejercicio radica en que solo hay una manera de agrupar las fichas, de manera que pudo ser un verdadero rompecabezas encontrar la solución que ilustra la figura.



Problema 3

En un plano cartesiano se han marcado inicialmente los puntos con coordenadas (0, 0), (0, 1), (1, 0) y (1, 1). A partir de allí, se pueden hacer las siguientes construcciones sobre el plano, siguiendo las reglas que se enumeran a continuación:

- Se puede trazar la recta que pasa por dos puntos marcados previamente.
- Si A y B son dos puntos marcados previamente, se puede trazar cualquiera de las rectas que pasan por A o por B, que formen un ángulo de 45 grados con la recta AB
- Se puede marcar el punto de intersección de dos rectas trazadas previamente.

En este contexto, se plantean las siguientes tareas:

a) Explicar cómo puede asegurarse de marcar cualquier punto con coordenadas enteras.
b) Probar si es o no posible marcar el punto $\left(\frac{1}{20}, \frac{1}{14}\right)$
c) Describir con precisión, si es posible, qué tipo de puntos se pueden marcar en el plano cartesiano siguiendo las reglas enunciadas.

Solución

Vamos a usar las siguientes figuras como auxiliares para la explicación:

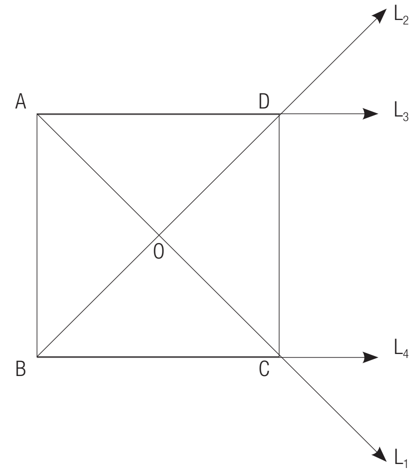


Figura 1

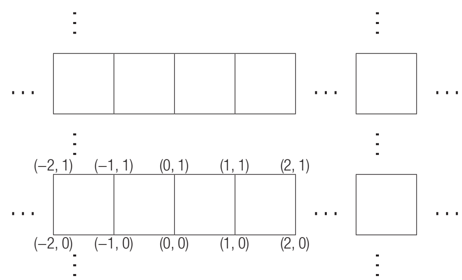


Figura 2

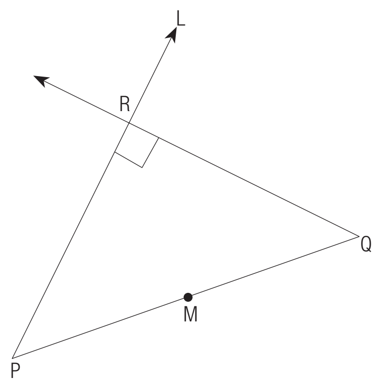


Figura 3

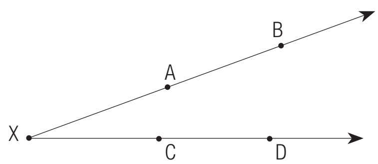


Figura 4

a) Llamemos A, B, C, D a los puntos (0,1), (0,0), (1,0) y (1,1) como muestra la figura 1. Primero observemos que si A y B están marcados, según las reglas, es posible marcar también los puntos C, D mediante el procedimiento que ilustra la figura: trazamos la recta AB, y en un mismo lado de ella trazamos las rectas L_1, L_2 que pasan por A y B, respectivamente, y forman un ángulo de 45° con la recta AB. Sea O el punto de corte de esas rectas. De acuerdo con las reglas, es posible marcar ese punto. Luego trazamos la recta L_4 que pasa por B y forma un ángulo de 45° con la recta BO=L_2. Observemos que podemos trazar L_4 porque O ya es un punto marcado. De manera análoga, trazamos la recta L_3 que pasa por A, como se muestra en la figura 1. Se puede marcar el punto de intersección entre L_3 y L_2 , que es D, y el punto de intersección entre L_4 y L_1 , que es C.
Este procedimiento se puede repetir cuando C, D hacen el papel de A, B en la construcción anterior. Mediante sucesivas repeticiones hacia cualquier lado del cuadrado marcado originalmente en el problema (véase la figura 2), se pueden marcar todos los vértices con coordenadas enteras, ya que inicialmente se tenían cuatro vértices con coordenadas enteras formando un cuadrado de lado 1. Así, se pueden marcar todos los vértices de la cuadrícula de los puntos con coordenadas enteras y trazar todas las rectas de la cuadrícula formada con esos puntos.

b) Vamos a explicar por qué podemos marcar el punto $\left(\frac{1}{20}, \frac{1}{14}\right)$. La idea es que podemos marcar en primer lugar los puntos $x_1 = \left(\frac{1}{20}, 1\right)$, $x_2 = \left(\frac{1}{20}, 0\right)$. El primero se puede marcar porque es posible marcar los puntos (1,20), (0,0), según la discusión anterior. Luego se puede trazar la recta que une esos dos puntos e intersectarla con la recta que une (0,1) y (1,1). La intersección de esas dos rectas se puede marcar, y es justamente el punto x_1. El punto x_2 se puede marcar repitiendo el proceso anterior, bajando una unidad en la cuadrícula. De manera análoga, se pueden marcar los puntos $Y_1 = \left(0, \frac{1}{14}\right)$, $Y_2 = \left(1, \frac{1}{14}\right)$. El punto de intersección de las rectas X_1Y_1 y X_2Y_2 es justamente el punto $\left(\frac{1}{20}, \frac{1}{14}\right)$, y por tanto se puede marcar.

c) Se puede demostrar, siguiendo un procedimiento similar al anterior, que es posible marcar todos los puntos con coordenadas racionales. Pero también se puede justificar que estos *son los únicos puntos* que se pueden marcar; es decir, no pueden marcarse otros puntos donde alguna de las coordenadas no sea un número racional. La razón de esto último es la siguiente: según la última regla del enunciado, un punto “nuevo” marcado debió ser el resultado de intersecar dos rectas L_a, L_b que se puedan trazar. Pueden presentarse dos casos:

- Cada una de las rectas L_a , L_b une dos puntos previamente marcados, es decir, con coordenadas racionales, situación que ilustra la figura 4.
- Por lo menos una de las dos rectas forma un ángulo de 45° con una recta que une dos puntos con coordenadas racionales, situación que ilustra la figura 3.

El segundo caso puede reducirse al primero, porque, como muestra la figura 3, si P y Q son dos puntos con coordenadas racionales y L es la recta trazada, el punto R que muestra la figura puede marcarse según las reglas, y se puede verificar que ese punto tiene coordenadas racionales, es decir, que tendríamos una situación como la del primer caso. Y se puede demostrar que la intersección de dos rectas, L_a, L_b, donde cada una de ellas se obtuvo uniendo puntos con coordenadas racionales, es un punto con coordenadas racionales. La razón es que el punto de intersección se obtiene resolviendo un sistema de ecuaciones lineales de 2 x 2, donde las ecuaciones tienen coeficientes racionales y término independiente racional. Esto completa la caracterización de cuáles puntos se pueden marcar, y de paso nos enseña los alcances de lo que puede marcarse con una escuadra de 90° – 45° – 45°. ●