NUEVA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA GRAVITATORIO

EMIRO DÍEZ SALDARRIAGA
Profesor Emérito de la Universidad Pontificia Bolivariana-
ediez@geo.net.co

- Grupo amigos de la física: Grupo permanente de profesores y egresados de las Universidades Pontificia Bolivariana, Nacional y Antioquia, orientado por el Pofesor Antonio Quintero A.

Este artículo está dedicado al maestro y gran matemático Javier Escobar Montoya.

RESUMEN
Se explica una nueva solución al problema de la interacción entre un cuerpo esférico de gran masa, supuesto en reposo, y un cuerpo pequeño en movimiento a través del campo gravitacional. La solución fue confrontada con los resultados basados en la solución de Schwarzschild, tal como se presentan en dos libros de relatividad general, "Tiempo, Espacio y Materia" de Herman Weyl e "Introduction to General Relativity" de H. A. Atwater. Este artículo se escribió en forma didáctica, pues se piensa que lo leerán personas de diversas formaciones científicas; por eso se incluyen explicaciones que no aparecerían en un simple informe científico.

PALABRAS CLAVES: Interacción, gravitacional, Schwarzschild, Relatividad General.

ABSTRACT
A new solution to the problem of the interaction between a sphericalbody of great mass, supposed in rest, and a small body in movement through the Gravitational Field is explained. The solution was confronted with the results based on the solution of Schwarzschild, as they appear in two books of general relativity, "Time, Space and Matter" of Herman Weyl and "Introduction to General Relativity" of H. To Atwater. This article was written in didactic form, because it thinks that diverse people of formation will read scientific; for that reason explanations are included that would not appear in a simple scientific report.

KEYWORDS: *Interaction, gravitational, Schwarzschild, General Relativity.*

1. INTRODUCCIÓN

Una forma muy actual de tratar las revoluciones científicas consiste en investigar como las teorías superadas por las nuevas pueden ser modificadas para incluir los resultados que, supuesta o realmente, sólo son explicadas por las teorías revolucionarias. Siguiendo ese lineamientos se desarrolló una nueva solución al problema de la interacción entre un cuerpo esférico de gran masa, supuesto en reposo, y un cuerpo pequeño en movimiento a través de su campo gravitacional. La única modificación que se hace a la mecánica Newtoniana es aceptar que la masa varía con la velocidad de acuerdo a la relatividad especial. La solución fue confrontada con los resultados basados en la solución de Schwarzschild, tal como se presentan en dos libros de relatividad general, "Tiempo, Espacio y Materia" de Herman Weyl e "Introduction to General Relativity" de H. A. Atwater. Este artículo se escribió en forma didáctica, pues se piensa que lo leerán personas de diversas formaciones científicas; por eso se incluyen explicaciones que no aparecerían en un simple informe científico.

2. COMPORTAMIENTO DE MASAS PEQUEÑAS EN CAMPOS GRAVITATORIOS DE SIMETRÍA ESFÉRICA

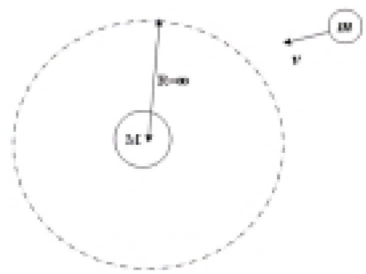

Figura 1.

La masa *m* se mueve acercándose a una enorme masa M y al campo gravitatorio que la rodea. Aunque se puede concebir que el campo se extiende hasta el "infinito", debemos aceptar que en la práctica sabemos de masas gigantescas cuyo campo no logramos percibir de ninguna forma por estar muy alejadas de nosotros. Por lo tanto, es razonable suponer que a grandes distancias el campo se puede tomar tan pequeño que no alcanza a modificar en absoluto el movimiento de la masa. También asumimos que dicho movimiento se presenta en un plano

Fecha de recepción: 29 Marzo de2004
Fecha de aceptación: 16 Abril de 2004

que pasa por el centro de la masa central y sólo requiere las coordenadas R y ϕ para ser descrito.

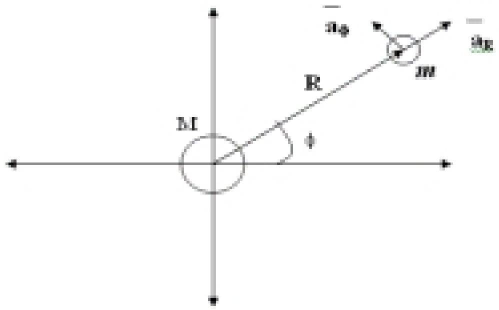

Figura 2.

Tendremos entonces:

$$\overline{R} = R\,\overline{a}_R \quad y \quad \overline{v} = \frac{dR}{dt}\overline{a}_R + R\frac{d\phi}{dt}\overline{a}_\phi$$

Ecuación de movimiento:

$$\left(\frac{dEnergía\ \ Potencial}{dR}\right)\overline{a}_R = \frac{d}{dt}(Cantidad\ \ de\ movimiento) \qquad (1)$$

$$\therefore \left[\frac{d}{R}\left(\frac{G\,M\ m}{R}\right)\right]\overline{a}_R = \frac{d}{dt}\left[m\overline{v}\right]$$

G: Constante gravitacional.
GMm / R: Potencial gravitacional Newtoniano.

Para explicarnos fenomenológicamente la ecuación anterior, podríamos afirmar que la energía potencial almacenada en un resorte, o en cualquier campo de potencial, trata de fluir en una dirección dada, dirección que corresponde a la forma en que fue deformado el resorte, o el campo, y no en otra. De ahí resultaría el vector unitario $\overline{a_R}$ en la ecuación anterior, indicando que la deformación del campo gravitacional, que se almacenó como una energía, trata de devolver esta energía en la dirección marcada por ese vector unitario. Fenómeno que se expresa con el término de la derecha de la ecuación. Ecuación que, multiplicada escalarmente por $m\overline{v}$, queda:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{G\ M\ \ m}{R}\right)\right]\overline{a_R}\bullet\ m\overline{v} = m\overline{v}\bullet\frac{d}{dt}\left[\overline{m\,v}\right]$$

Como aceptamos:

1) $\therefore d\left(\overline{X}\bullet\overline{X}\right) = \left(d\overline{X}\right)\bullet.\overline{X} + \overline{X}\bullet d\overline{X} = 2\overline{X\bullet\left(d\overline{X}\right)}$

2) $\overline{a_R}\bullet m\overline{v} = m\overline{a_R}\bullet\left[\frac{dR}{dt}\overline{a_R} + R\frac{d\phi}{dt}\overline{a_\phi}\right] = \frac{dR}{dt}\ m$

$$Entonces: \left[\frac{d}{dR}\left(\frac{GMm}{R}\right)\right]\overline{a_R}\bullet m\overline{v}$$

$$= \frac{d}{dR}\left(\frac{GMm}{R}\right)\frac{dR}{dt}m = \frac{d}{dt}\left[\frac{m\overline{v}\bullet m\overline{v}}{2}\right]$$

$$\therefore m\frac{d}{dt}\left[\frac{GMm}{R}\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[m^2v^2\right] \quad (2)$$

Evidentemente la ecuación anterior **tiene** que corresponder a un hecho físico. ¿ Pero, a cual? Precisamente utilizamos una fórmula, la que nos proporciona la relatividad restringida para relacionar la masa con la velocidad, cuya explicación física aun es oscura. Esta es la única modificación que se hace a la simple teoría Newtoniana.

$$m = m_o \Big/ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,; \qquad (3)$$

m_o: Masa en reposo; c: Velocidad de la luz.

Despejemos de ella la velocidad por la masa al cuadrado.

$$\therefore\quad 1-\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{m_o}{m}\right)^2$$

$$\therefore\quad m^2v^2 = c^2\left(m^2 - m_o{}^2\right)$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dt}\left(m^2\,v^2\right) = \frac{d}{dt}\left(c^2m^2 - c^2m_o{}^2\right)$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}\left(m^2v^2\right) = \frac{d}{dt}\left(c^2m^2\right) - \frac{d}{dt}\left(c^2m_o{}^2\right)$$

Y como c y m_o son constantes:

$$\frac{d}{dt}\left(m^2v^2\right) = 2\,mc^2\frac{dm}{dt} = 2\,m\frac{d}{dt}\left(c^2m\right)$$

Reemplazando en (2) obtenemos:

$$m\frac{d}{dt}\left[\frac{GMm}{R}\right] = \frac{1}{2}2\,m\frac{d}{dt}\left(c^2m\right)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left[\frac{GMm}{R}\right] = \frac{d}{dt}\left(c^2m\right) \qquad (4)$$

¡Que gratificante! ¡Ahora si entendemos! La ecuación (4) sólo afirma que la energía pasa de ser potencial a ser cinética. ¡Así deben de ser todas las ecuaciones!
Ahora integramos ambos lados de la ecuación (4), cancelando los dt. Como límites tomamos el caso genérico m, R y un caso particular mi, Ri:

$$\int_{m_iR_i}^{m_iR} d\left[\frac{GMm}{R}\right] = \int_{m_i}^{m} d\left(c^2m\right)$$

$$\therefore \frac{GMm}{R} - \frac{GMm_i}{R_i} = c^2m - c^2m_i$$

$$\therefore\quad c^2m - \frac{GMm}{R} = E = c^2m_i - \frac{GM\ \ m_i}{R_i} \qquad (5)$$

$$\therefore\ m\left(c^2 - \frac{GM}{R}\right) = E$$

Se interpreta la constante E como la energía. Pero evidentemente no es la energía total del sistema formado por las dos masas y por sus campos; tampoco es la energía de una sola de las masas...Considerémosla solo una cantidad que se mantiene constante en el movimiento y sigamos.

3. EL MOMENTO ANGULAR

Ya encontramos una de las constantes clásicas del movimiento, la ***energía***, ahora trataremos de encontrar la otra constante, el **momento angular**. Para obtenerla, volvemos a la ecuación (1):

$$\frac{d}{dR}(Energía\ \ Potencial)\,\overline{a_R} = \frac{d}{dt}(Cantidad\ de\ movimiento)$$

$$\therefore \left[\frac{G\,M\,m}{R}\right]\overline{a_R} = \frac{d}{dt}\left[m\,\bar{v}\right] \qquad (1)$$

Y expresamos la velocidad en términos de los vectores unitarios:

$$\bar{v} = \frac{dR}{dt}\overline{a_R} + R\frac{d\phi}{dt}\overline{a_\phi}$$

$$\therefore \frac{d}{dR}\left(\frac{GMm}{R}\right)\overline{a_R} = \frac{d}{dt}\left(m\frac{dR}{dt}\overline{a_R} + mR\frac{d\phi}{dt}\overline{a_\phi}\right)$$

Ahora, como:

$$\frac{d}{dt}(\overline{a_R}) = \frac{d\phi}{dt}\overline{a_\phi}$$

$$\frac{d}{dt}(\overline{a_\phi}) = -\frac{d\phi}{dt}\overline{a_R}$$

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{GMm}{R}\right)\overline{a_R} = \left(m\frac{dR}{dt}\right)\frac{d}{dt}\left(\overline{a_R}\right) + \overline{a_R}\frac{d}{dt}\left(m\frac{dR}{dt}\right) +$$
$$\left(mR\frac{d\phi}{dt}\right)\frac{d}{dt}\left(\overline{a_\phi}\right) + \overline{a_\phi}\frac{d}{dt}\left(mR\frac{d\phi}{dt}\right)$$

Reemplazando las derivadas de los vectores unitarios e igualando componentes:

$$\therefore \frac{d}{dR}\left(\frac{GMm}{R}\right)\overline{a_R} = \left\{\frac{d}{dt}\left(m\frac{dR}{dt}\right) - \left(mR\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right)\right\}\overline{a_R}$$

$$0 = \left\{m\frac{dR}{dt}\frac{d\phi}{dt} + \frac{d}{dt}\left(mR\frac{d\phi}{dt}\right)\right\}\overline{a_\phi}$$

Para simplificar, llamamos a:

$$p_R = m\ dR\ /dt \quad y \quad p_\phi = mR\ \ d\phi\ /dt$$

"Cantidad de movimiento en R" y "Cantidad de movimiento en ϕ", respectivamente. Tendremos:

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{GMm}{R}\right) = \frac{d}{dt}(p_R) - p_\phi\frac{d\phi}{dt} \qquad (6)$$

$$0 = p_R\frac{d\phi}{dt} + \frac{d(p_\phi)}{dt} \qquad (7)$$

De (7):

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{p_R}\frac{d(p_\phi)}{dt}$$

Y reemplazamos en (6):

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{GMm}{R}\right) = \frac{d}{dt}(p_R) + \frac{p_\phi}{p_R}\frac{d(p_\phi)}{dt}$$

$$\therefore\ p_R\frac{d}{dR}\left(\frac{GMm}{R}\right) = p_R\frac{d}{dt}(p_R) + p_\phi\frac{d(p_\phi)}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{d}{dt}\left(p_R{}^2 + p_\phi{}^2\right)\right\}$$

$$\therefore\ m\frac{dR}{dt}\frac{d}{dR}\left(\frac{GMm}{R}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{m^2\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + m^2R^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right\}$$

$$\therefore\ m\frac{d}{dt}\left(\frac{GMm}{R}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(m^2v^2\right)$$

Ecuación que ya habíamos utilizado. Volvamos a (7).

Como: $p_\phi = mR\ \ d\phi\ /dt$

Tendremos:

$$0 = p_R\frac{d\phi}{dt} + \frac{d(p_\phi)}{dt} = p_R\frac{p_\phi}{m\ R} + \frac{d(p_\phi)}{dt}$$

$$Ahora\ ,\quad P_R = m\ \frac{d\ R}{d\ t}$$

$$\therefore \frac{p_\phi}{R}\frac{dR}{dt} + \frac{d(p_\phi)}{dt} = 0$$

$$\therefore \quad p_\phi\frac{dR}{dt} + R\ \frac{d(p_\phi)}{dt} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{d(p_\phi R)}{dt} = 0$$

Que interpretamos como:

$$\therefore\ R\ \ p_\phi = b \qquad \text{(Constante)}$$

$$b = R\ \ p_\phi = RmR\ \ \ d\phi\ /dt \qquad (8)$$

Constante que se denomina "momento angular". Tenemos al fin suficientes ecuaciones para resolver el movimiento.

4. EN BUSCA DE UNA MÉTRICA

En Relatividad General se resuelven los movimientos estableciendo una "métrica" del sistema. O sea, encontrando las ecuaciones de las geodésicas, que son líneas cuya curvatura se debe a todas las masas cercanas y que marcan las trayectorias que deben seguir las partículas. Es decir, todas las partículas se mueven exentas de fuerzas, solo tienen que deslizarse por las geodésicas. Lo que se hizo, entonces, fue imitar la forma como se resuelven las ecuaciones en Relatividad General, pero usando las ecuaciones clásicas. Se examinó la "métrica" de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1-\frac{2GM}{c^2R}\right)dt^2$$

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{(dR)^2}{\left(1-\frac{2GM}{c^2R}\right)} + R^2(d\phi)^2 + R^2 Sen^2(\theta)\, d\theta^2\right)$$

Que se reduce, para el movimiento en un plano, a:

$$ds^2 = \left(1-\frac{2GM}{c^2R}\right)dt^2 - \frac{1}{c^2}\frac{(dR)^2}{\left(1-\frac{2GM}{c^2R}\right)} - \frac{R^2(d\phi)^2}{c^2}$$

Ahora, para enfrentar esa ecuación tenemos el universo euclidiano plano y las ecuaciones:

3) $m = m_o \Big/ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$; (3)

(5) $E = c^2 m - GMm \;/ R$

(8) $b = R \; p_\phi = RmR \;\; d\phi \,/ dt$

Tomamos la ecuación (3) y escribimos su versión aproximada para velocidades pequeñas respecto a la velocidad de la luz, pues es la ecuación mas parecida a la de Schwarzschild:

$$\frac{2m}{m_o} = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cong 2 + \frac{2v^2}{2c^2} \cong 2 + \frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{2c^2 m}{m_o} = 2c^2 + \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \left(\frac{Rd\,\phi}{dt}\right)^2 \qquad (9)$$

Procedemos a resolver esta ecuación exactamente como se resuelve su contrapartida en Relatividad General:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = 2c^2\frac{m}{m_o} - 2c^2 - \left(R\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \qquad (10)$$

De la ecuación (8): $R^2 m \frac{d\phi}{dt} = b$

$$\therefore \quad R^4\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{b^2}{m^2} \qquad (11)$$

Dividimos la ecuación (10) por la ecuación (11):

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{R^2}\frac{\frac{dR}{dt}}{\frac{d\phi}{dt}}\right)^2 = \frac{2c^2\left(\frac{m}{m_o}-1\right) - R^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}{\left(\frac{b^2}{m^2}\right)}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{R^2}\frac{dR}{d\phi}\right)^2 = \frac{2c^2m^2}{b^2}\left(\frac{m}{m_o}-1\right) - \frac{R^2m^2}{b^2}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$$

Pero:

$$\frac{R}{b}\frac{m}{}\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{R} \quad (8) \quad \text{y} \quad m = \frac{\frac{E}{c^2}}{1-\frac{GM}{c^2R}} \quad (5)$$

De modo que reemplazando en la ecuación anterior:

$$\left(-\frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{d\phi}\right)^2 = \frac{2c^2}{b^2}\frac{E^2}{c^4\left(1-\frac{GM}{c^2R}\right)^2}\left(\frac{\frac{E}{c^2}}{m_o\left(1-\frac{GM}{c^2R}\right)}-1\right) - \frac{1}{R^2}$$

Para simplificar la escritura, escribimos:

$$\therefore \quad \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{2c^2{m_E}^2}{b^2(1-Au)^2}\left(\frac{m_E}{m_o(1-Au)}-1\right) - u^2$$

$$\therefore \quad \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{2c^2{m_E}^2}{b^2(1-Au)^3}\left(\frac{m_E}{m_o}-1+Au\right) - u^2$$

Se utiliza, como en Relatividad General, la expansión en serie de potencias:

: $u = 1/R$, $A = GM \,/ c^2$, $m_E = E/c^2$

$(1-Au)^{-3} = 1 + 3Au + 6A^2u^2 + 10A^3u^3 \ldots.$ Solo tomamos hasta el término al cuadrado, considerando los demás muy pequeños en comparación los de potencias mas elevadas:

$$\therefore \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{2c^2{m_E}^2}{b^2}\left(\frac{m_E}{m_o}-1+Au\right)\left(1+3Au+6A^2u^2\right) - u^2$$

$$\therefore \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{2c^2{m_E}^2}{b^2}\left(\frac{m_E}{m_o}-1\right) + 2u\left(\frac{c^2{m_E}^2A}{b^2}\left[3\left(\frac{m_E}{m_o}-1\right)+1\right]\right)\text{L}$$

$$+u^2\left(\frac{2c^2{m_E}^2A^2}{b^2}\left[6\left(\frac{m_E}{m_o}-1\right)+3\right]\right) - u^2$$

lamando:

$$\therefore H = \frac{2c^2{m_E}^2}{b^2}\left(\frac{m_E}{m_o}-1\right) \quad ; \quad L = 2u\left(\frac{c^2{m_E}^2A}{b^2}\left[\left(\frac{3m_E}{m_o}-2\right)\right]\right)$$

$$D = -u^2\left(1-\frac{2c^2{m_E}^2A^2}{b^2}\left(\frac{6m_E}{m_o}-3\right)\right)$$

Con los reemplazos sugeridos arriba, la ecuación queda:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = H + 2uL - u^2D = D\left\{\frac{H}{D} + 2u\frac{L}{D} - u^2\right\}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = D\left\{\frac{H}{D} - \left(u-\frac{L}{D}\right)^2 + \frac{L^2}{D^2}\right\} \qquad (12)$$

Aquí hacemos la sustitución usual en Relatividad General:

$$u = \frac{L}{D} + \sqrt{\frac{H}{D}+\frac{L^2}{D^2}}\, Cos\theta \qquad (13)$$

Donde θ no es un ángulo físico, como sí lo es el ángulo ϕ, sino una variable auxiliar. Reemplazamos en (12) la derivada de u respecto a Φ:

$$\frac{du}{d\phi} = -\sqrt{\frac{H}{D} + \frac{L^2}{D^2}}\, Sen\theta \frac{d\theta}{d\phi}$$

$$\therefore \left(\frac{H}{D} + \frac{L^2}{D^2}\right) Sen^2\theta \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2 = D\left\{\frac{H}{D} + \frac{L^2}{D^2} - \left[\sqrt{\frac{H}{D} + \frac{L^2}{D^2}}\, Cos\theta\right]^2\right\}$$

$$= D\left(\frac{H}{D} + \frac{L^2}{D^2}\right) Sen^2\theta$$

$$\therefore \quad \frac{d\theta}{d\varphi} = \sqrt{D} \qquad \therefore \quad \theta = \sqrt{D}\,\varphi + \theta_o$$

Y se tiene ya la "solución" del movimiento. Estudiémosla.

5. SOLUCIÓN DEL MOVIMIENTO

La solución obtenida es paramétrica, siendo el parámetro el ángulo no físico θ, y se condensa en dos ecuaciones:

$$\theta = \sqrt{D}\,\phi + \theta_o$$

$$\frac{1}{R} = u = \frac{L}{D} + \sqrt{\frac{A}{D} + \frac{L^2}{D^2}}\, Cos\theta$$

Nos interesan dos casos: Cuando el cuerpo pequeño orbita al mayor y cuando solo lo pasa rozando. Empezamos con el caso del cuerpo que orbita. La condición para que se de este caso es:

$$\frac{L}{D} > \sqrt{\frac{L^2}{D^2} + \frac{H}{D}} \qquad \therefore \quad \frac{H}{D} < 0$$

La partícula pequeña describe una órbita elíptica alrededor de la masa estática. Se entiende mejor la situación si se grafica el radio y su inverso en función del ángulo o parámetro θ.

$U_{máxima}$

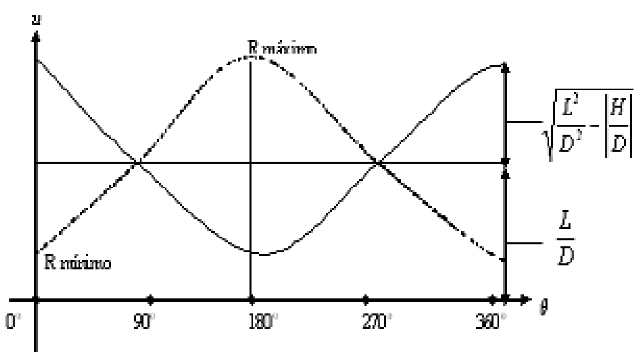

Figura 4.

Obsérvese como a *u* máxima corresponde R mínimo y viceversa. El gráfico polar es:

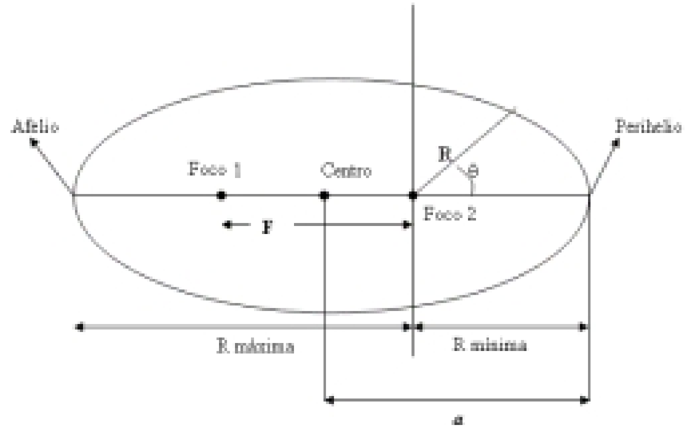

Figura 3.

Recuérdese que θ no es un ángulo físico. Con respecto a él no existe "precesión" del perihelio (punto de mayor acercamiento a la masa orbitada): los puntos de R máximo y R mínimo ocurren siempre en los mismos valores de θ. El perihelio en θ = 0, 2π, 4π...par.π; y el afelio en θ = π, 3π,5π .. impar.π. Estas órbitas se describen por algunas de sus características, que se llaman "elementos" de la órbita:

$$2\,a = Diámetro\ Máximo = R_{máximo} + R_{mínimo}$$

$$f = Distancia\ entre\ focos = R_{máximo} - R_{mínimo}$$

$$e = Excentricidad = \frac{f}{2\,a} = \frac{R_{máximo} - R_{mínimo}}{(R_{máximo} + R_{mínimo})}$$

$$u_{mínimo} = \frac{1}{R_{máximo}} = \frac{L}{D} - \sqrt{\frac{L^2}{D^2} - \left(\frac{H}{D}\right)}$$

$$u_{máximo} = \frac{1}{R_{mínimo}} = \frac{L}{D} + \sqrt{\frac{L^2}{D^2} - \left(\frac{H}{D}\right)}$$

$$\therefore \quad \frac{L}{D} = \frac{u_{min} + u_{max}}{2}; \quad \therefore \quad \sqrt{\frac{L^2}{D^2} - \left(\frac{H}{D}\right)} = \frac{u_{max} - u_{min}}{2}$$

De modo que podríamos escribir:

$$\therefore \quad u = \left(\frac{u_{min} + u_{max}}{2}\right) + \left(\frac{u_{max} - u_{min}}{2}\right) Cos\theta$$

Estos "elementos de las órbitas" han sido determinados por los astrónomos con enorme precisión.

6. AVANCE DEL PERIHELIO

Cuando se hace el gráfico polar R, ϕ, se encuentra que los puntos de R máximo y R mínimo no concuerdan en los mismos valores del ángulo ϕ. Por ejemplo, dos R mínimos consecutivos se presentan cada que θ cambia en 2π radianes (ver figura siguiente, parte a); en cambio, en el gráfico R, ϕ, dos R mínimos consecutivos se presentan cada que ϕ varía:

$$\therefore \quad \Delta\phi\ Entre\ 2\ R_{min} = \int_{R\,min}^{R\,min} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{D}} = \frac{2\pi}{\sqrt{D}}$$

Se requiere, entonces, que ϕ varíe mas de 2π radianes para que se presenten dos R mínimos consecutivos (ver figura siguiente, parte b)

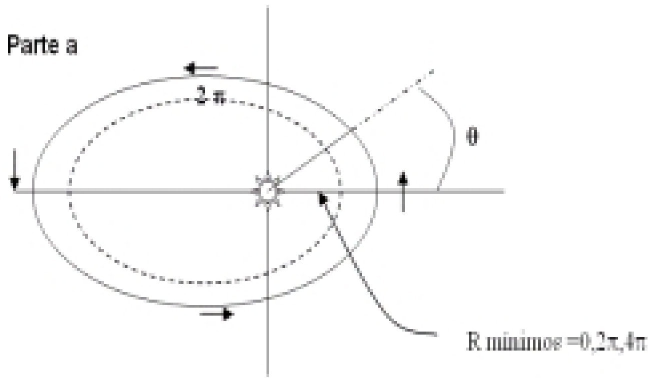

Figura 5.

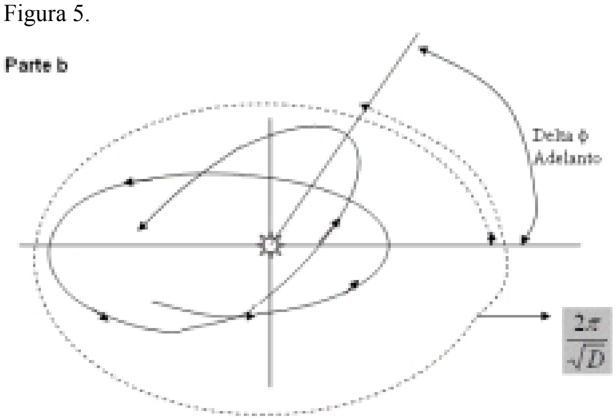

Figura 6.

El adelanto en el perihelio es:

$$\therefore \qquad \Delta\phi - 2\pi = \frac{2\pi}{\sqrt{D}} - 2\pi = 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{D}} - 1\right)$$

Pero: $D = 1 - \frac{2c^2 {m_E}^2 A^2}{b^2}\left(\frac{6m_E}{m_o} - 3\right)$

De donde:

$$\frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2c^2 {m_E}^2 A^2}{b^2}\left(\frac{6m_E}{m_o} - 3\right)}}$$

$$\cong 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2c^2 {m_E}^2 A^2}{b^2}\left(\frac{6m_E}{m_o} - 3\right)\right)$$

Por lo que el adelanto en el perihelio por revolución es:

$$Adelanto = \frac{2\,\pi\,A\,A\,c^2\,{m_E}^2\,3}{b^2}\left(\frac{2m_E}{m_o} - 1\right)$$

Ahora, como los elementos de las órbitas se conocen, gracias a los astrónomos, con mucha precisión, este adelanto se expresa en términos de esos elementos.

$$\frac{u_{\min} + u_{\max}}{2} = \frac{L}{D} = \frac{A\,c^2 {m_E}^2\left[3\frac{m_E}{m_o} - 2\right]}{b^2\left[1 - \frac{2A\,c^2 {m_E}^2}{b^2}\left(\frac{6m_E}{m_o} - 3\right)\right]}$$

Que puede escribirse, sin introducir errores apreciables, exactamente como en Relatividad General:

$$\frac{Ac^2\ {m_E}^2}{b^2} = \frac{\left(u_{\min} + u_{\max}\right)}{2\left[3\frac{m_E}{m_o} - 2\right]}$$

Por lo que:

$$Adelanto = \frac{6\,\pi\ A\left(u_{\min} + u_{\max}\right)}{2}\,\frac{\left(\frac{2m_E}{m_o} - 1\right)}{\left(\frac{3m_E}{m_o} - 2\right)}$$

Ahora, la velocidad de los planetas es mucho menor que la de la luz, y la masa de su energía potencial es también mucho menor que su masa en reposo, lo que significa que la masa de su energía total, mE, se puede igualar a su masa en reposo m_o, con la precisión requerida, claro que esto sería aceptar una energía total nula, como la predicha por la teoría del Universo Inflacionario. Aceptando, de todas formas, lo anterior, obtenemos:

$$Adelanto\ del\ \ perihelio = 3\,\pi\ A\left(u_{\min} + u_{\max}\right)$$

!!Exactamente el mismo de la Relatividad General!!!

7. CONCLUSIONES

Resulta que el famoso avance del perihelio se puede explicar con la mecánica Newtoniana y la corrección por la masa variable. No es necesario en absoluto curvar el espacio. El segundo caso, cuando la masa pequeña pasa rozando al cuerpo grande, permite calcular la desviación del rayo de luz, y se estudiará posteriormente. Este artículo está en la línea de un entendimiento más razonado de esos fenómenos relativistas.

8. BIBLIOGRAFIA

[1] BORN Max, , Einstein's Theory of Relativity, Dover – New York 1965

[2] DIÉZ Saldarriaga Emiro, Anotaciones sobre Relatividad y Teoría Electromagnética. Seminario física conceptual 1985

[3] EINSTEIN, A. El significado de la relatividad, Planeta – Agostini

[4] EDDINGTON, Sir Arthur. Space, time and gravitation. Harper, New York 1959.

[5] SOKOLNIKOFF, I.S, Análisis Tensorial. Limusa Mexico 1976

[6] STILLMAN, Drake, La manzana de Newton y el diálogo de Galileo