Didáctica de las Matemáticas y Psicología

M.ª VICTORIA G. ARMENDÁRIZ,
CARMEN AZCÁRATE, JORDI DEULOFEU
Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

En la primera parte se presenta una aproximación a la Didáctica de las Matemáticas como una disciplina autónoma, interdisciplinar, con un campo teórico y práctico propio, en fase de desarrollo. Seguidamente se describen las características de los planteamientos didácticos de la educación matemática en los últimos 30 años, poniendo de relieve las claves psicológicas que están informando las distintas tendencias. Finalmente se resumen las líneas de trabajo que hoy se perfilan dentro de la investigación en Didáctica de las Matemáticas, con especial mención de los trabajos dedicados a los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de conceptos matemáticos, con breves referencias al estudio del comportamiento matemático y del aprendizaje de las Matemáticas desde una perspectiva social.

Palabras clave: Didáctica de las Matemáticas; Investigación en didáctica de las Matemáticas; Procesos psicológicos y aprendizaje de las Matemáticas; Comportamiento matemático; Educación matemática.

Mathematic Didactics and Psychology

Abstract

First, Maths Didactics is presented as an independent and inter-disciplinary area of study still under development, with its own theoretical and practical field. Then, didactic theories on mathematics education during the past 30 years are described, with a special emphasis on psychological factors explaining different trends. Finally, the article summarizes different lines of work taking shape within research into Mathematics Education, with particular attention paid to studies on the cognitive processes involved in learning mathematical concepts. From a social viewpoint, there are brief references to the study of mathematical behaviour and maths learning.

Key words: Mathematic Didactics; Research into Mathematics Education; Psychological processes and maths learning; Mathematical behaviour; Mathematics Education.

Correspondencia con autores: Dpto. de Didáctica de Matemáticas y Ciencias Experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona. Comp. Bellaterra. 08193 Barcelona.

APROXIMACION AL CONCEPTO DE DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS

Desde muy atrás en la Historia de la Educación se venía considerando que el currículum debía construirse sobre principios pedagógicos y psicológicos. Sin embargo, ha sido un proceso largo y difícil el que ha permitido dotar de rigor a un campo dominado a la vez por justificaciones y argumentos filosóficos e intuiciones pedagógicas.

Al tiempo que la noción de currículum ha llegado a constituirse en constructo indispensable para comprender la práctica educativa institucionalizada y las funciones que una sociedad concreta otorga a la escuela, su análisis necesita ser abordado multidisciplinarmente. En este contexto, el ámbito de la didáctica, uno de los que contemplan el fenómeno educativo, aparece vinculado a la práctica aunque no deba ser reducido a un saber práctico/técnico.

Nuestra primera ocupación será clarificar qué entendemos por Didáctica de las Matemáticas y cuál es la amplitud de este concepto.

El aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas son objeto de estudio de la Didáctica de las Matemáticas y será el didacta el que modelará el currículum interpretando, en primer lugar, un saber disciplinar para elaborar un conocimiento a enseñar. Este proceso exige reconceptualizaciones que sólo serán posibles tras los filtros epistemológicos, socioantropólogos y psicopedagógicos. El «saber a enseñar» que surge de esta transposición didáctica (Chevallard, 1985) es ya un producto de otra naturaleza, de naturaleza didáctica. Pero, además, dado el componente finalista de la acción didáctica, ningún producto didáctico puede surgir al margen de las teorías psicológicas que explican el comportamiento inteligente del ser humano, su estructura y su génesis, ni del proyecto educativo, globalmente considerado, que preside un currículum concreto.

Es evidente, pues, que la Didáctica, aun siendo una ciencia aplicada, no se identifica con la práctica educativa. El saber práctico de la Didáctica es fruto de la mediación que hace el didacta seleccionando información de distintos ámbitos y creando un cuerpo de conocimiento a partir de la experiencia didáctica. El conjunto de preguntas a las que trata de dar respuesta la Didáctica de las Matemáticas nos remite a las distintas áreas de conocimiento, cuya diversidad pone de manifiesto la complejidad de la elaboración del conocimiento didáctico. Debemos citar, como fuentes inmediatas, las siguientes áreas:

— La materia científica cuya enseñanza se plantea (Matemáticas) con su estructura específica.

— La Historia y la Epistemología de la Ciencia que explican la génesis, el desarrollo y la evolución del conocimiento científico y en particular de las Matemáticas.

— La Sociología, que permite plantearse la interdependencia entre Ciencia y Sociedad y su influencia en la formación de los individuos de una sociedad democrática cada vez más inmersa en la tecnología.

— La Lingüística cuyo papel es fundamental para comprender muchos de los problemas conceptuales propios de las dificultades de aprendizaje.

— La Psicología que aporta el conocimiento del desarrollo del individuo y de los modelos teóricos para el análisis del conocimiento a enseñar, del aprendizaje y de los procesos de enseñanza/aprendizaje en los que el profesor actúa como mediador.

— La Pedagogía que aporta el análisis de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje en el marco de las instituciones escolares.

Todo ello sin dejar de lado otras áreas, como la Comunicación y la Tecnología, con las cuales existe una relación cada vez más importante.

Como consecuencia de esta variedad de áreas afines, es frecuente creer por ejemplo, que la formación de los profesores de Matemáticas consiste en el aprendizaje de las teorías psico-socio-pedagógicas, lingüísticas, científicas o epistemológicas. Sin embargo, entendemos que la Didáctica de las Matemáticas es una disciplina autónoma, interdisciplinar, con un campo teórico y práctico propio, en fase de desarrollo pero cada vez más definido, y que, por tanto, no se puede considerar como una simple suma de partes como son las áreas del saber que constituyen sus fuentes y con las que necesariamente se relaciona.

Por otro lado, queremos destacar el carácter profesional de la Didáctica de las Matemáticas, carácter que le liga a la práctica docente y a los problemas concretos con que se encuentran los enseñantes de Matemáticas; en este sentido se han desarrollado técnicas y métodos de análisis que permiten un conocimiento cada vez más preciso de lo que sucede en el aula. Cabe destacar igualmente la importancia que tiene para los enseñantes el desarrollo de una metodología que propicie el hábito de análisis de los problemas concretos que aparecen con unos alumnos concretos, en un aula y en unas condiciones determinadas, análisis que propiciará la comprensión de los mecanismos profundos del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Debido a la variedad de las fuentes científicas y de aplicación, dentro de la Didáctica de las Matemáticas, nos encontramos con una amplia gama de campos de investigación:

— Aquellos que hacen referencia al pensamiento del profesor y a la influencia de su marco conceptual sobre sus pautas de comportamiento. Intervienen aquí las investigaciones sobre las Matemáticas como objeto de enseñanza, las ideas de los profesores sobre las Matemáticas que enseñan, sobre qué Matemáticas hay que enseñar y por qué, sobre la forma en que los alumnos aprenden, sobre sus ideas acerca de las relaciones profesor-alumno, etcétera.

— Aquellos que hacen referencia a los estudiantes, que comprenden aspectos tan diversos como son las ideas de los alumnos, las dificultades que tienen en el aprendizaje en general y en aspectos concretos de la materia, la influencia del medio social, cultural, afectivo sobre el aprendizaje, el papel de la motivación, de los intereses de los alumnos, de las actitudes y de las aptitudes, las interacciones entre estudiantes y entre profesor y estudiantes, etcétera.

— Aquellos que hacen referencia a las estrategias de enseñanza en las que se contemplan desde nuevas propuestas curriculares y nuevos recursos de enseñanzas concretas hasta teorías acerca del aprendizaje mediante resolución de problemas, etcétera.

— Aquellos que hacen referencia al marco en el que se desarrolla la enseñanza (contexto) como es el centro escolar, el aula, el taller, el laboratorio, las interrelaciones alumno-alumno, profesor-alumno, profesor-clase, etcétera.

No obstante, a nosotros nos interesa en este momento clarificar la utilización que hace la didáctica de la información que nos proporciona la psicología y, en el mejor de los casos, tratar de precisar como queda integrado el conocimiento psicológico en el ámbito teórico de la Didáctica de las Matemáticas.

Para ello nos proponemos, en primer lugar, revisar las características de los planteamientos didácticos de la educación matemática en los últimos 30 años, poniendo de relieve las claves psicológicas que están informando las distintas tendencias para concluir con las líneas de trabajo que hoy se perfilan dentro de la investigación en Didáctica de las Matemáticas.

EVOLUCION Y DESARROLLO DE LOS PLANTEAMIENTOS DIDACTICOS EN LA EDUCACION MATEMATICA, DURANTE LOS ULTIMOS 30 AÑOS

A partir de los años 60 en EEUU y países del ámbito occidental se da una evolución en los planteamientos educativos en Matemáticas que tiene su origen no sólo en la investigación propia y que refleja la influencia de ámbitos científicos ajenos a las Matemáticas, siendo la Psicología la que va a marcar, en gran medida, la pauta de las tendencias didácticas.

Las observaciones de Howson, Keitel y Kilpatric (1981) en su obra «Curriculum Development in Mathematics» nos van a permitir caracterizar esta evolución que dichos autores refieren fundamentalmente a EEUU y ámbito europeo en general y que pueden hacerse extensivas a España, aunque en nuestro caso tengamos que remitirnos, como punto de partida, a la reforma que propone la ley de 1970, en tanto marca el inicio de una renovación curricular y comienza a tener entidad el cambio en la enseñanza de las Matemáticas. A lo largo de este tiempo surgen distintas corrientes de pensamiento, algunas simultáneamente y otras como reacción a las iniciales.

Aunque los límites entre los distintos enfoques son fluidos y la cronología no puede ser precisa, sí parece clarificador el estudio y distinción de tres tendencias a través de las cuales se reconoce la influencia de determinadas corrientes psicológicas. Dentro de esta evolución se desencadena un importante movimiento, que marca la etapa, orientado por un enfoque conceptual de la enseñanza de las Matemáticas y en el que se ponen en marcha diversos proyectos con el objeto de determinar cuál es la mejor manera de enseñar a los niños y niñas los conceptos y principios que aportan coherencia al contenido de las Matemáticas.

Nos ocuparemos en primer lugar de la corriente conductista para centrar luego nuestra atención en el enfoque estructuralista y el formativo. Concluiremos este apartado ocupándonos de la perspectiva constructivista.

La corriente conductista

Durante mucho tiempo la Psicología se había ocupado de las habilidades de cálculo y de cómo mejorar su enseñanza por medio de la organización de los ejercicios, tipos de ejercicios, etc. Con el enfoque conductista se pretendía mejorar el aprendizaje de los alumnos y realizar una educación matemática más eficaz que mejorara sustancialmente las habilidades matemáticas de los ciudadanos.

A partir de una concepción del aprendizaje según la cual éste se produce como producto de un funcionamiento cognitivo que supone conexiones de estímulo/respuesta, los programas podrían elaborarse racionalmente sobre la base de estímulos/respuesta sucesivos y los resultados de este proceso podrían objetivarse en cambios observables en la conducta del alumno.

Por medio del «análisis de tareas» se identifican los objetivos elementales que constituyen otro complejo y los objetivos, expresión de metas de aprendizaje, quedan jerarquizados. El análisis explícito de los procesos subyacentes a distintas tareas podía mejorar la comprensión de cómo aprenden las personas un conjunto de capacidades, permitiendo y justificando así la inferencia de principios y normas para el proceso de enseñanza y para el diagnóstico de dificultades de aprendizaje.

El principio de ordenación que se desprende de las jerarquías de aprendizaje ha sido tenido en cuenta para ver cómo se podían construir las capacidades complejas a partir de las más sencillas. Por otra parte, el método se presentaba como un componente neutro, pudiendo adaptarse al contenido que necesitaba un currículum concreto. La matemática tradicional se adaptaba perfectamente a la necesidad de dividir el contenido en tareas y ejercicios con la posibilidad de evaluar cada paso.

Este enfoque psicopedagógico ha promovido planteamientos didácticos en los que:

— El análisis de jerarquías de aprendizaje es utilizado como criterio para plantear objetivos perfectamente secuenciados desde una lógica disciplinar, con lo que la llegada del «sentido» se aplaza hasta lograr la comprensión de la organización global, forzando en el alumno las exigencias de motivación y de dominio lingüístico.

— Se da una gran importancia a la «práctica» y a la ejercitación de rutinas con la consiguiente hipertrofia de lo sintáctico.

— Las secuencias en el aprendizaje son enormemente rígidas.

La investigación por su parte afecta principalmente a la ampliación y refinamiento de los instrumentos de control conductista. Así se simplifica el proceso al profesor, al estudiante y a la administración, además de hacer aparecer la educación matemática como algo neutro y las Matemáticas como una colección de saberes aislados sin ninguna conexión ni vinculación a otras ciencias.

El «giro» cognitivo y su influencia en la Didáctica de las Matemáticas

Aunque algunos autores, como los anteriormente citados Howson, Keitel y Kilpatric (1981) y también Resnick y Ford (1990), distinguen entre la aproximación estructuralista y la formativa en los planteamientos didácticos de las Matemáticas, no parece que en nuestro país se dé por separado la influencia de Bruner y Piaget que en el caso americano son tomados como inspiradores de las dos corrientes señaladas. No obstante, nosotros distinguiremos ambas corrientes, aunque en España no se puedan apreciar los matices diferenciadores de ambas tendencias y sólo podamos reconocer a través de las aportaciones de Dienes la influencia de Bruner en los planteamientos didácticos en Matemáticas.

Desde finales de los años 50 se abre un período de revalorización del currículum de Matemáticas. Es de destacar que en un breve período de tiempo se celebran dos conferencias, una en 1959 en Woods Hole —Massachussetts— y otra en Cambridge (1963) en el mismo estado (Howson et al., 1981; Resnick, 1991) dedicados a revisar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. La primera de ellas explora la naturaleza del aprendizaje y de la enseñanza de las Matemáticas y la segunda se centra en revisar el contenido de la enseñanza en las escuelas con el objeto de ampliarlo sustancialmente. Ambas conferencias apuestan por la enseñanza de las Matemáticas como una disciplina estructurada de forma que las interrelaciones entre los conceptos quedaran puestas de relieve así como las estructuras conceptuales que subyacen a los distintos procedimientos matemáticos.

Aunque no podemos asegurar hasta qué punto es tomada la psicología como marco teórico de referencia para las nuevas propuestas didácticas, cabe señalar la participación de Bruner en el movimiento que aboga por la aproximación estructuralista.

Tomamos un texto de Bruner en tanto clarifica el propósito estructuralista en Matemáticas:

> ... «la enseñanza de temas o habilidades matemáticas sin clarificar su contexto dentro de la estructura fundamental más amplia (...) es antieconómica en varios sentidos. En primer lugar tal enseñanza hace muy difícil al estudiante generalizar lo que ha aprendido a lo que encontrará más adelante. En segundo lugar, el aprendizaje que no ha conseguido llegar a una comprensión de los principios generales tiene poca recompensa en términos de satisfacción intelectual (...). En tercer lugar, el conocimiento que se ha aprendido sin una estructura (...) es fácil que se olvide» (Resnick, ob. cit, pág. 130).

Para el enfoque estructuralista el propósito de transmitir las estructuras de las estructuras científicas no es la adquisición del conocimiento de estas estructuras por los alumnos; no es tanto el tratar las estructuras como contenido educativo como el «desplegar» la esencia explicativa existente bajo lo particular. Así, a largo plazo, se hace posible la correspondencia entre estructuras científicas y cognitivas promoviendo los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos (Howson et al., 1981).

Bruner asume el problema del cómo enseñar y mantiene que los alumnos cuyas estructuras cognitivas no alcancen los grados de complejidad adecuados para asimilar «las estructuras matemáticas» (no necesariamente las algebraicas) pueden acceder a ellas de forma intuitiva e incluso emprender generalizaciones y abstracciones aun cuando sólo perciban parte de lo relacionado y lo generalizado.

La combinación de actividad-descubrimiento y el desarrollo del currículum en espiral se convierten en recursos metodológicos que permiten al alumno comportarse en cierta medida como un científico que va «rellenando» tales estructuras; además asegura que el progreso tendrá lugar secuencialmente desde los niveles más bajos a los más altos y de lo menos a lo más complejo. Conceptos como conjunto, función, grupo de transformaciones, isomorfismo pueden ser introducidos de forma rudimentaria a los alumnos jóvenes y ser presentados en sucesivas ocasiones hasta conseguir una comprensión más amplia y profunda de los mismos. Es necesario advertir, sin embargo, porque puede dar la impresión contraria, que la concepción de la ciencia en que se basa esta propuesta de matemáticas escolares no es el edificio acabado de las Matemáticas sino una forma de aproximación a su estructura que favorezca su comprensión de forma gradual, insistiendo para ello en su organización. De esta forma el alumno va elaborando un conocimiento integrado de las distintas partes de las Matemáticas, percibiendo lo más esencial del sistema conceptual y del método matemático.

Como se puede suponer, la cuestión que se estaba planteando era conseguir que el aprendizaje de las Matemáticas no fuera «opaco»; para ello debían ser sustituidas ciertas prácticas escolares que abusaban de los ejercicios de cálculo numérico y de planteamientos que promovían aprendizajes mecánicos, por una aproximación más conceptual y comprensiva de las Matemáticas, bajo el supuesto de la competencia cognitiva del alumno.

Bruner había puesto en marcha un programa de investigación sobre los procesos cognitivos propios del pensamiento y del aprendizaje y, apoyándose en parte en las ideas de Piaget, se centró en cómo se representan mentalmente los niños las experiencias interactivas con su entorno que constituyen la base del aprendizaje; describe tres modos de representación, *enactiva, icónica* y *simbólica.*

La representación *enactiva* es «un modo de representar eventos pasados mediante una repuesta motriz adecuada» (Resnick, ob. cit., p. 139); la forma de representación enactiva es la más elemental, la menos elaborada, pero puede poseerla el adulto igual que el niño. El segundo modo de representación, *icónico,* como su nombre indica, se recupera en la memoria como una imagen mental figurativa que abreviará el suceso, presentando solamente los detalles más importantes. La representación *simbólica* es otra forma de capturar representaciones en la memoria y tiene como base la competencia lingüística aunque evidentemente en Matemáticas, la representación simbólica hace referencia no sólo a definiciones conceptuales sino a leyes, propiedades, estrategias, y supone la forma más elaborada de representación.

Como se puede inferir, para cualquier idea o problema se podía encontrar una forma lo suficientemente sencilla de presentación a los alumnos, de forma que fuera reconocible y/o comprensible por ellos, en función del nivel de desarrollo cognitivo o del nivel del desarrollo conceptual.

La teoría de las representaciones de Bruner y los principios estructuralistas de Bruner y Piaget han tenido repercusiones importantes en el desarrollo de la didáctica de las Matemáticas y concretamente en la aparición de distintos tipos de materiales entre los que se encuentran los desarrollos por Dienes (Dienes, 1970, y Dienes y Golding, 1980).

Dienes, profesor de Matemáticas, conocedor de la teoría piagetiana trabajó con Bruner en un proyecto de matemáticas experimentales en Harvard y defendió la importancia de incorporar los descubrimientos de la investigación psicológica a la enseñanza de las Matemáticas. Es ampliamente conocido por sus materiales manipulativos y por su obra escrita que recoge entre otras ideas su teoría del proceso cíclico del aprendizaje de las Matemáticas, con una sucesión de estadios: juego libre, detección de regularidades, representación, descripción verbal y definición (Dienes, 1970). Como se puede observar se aprecia un gran paralelismo entre su secuencia y la formulación de los modos de representación de Bruner, que en alguna medida puede interpretarse como teoría de las etapas de desarrollo del intelecto.

Dienes creía que los niños son constructivistas por naturaleza, más que analíticos y que se construyen una imagen de la realidad a partir de sus experiencias con los objetos del mundo. Este proceso depende en gran medida de una «exploración activa» como puso de manifiesto Piaget. Dado que las relaciones y pautas matemáticas no son evidentes, Dienes propone que se «materialicen» estas estructuras en forma de materiales para la enseñanza. Podríamos también decir que se concretaran o que tomaran cuerpo características y propiedades tanto cuantitativas como cualitativas, permitiendo aproximaciones «concretas» a cuestiones que tradicionalmente sólo eran manipuladas simbólicamente.

Siguiendo la sucesión de estadios antes descritos para que los conceptos puedan abstraerse, según Dienes, a lo largo de un proceso deben presentarse materializaciones múltiples; estas materializaciones deben diferenciarse entre sí —variabilidad perceptual— para que el concepto se desarrolle independientemente de las formas específicas y además deben permitir la manipulación de toda la gama de situaciones matemáticas de un mismo concepto o estructura conceptual, favoreciéndose así la generalización.

Estos planteamientos han tenido detractores, entre los que cabe destacar a Freudenthal (1984), alegando que hay abstracciones que no pueden ser captadas por los alumnos pese a ser materializadas. Freudenthal advierte que se intentan materializar los conceptos desnudos y que estas concreciones son habitualmente falsas, en tanto no pueden reflejar los rasgos esenciales de los conceptos a los que remiten, ni siquiera a determinadas facetas de dichos conceptos. Frente a ello, Freudenthal aboga por lo que él llama la *fenomenología didáctica.*

Según Freudenthal lo que una «fenomenología didáctica» puede hacer es preparar el enfoque contrario: empezar por los «phenomena» que solicitan ser organizados y, desde tal punto de partida, enseñar al estudiante a manipular los medios de su organización. Los conceptos, estructuras e ideas matemáticas sirven para organizar los «phenomena» tanto del mundo real como imaginario. Así los números organizan el «phenomenon» de la cantidad, las figuras geométricas triángulo, paralelogramo, rombo o cuadrado organizan el fenómeno contorno/forma, etcétera.

Los objetos matemáticos son «nooumena» pero un aspecto o una parte de las Matemáticas puede ser experimentado como un phenomenon; los números son noumena, pero trabajar con números es un phenomenon. En vez de hablar de adquisición de conceptos Freudenthal habla de constitución de *objetos mentales* que desde su punto de vista precede a la adquisición de conceptos y puede ser altamente efectivo incluso si no le sigue la adquisición de conceptos; señala que hablar de manipulación de objetos mentales es más importante que la división de representaciones en enactivas, icónicas y simbólicas. Por ello, sustituye las concreciones o materializaciones de conceptos por la constitución y manipulación de objetos mentales que van transformándose. En la primera aproximación las concreciones tienen un significado transitorio; así «la división del pastel» puede ser olvidada tan pronto como el estudiante tenga un dominio algorítmico de las fracciones.

Por otra parte, Freudenthal señala que plantear primero los conceptos y después las aplicaciones, como ocurre en las aproximaciones didácticas conceptualistas, representa una estrategia virtualmente invertida, frente a la aproximación didáctica por constitución de objetos mentales.

Como ya hemos señalado anteriormente, vamos a centrarnos en la aproximación formativa ligándola al movimiento de la matemática moderna. Por otra parte la figura de Piaget que debe entenderse, a nuestro juicio, bajo el «paraguas» estructuralista, vamos a considerarla en relación al nuevo enfoque.

La aproximación formativa en la Didáctica de las Matemáticas y el movimiento de la matemática moderna

Nuevamente tenemos que referirnos a Howson, Keitel y Kilpatrick para precisar que si bien estos autores, que hemos tomado como fuente principal para el análisis de la evolución de los planteamientos en Didáctica de las Matemáticas, distinguen entre el desarrollo de la «nueva matemática» y la aproximación formativa, nosotros entendemos que aun siendo cosas distintas por su origen, fundamentalmente, convergen en su justificación didáctica, en tanto están la figura de Piaget y la Teoría Genética detrás de las justificaciones didácticas que se han aducido.

En relación a la aproximación formativa, Howson y sus colegas señalan que si bien sus principios educativos han sido formulados sin referencia a una escuela en particular, éstos se apoyan claramente en las ideas de Piaget y de otros psicólogos que abogan por el proceso constructivo del conocimiento.

Desde esta perspectiva, el papel de la educación escolar consiste en garantizar el desarrollo de unas potencialidades innatas a través del diseño de experiencias educativas que ofrezcan las condiciones óptimas para el desarrollo de las habilidades cognitivas que conforman los distintos niveles de inteligencia operatoria. El/la profesora deberá crear situaciones en las que los alumnos puedan deleitarse con «actividades reales» que promueven el aprendizaje. Ha de estar provisto de ideas y materiales apropiados para dar una representación paradigmática de los procedimientos, ofreciendo al mismo tiempo una amplia relación de sugerencias en las que pueda recrearse la curiosidad del alumno. Los materiales didácticos servirán meramente como ayuda hacia el dominio de situaciones y como refuerzo de los procesos de aprendizaje.

Nos resulta difícil y arriesgado precisar hasta qué punto aparece vinculado en España el movimiento de la «matemática moderna» a un enfoque «formativo» de las Matemáticas en el sentido expuesto, pero creemos plausible suponer que se ha dado ese vínculo, aunque, como todos sabemos, la «matemática moderna» y su utilización en las aulas de la enseñanza elemental surge, en principio, de una preocupación por aproximar los fundamentos matemáticos a la base de la enseñanza en el marco de una reforma de los contenidos educativos. Sin embargo su justificación didáctica encontró en la Teoría Genética de Piaget razones que nosotros hemos traído aquí a partir de unas breves consideraciones dedicadas a la Didáctica de las Matemáticas que expone el mismo Piaget.

Dice Piaget: ... «la enseñanza de las Matemáticas ha planteado un problema bastante paradójico (...); es difícil suponer que sujetos bien dotados para la elaboración y utilización de las estructuras lógico-matemáticas espontáneas de la inteligencia se encuentren en desventaja en una enseñanza que se refiere exclusivamente a aquello de lo que se derivan tales estructuras (...). Habitualmente se responde de una manera un tanto simple al hablar de «aptitud» para las Matemáticas. Pero si lo que acabamos de suponer en cuanto a las relaciones de esta forma de conocimiento con las estructuras operatorias fundamentales del pensamiento es exacto, la «aptitud» se confunde con la inteligencia misma, lo que no se considera el caso, o se relaciona no con las Matemáticas como tales sino con la forma como se las enseña. Efectivamente, las estructuras operatorias de la inteligencia, aun siendo de naturaleza lógico-matemática, no son conscientes en tanto que estructuras para los niños: son estructuras de acciones u operaciones que ciertamente dirigen el razonamiento del sujeto pero no constituyen un objeto de reflexión para él (...). Por el contrario, la enseñanza de las Matemáticas invita a los sujetos a una reflexión sobre las estructuras pero lo hace por medio de un lenguaje técnico que implica un simbolismo muy particular y exige un grado más o menos alto de abstracción (...). En una palabra, el problema central de la enseñanza de las Matemáticas consiste en ajustar recíprocamente las estructuras operatorias espontáneas propias de la inteligencia con el programa o los métodos relativos a los campos matemáticos enseñados. Este problema se ha ido modificando profundamente en las últimas décadas a causa de las transformaciones de las mismas matemáticas; (...) las estructuras más abstractas y más generales de las Matemáticas contemporáneas se incorporan a las estructuras operatorias naturales de la inteligencia y del pensamiento mucho mejor de lo que lo hacían las estructuras particulares que constituían el armazón de las Matemáticas clásicas y de la enseñanza (...). A pesar del progreso de principio realizado por el retorno a las raíces naturales de las estructuras operatorias, subsiste enteramente el problema pedagógico de encontrar los métodos más adecuados para pasar de estas estructuras naturales pero no reflexivas a la reflexión sobre tales estructurales y a su teorización» (Piaget, 1972, p. 54-59).

Como podemos apreciar hay una justificación del tratamiento de las estructuras algebraicas y en general de la matemática conjuntista en los niveles escolares básicos, aunque se señala el problema pedagógico-metodológico como no resuelto. Es necesario señalar además que para Piaget las Matemáticas definen una especie de «axiomática del pensamiento» y son un producto de una abstracción reflexionante realizada a partir de las propias operaciones intelectuales (y no de los hechos) por lo que las actividades matemáticas serían especialmente adecuadas para estudiar las estructuras de operaciones que definen la inteligencia y un medio especialmente útil y adecuado para promover su desarrollo.

Dejando provisionalmente a un lado las justificaciones de índole psicológica, nos parece importante detenernos un poco más en el movimiento de la «matemática moderna» por la importancia que ha tenido en los planteamientos didácticos de las Matemáticas y su evolución y por la repercusión en toda una generación de alumnos. Además queremos señalar que aunque no hay investigación que acredite o avale nuestra hipótesis, las matemáticas modernas y una determinada «cultura pedagógica» de naturaleza formativa, en el sentido que ha sido expuesta, han ocupado prácticamente una década en la historia de la educación matemática en este país.

Este enfoque en la enseñanza de las Matemáticas se produjo como un producto indirecto derivado del trabajo del grupo Bourbaki, que ofrecía en sus tratados una descripción sistemática de las Matemáticas, reorganizadas para destacar los aspectos estructurales de las mismas y la utilización de un nuevo lenguaje, uniforme y de gran precisión, cuya adecuación para expresar enunciados de manera concisa es indudable. Como resultado de este enfoque llegó a ser posible desarrollar aspectos exigentes de las Matemáticas desde las primeras etapas de la escolaridad. En contraste con el enfoque conductista se vio la reforma del currículum de Matemáticas en términos de renovación de contenido. Se plantearon cuestiones que afectaban a los métodos, pero no se cuestionó la práctica de la enseñanza que siguió apoyándose principalmente en la transmisión del contenido.

Los planteamientos didácticos no partían de preguntarse acerca de cómo tales conceptos básicos podrían introducirse en un nivel elemental de forma consistente, ni del tipo de aprendizaje que promovía en los alumnos.

Por otra parte, con este planteamiento se abandonaba una enseñanza de las Matemáticas que en nuestro caso y merced a las intuiciones de algunos insignes matemáticos como Puig Adam tenía en cuenta los soportes perceptivos que brindaba la geometría con la cual habíamos aprendido Matemáticas muchos de nosotros.

De esta manera los enfoques estructuralistas que propugnaban la búsqueda de los fundamentos formales de las Matemáticas derivaron en unas matemáticas escolares que trajeron un profundo cambio en la enseñanza, fundamentalmente por los nuevos contenidos introducidos.

Como señala Miguel de Guzmán (1991), entre los efectos producidos se pueden distinguir los siguientes:

— Se subrayaron las estructuras abstractas de diversas áreas, especialmente en álgebra.

— Se pretendió profundizar en el rigor lógico y en la comprensión, contraponiendo ésta a los aspectos operativos y manipulativos.

Esto condujo de forma natural al énfasis en la fundamentación a través de las nociones iniciales de la teoría de conjuntos y al cultivo del álgebra, donde el rigor es fácilmente alcanzable.

— La geometría elemental y, en particular, la intuición espacial sufrieron un gran detrimento ya que la geometría es mucho más difícil de fundamentar rigurosamente.

— Con la sustitución de la geometría por el álgebra, la matemática elemental se vació de contenidos y de problemas interesantes.

En la actualidad, se ha impuesto finalmente la opinión según la cual las supuestas ventajas de la introducción de la matemática moderna quedaron minimizadas frente a los graves inconvenientes surgidos.

Los años 80 han dado paso a cambios importantes en todo el mundo y al surgimiento y desarrollo de nuevas escuelas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. Pero antes de pasar a centrarnos en las tendencias actuales, vamos a detenernos en el análisis del enfoque constructivista de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Aportaciones del enfoque constructivista a la Didáctica de las Matemáticas

Como ha señalado Coll (1991), el principio explicativo más ampliamente compartido hoy sobre el aprendizaje en general y el aprendizaje escolar en particular es el que se refiere a la importancia de la actividad mental constructiva del alumno. Este principio lleva a concebir el aprendizaje escolar como un proceso de construcción del conocimiento y la enseñanza como una ayuda a este proceso de construcción. El término «constructivismo» hace referencia a esta convergencia.

Siguiendo al mismo autor, los principios constructivistas sobre el aprendizaje y la enseñanza adquieren una nueva dimensión cuando se insertan en una reflexión más amplia sobre *la naturaleza* y *las funciones de la educación escolar*, haciéndose especialmente fecundos para la reflexión didáctica.

Si su especificidad, la de la educación escolar, reside en garantizar determinados aspectos del desarrollo de los niños y las niñas en una cultura determinada, podemos interpretar la educación matemática como un proceso de «enculturización», como un proceso de inmersión en las formas propias de proceder en Matemáticas, como una forma peculiar de exploración de la realidad (Miguel de Guzmán, op. cit., 1991) que tiene su origen en el enfrentamiento a la complejidad proveniente de la multiplicidad (origen del número y de la aritmética) y a la complejidad que procede del espacio (que da lugar a la geometría) y que más adelante fue la complejidad del símbolo (álgebra); a la complejidad del cambio y de la casualidad determinista (cálculo); a la complejidad proveniente de la incertidumbre en la casualidad múltiple incontrolable (probabilidad y estadística) y a la complejidad de la estructura formal del pensamiento (lógica matemática).

Así pues, hoy se considera a las Matemáticas como un subsistema cultural con características comunes a otros sistemas semejantes y puede decirse que el principal objetivo de cualquier realización matemática, y también de las matemáticas escolares, es contribuir a dar sentido al mundo que nos rodea. En este contexto la noción constructivista une la concepción de la naturaleza de las Matemáticas con la concepción de los procesos de aprendizaje.

Las Matemáticas, pues, son creadas por los seres humanos para responder a visiones sociales del mundo y no son un conjunto platónico de objetos descubiertos en el transcurso del tiempo (Romberg, 1991; Lave et al., 1988). Desde este enfoque el objeto matemático deriva de la acción práctica sobre la realidad física o mental y surge de algo que tiene naturaleza semántica e implica una actividad real y significativa para resolver problemas reales. De aquí que las Matemáticas a enseñar no sean las Matemáticas que se corresponden con este mundo platónico atemporal.

Como ya hemos señalado, desde un planteamiento constructivista del aprendizaje y de la enseñanza, es el alumno el que construye significados y atribuye sentido a lo que aprende, pero es el profesor el que facilitará a los alumnos el acceso al conjunto de saberes que vehiculan los contenidos educativos, engarzando los procesos de construcción de los alumnos con los significados matemáticos que trata la enseñanza (Coll, 1991, op. cit.).

Por tanto, adquiere una importancia esencial que el profesor ahonde en el significado de los saberes matemáticos, que conozca los resortes del pensamiento de los alumnos y que tenga muy en cuenta las exigencias cognitivas que las Matemáticas hacen a los alumnos (Rivière, 1990). Exigencias que como señala Rivière apelan a la «desvinculación» del pensamiento en matemáticas de apoyos concretos (generalmente muy pronto); de abstracción y formalización; de reconocimiento de las condiciones pertinentes de aplicación de reglas, categorías o estrategias generales; de dominio de códigos simbólicos especializados y de traducción de un sistema de representación a otro; exigencias de utilizar un lenguaje cuya función principal es la inferencia, lenguaje no ambiguo, no redundante y no semántico, construido para facilitar el razonamiento matemático; exigencia de una atención selectiva más intensa que en otras materias así como de estrategias de control de sus propios procesos cognitivos ante la necesidad de hacer inferencias, al tiempo que se tienen en cuenta las reglas sintácticas de este nuevo lenguaje. Estos requerimientos cognitivos pueden interpretarse como dimensiones formativas de las Matemáticas; el aprendizaje de las Matemáticas contribuiría de esta forma específica y de otras menos específicas al desarrollo de los alumnos.

Por ello, la planificación y el desarrollo del proceso de enseñanza/aprendizaje habrán de ocuparse de:

— Semantizar los contenidos y los problemas matemáticos desde el principio.

— Proporcionar modelos alternativos de representación, explorando las posibilidades de inferencia que ofrecen dichos modelos.

— Interpretar los «errores» como expresión de una determinada competencia lógico-matemática de la que hay que partir y con la que hay que contar, y preguntarse por «la coherencia» de esas construcciones «provisionales» que hace el alumno.

— Secuenciar y organizar los contenidos de forma que den soporte a un proceso constructivo real del conocimiento matemático, rico en significado y con sentido.

— Utilizar la evaluación como herramienta pedagógica al servicio del alumno y del proceso de enseñanza-aprendizaje, de forma que no pervierta el aprendizaje ni traicione la concepción de las Matemáticas que quiere vehicularse, además de estimular al alumnos a hacer aprendizajes en profundidad.

Todas estas cuestiones y muchas más derivadas de los principios constructivistas pueden ser tomadas como criterios a la hora de analizar y reflexionar sobre las situaciones de enseñanza/aprendizaje. Por otra parte, los principios teóricos constructivistas contribuyen a la clarificación de problemas para ser investigados, además de señalar lagunas en el desarrollo actual de la Didáctica de las Matemáticas a los que trataremos de aproximarnos en el próximo apartado.

Algunas líneas de investigación particularmente relevantes para el desarrollo de la Didáctica de las Matemáticas

En el artículo introductorio al libro *Mathematics and Cognition* (1990), que recoge contribuciones, entre otros, de Vergnaud, Dreyfus y Balacheff y que constituye nuestra fuente principal para el desarrollo de este punto, Fishbein habla de cuatro grandes líneas que conforman el presente y el futuro inmediato de la psicología de la educación matemática:

— La aproximación constructivista.

— Los estudios basados en lo que se conoce por inteligencia artificial.

— Las relaciones entre los aspectos formales, algorítmicos e intuitivos de la actividad matemática.

— Los problemas relacionados con la metacognición.

Entendemos que el gran desarrollo de la investigación en la educación matemática de los últimos años ha llevado a plantear una serie de problemas psicológicos específicos a los cuales los modelos generales de la psicología no daban una respuesta suficientemente satisfactoria. El tratamiento de esos problemas ha originado un sistema particular de conceptos, de forma que algunos conceptos psicológicos usuales adquieren nuevos significados en el campo de la educación matemática: expresiones como esquema conceptual y definición conceptual (Vinner y Tall, 1981), concepción (Artigue, 1990, y Sfard, 1991) y campo conceptual (Vergnaud, 1990 a y b), constituyen, en estos momentos, teorías locales no generalizadas.

Por otro lado, la relación entra abstracto y concreto, formal e intuitivo, algorítmico y heurístico presenta tal variedad de facetas nuevas en el campo de la educación matemática que serían imposibles de predecir partiendo de los conceptos psicológicos generales.

En consecuencia, creemos poder afirmar que, actualmente, la propia psicología cognitiva se está enriqueciendo con las ideas y los hallazgos producidos por la investigación en educación matemática.

No existe un paradigma particular dominante en educación matemática y podemos decir, siguiendo a Balacheff (1990) en su paráfrasis de Kuhn (1962) que «la educación matemática como disciplina está en un estadio precientífico de desarrollo, lo cual es completamente normal en una nueva disciplina». Ahora bien, sí existe la necesidad compartida de una perspectiva teórica general en dicho dominio y se puede afirmar que la psicología de la educación matemática ocupa un lugar privilegiado dentro de las investigaciones en la Didáctica de las Matemáticas, como cuerpo de conocimiento científico.

Una de las cuestiones fundamentales que se plantean actualmente es la determinación de un marco teórico global que permita relacionar las distintas estructuras o jerarquías cognitivas locales referentes a contenidos específicos (como por ejemplo las estructuras aditivas, los conceptos de función, de derivada, de probabilidad...). En este empeño resulta fundamental la aportación que ha supuesto la ampliación del campo de los problemas investigados, hasta hace pocos años muy centrados en los conceptos básicos de las Matemáticas de la enseñanza primaria, a cuestiones relacionadas con las Matemáticas superiores como, por ejemplo, distintos tipos de números (irracionales), las funciones, el infinito (continuidad y límites), las ideas básicas del cálculo (derivada e integral), la probabilidad, etc. Entendemos que es precisamente esta ampliación, con las especificidades observadas en cada caso, la que está enriqueciendo los modelos que describen los procesos cognitivos.

Actualmente y desde la perspectiva de la investigación en Didáctica de las Matemáticas, no se considera el aprendizaje de las Matemáticas solamente desde el punto de vista de la adquisición de competencias y de habilidades, sino que se contempla cada vez más en términos de procesos cognitivos. Se puede afirmar que la problemática está evolucionando desde el estudio de las dificultades de los alumnos hacia el del conocimiento de los alumnos que subyace a dichas dificultades. La investigación acerca de las «ideas previas de los alumnos» ha dado lugar a trabajos en los que aparecen expresiones del tipo «imágenes», «esquemas conceptuales» o «concepciones» en las que se reconoce una construcción del conocimiento por parte del que aprende, en una situación de enseñanza. Por tanto, a partir de la observación de los procedimientos y de los errores de los alumnos, se intenta explicar su origen.

En el marco de esta ponencia, nos centraremos en la descripción de algunos de los modelos que se utilizan en la investigación de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de conceptos matemáticos. También nos referiremos brevemente a algunas investigaciones que se ocupan del comportamiento matemático y de otras que contemplan el aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva social.

Modelos y procesos cognitivos

El problema de la falta de paradigma, a la que nos hemos referido anteriormente, se manifiesta en la diversidad de modelos que las distintas líneas de investigación utilizan para describir la naturaleza del conocimiento de los estudiantes. En efecto, existen varios términos que permiten distinguir entre un concepto matemático y el resultado del proceso de adquisición del concepto en la mente de cada individuo; en general se reconoce la existencia de un conocimiento del alumno y de una posible distancia entre dicho conocimiento individual y el conocimiento científico de referencia.

Vamos a exponer brevemente algunos de los modelos que se utilizan en la investigación de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de conceptos matemáticos.

a) *Imagen conceptual y visualización*

En su estudio de las ideas de los alumnos acerca del concepto de función, Vinner (1983) establece una definición de *imagen mental* que tiene una persona de un concepto matemático como el conjunto de todas las imágenes asociadas al concepto en la mente de la persona. En general, considera que la palabra imagen incluye cualquier representación visual del concepto, incluidos los símbolos. Así por ejemplo, la imagen mental que un estudiante tiene de la función cuadrática puede incluir la gráfica de la función, una tabla de valores y/o una expresión del tipo $y = ax^2$.

En relación con la noción de imagen mental, varios autores han desarrollado el concepto de *visualización.* Zimmermann y Cunningham (1991) definen la visualización matemática como el proceso de formación de imágenes, que pueden ser mentales o materiales (con papel y lápiz o con un soporte tecnológico), y de utilización efectiva de dichas imágenes para la comprensión y el descubrimiento matemáticos.

El proceso de visualización puede producirse en dos direcciones:

— la interpretación y la comprensión de modelos visuales

— la habilidad para traducir a imagen visual una información recibida en forma simbólica.

La visualización es un proceso muy presente en el aprendizaje de las Matemáticas ya que se pueden construir modelos visuales que describen una buena parte de las estructuras matemáticas subyacente a un concepto. La aparición de los ordenadores en las clases ha motivado el creciente interés por el desarrollo de la capacidad de representación visual. Se ha comprobado que existe una influencia de las representaciones visuales tanto sobre las representaciones simbólicas como sobre los procesos de abstracción.

b) *Esquema conceptual y definición conceptual*

En su estudio de los problemas de aprendizaje de los límites de sucesiones, de límites de funciones y de continuidad, Tall y Vinner (1981) se refieren a la diferencia que existe entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos utilizados para concebirlos. A efectos de clarificación del lenguaje nos parece relevante la distinción que establecen y que consiste en considerar por separado:

— La *definición del concepto* como una secuencia de palabras o una definición verbal que explica el concepto con precisión. Se podrá distinguir entre las definiciones formales, aceptadas por la comunidad científica de los matemáticos, y las definiciones personales que utilizan las personas como construcción o reconstrucción de una definición formal.

— El *esquema conceptual* como una expresión que describe la estructura cognitiva de un individuo, asociada a un concepto matemático, que incluye todas las imágenes mentales junto con las propiedades y los procesos asociados a dicho concepto.

Nos parece particularmente interesante la puntualización que, ocho años después, hacen Vinner y Dreyfus (1989) en la que se expresan de la manera siguiente:

> «Todos los conceptos matemáticos excepto los primitivos, tienen definiciones formales. Muchas de estas definiciones se introducen a los estudiantes de enseñanza secundaria o universitaria en un momento o en otro. Por otra parte, los estudiantes

no utilizan necesariamente la definición cuando deciden si un objeto matemático dado es un ejemplo o no del concepto. En muchos casos, él o ella deciden sobre la base de un esquema conceptual, es decir, un conjunto de todas las imágenes mentales del estudiante asociadas al concepto, juntamente con todas las propiedades que le caracterizan. (Por imagen mental entendemos cualquier clase de representación: imagen, forma simbólica, diagrama, gráfica, etc.) El esquema del estudiante es el resultado de su experiencia con ejemplos y contraejemplos del concepto. Por tanto, el conjunto de objetos matemáticos que el estudiante considera ejemplos del concepto no es necesariamente el mismo que el conjunto de objetos matemáticos determinados por la definición [formal]. Si estos dos conjuntos no son el mismo, el comportamiento del estudiante puede ser diferente del que espera el profesor. Para mejorar la comunicación necesitamos comprender por qué se da esta diferencia; por tanto, es importante explorar los esquemas que tienen los estudiantes de varios conceptos matemáticos.»

De esta teoría se derivan una serie de consecuencias para la enseñanza: la necesidad de dedicar mucho tiempo a observar y comprender las ideas y los comportamientos espontáneos de los estudiantes cuando se enfrentan con problemas de Matemáticas y la importancia de adaptar los métodos de enseñanza a aquellos que utilizan los alumnos de una manera natural.

c) *Conceptos y concepciones*

Varios autores utilizan los términos concepto matemático y la expresión concepciones de los individuos o de los alumnos.

Artigue (1990), por ejemplo, analiza la compleja trayectoria de la noción de *concepción* en la comunidad didáctica francesa y dà su propia definición, estableciendo un paralelismo entre concepto matemático y concepción:

«De la misma manera que en un concepto matemático se distingue:

— la noción matemática tal como se define en el contexto del saber sabio en una época dada,

— el conjunto de los significantes asociados al concepto,

— la clase de los problemas en cuya resolución adquiere su sentido,

— los instrumentos: teoremas, técnicas algorítmicas, específicas del tratamiento del concepto;

en las concepciones de los sujetos se distinguirán diversas componentes, y, en particular:

— la clase de las situaciones-problemas que le dan sentido al concepto para el alumno,

— el conjunto de los significantes que es capaz de asociarle, en particular las imágenes mentales,

— las expresiones simbólicas,

— los instrumentos, teoremas, algoritmos de los que dispone para manipular el concepto.»

Por otra parte, Sfard (1991) establece también distinciones entre *concepto* matemático, que designa las ideas matemáticas en su forma «oficial» como constructos teóricos que forman parte de lo que ella llama «universo formal del conocimiento ideal», y *concepción* matemática que designa todo el conjunto de representaciones y asociaciones internas del individuo y que evoca el concepto; se puede decir que una concepción es el correspondiente del concepto en el «universo interno y subjetivo del conocimiento humano».

A diferencia de los objetos materiales los constructos matemáticos son totalmente inaccesibles a nuestros sentidos y sólo se pueden ver con los ojos de nuestra mente. De hecho, cuando dibujamos una función o escribimos un número sabemos que el signo del papel es una entre muchas representaciones de una entidad abstracta que no puede ni verse ni tocarse. La capacidad de «ver» de alguna manera esos objetos invisibles resulta ser una de las componentes de la habilidad matemática.

Una de las razones de la complejidad del conocimiento matemático es precisamente que la mayoría de las nociones matemáticas pueden jugar un papel de procesos o de objetos, según la situación del problema o la conceptualización del estudiante (Dreyfus, 1990). De acuerdo con dicha distinción, Sfard establece dos tipos de concepciones: las *concepciones estructurales* cuando se consideran los conceptos matemáticos como objetos abstractos y las *concepciones operacionales* cuando se tratan las nociones matemáticas como procesos, algoritmos y acciones.

Nos parece interesante señalar que Sfard se ocupa del proceso de formación de conceptos y distingue tres etapas que corresponden a tres grados de estructuralización: interiorización, condensación y «reificación» (en inglés «reification», del latín *res,* cosa).

Interiorización: la persona entra en contacto con los procesos que van eventualmente a dar lugar a un nuevo concepto. Dichos procesos son operaciones con objetos matemáticos de nivel más elemental. Gradualmente la persona se va familiarizando y adquiriendo las habilidades propias de dichos procesos.

Condensación: es un período en el cual se concentran las largas secuencias de operaciones en unas unidades más manejables. La persona se siente cada vez más capaz de pensar en un proceso dado como un todo sin necesidad de entrar en los detalles. En este momento se puede dar un nombre al concepto que nace, se hace cada vez más factible la combinación de procesos, hacer comparaciones y generalizaciones, y aumenta la facilidad para alternar diversas representaciones del concepto. Este período de condensación dura mientras la nueva entidad permanece estrechamente unida a un cierto proceso.

«Reificación»: cuando la persona es capaz de concebir la nueva noción como un objeto matemático en sí mismo decimos que el concepto ha sido «reificado». La «reificación» se define como un cambio ontológico, una habilidad repentina para ver algo familiar desde una nueva perspectiva.

Las etapas de interiorización y de condensación son graduales y cuantitativas, mientras la «reificación» es un salto instantáneo: un proceso solidifica en un objeto, en una estructura estática. La nueva entidad se desprende del proceso que la ha producido y empieza a adquirir su significado por el hecho de pertenecer a una cierta categoría. El estadio de «reificación» es el punto en el cual empieza una interiorización de unos conceptos de nivel superior, aquellos que se originan a partir de procesos sobre el objeto en cuestión.

Ha de quedar claro que este esquema de Sfard de tres fases debe entenderse como una jerarquía que implica que un estadio no se puede alcanzar mientras no se han pasado los estadios anteriores. Dos observaciones importantes:

— Este modelo de adquisición de conceptos se basa en considerar los orígenes operacionales de los objetos matemáticos y tiene un carácter especulativo como posible instrumento para planificar, integrar e interpretar algunas investigaciones empíricas en educación matemática.

— Pretender que existe un desarrollo prioritario de las concepciones operacionales sobre las estructurales es chocar con la práctica de enseñanza tradicional de las Matemáticas que consiste en introducir los conceptos nuevos mediante definiciones, en general sin ninguna referencia explícita a ningún tipo de procesos relacionados con el mismo.

d) *La teoría de los campos conceptuales*

Verganaud (1990 a y b) ha analizado cómo la complejidad de los conceptos matemáticos proviene de la gran variedad de situaciones subyacentes que, a su vez, normalmente no se pueden analizar mediante un solo concepto. Esto le induce a estudiar los llamados campos conceptuales, que define como «amplios conjuntos de situaciones cuyo análisis requiere diversos tipos de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas conectados entre sí». Ejemplos de campos conceptuales son las estructuras aditivas, las estructuras multiplicativas, las geometrías euclidianas y proyectivas, el álgebra elemental, etcétera.

La complejidad se debe también al desarrollo a largo plazo de los conceptos y procedimientos matemáticos y a la necesidad de un marco teórico que ofrezca una articulación tanto entre los problemas y el conocimiento como entre los esquemas, los conceptos y los símbolos.

Vergnaud (1990 a) establece un programa para las investigaciones en este campo que permitiría disponer de un cuerpo válido de conocimiento de la psicología de la educación matemática y que debería consistir en un trabajo sistemático, tanto empírico como teórico, que contempla los siguientes puntos:

— Analizar y clasificar la variedad de situaciones en cada campo conceptual.

— Describir con precisión la variedad de comportamientos, procedimientos y razonamientos que los estudiantes manifiestan al tratar cada clase de situación.

— Analizar las competencias matemáticas organizadas en esquemas e identificar claramente las propiedades invariantes de situaciones de las cuales dependen las situaciones invariantes de los esquemas (conceptos-en-acción y teoremas-en-acción).

— Analizar el lugar que ocupan en dicho esquema el lenguaje y otras actividades simbólicas, cómo ayudan a los estudiantes y cómo los profesores utilizan estos intermediarios simbólicos.

— Establecer la transformación de invariantes implícitos, como medios para comprender y actuar, en objetos matemáticos bien identificados que se convierten progresivamente en una realidad física y «real».

— Establecer la forma en que los estudiantes se van haciendo conscientes de que los procedimientos tienen una relación de necesidad tanto con los objetivos propuestos como con las condiciones iniciales, y que, en consecuencia, se pueden utilizar para probar teoremas.

En concreto, Vergnaud ha estudiado el desarrollo del concepto de número como un producto de la interacción de varias categorías de problemas en diferentes fases del desarrollo cognitivo de las ideas matemáticas. El concepto de número es un buen ejemplo de proceso de adquisición cognitiva a largo plazo y un buen ejemplo de interconexión entre diferentes aspectos de un mismo concepto.

e) *Los modelos de la inteligencia artificial*

De acuerdo con Vergnaud (1991), el desarrollo de una teoría psicológica del procesamiento de la información proviene de la necesidad de obtener un modelo del pensamiento implícito. Es una teoría que ha tenido éxito en ciertos campos como el estudio de la percepción, pero que, en cambio, ha fracasado en el estudio de comportamientos complejos.

En cuanto al estudio del comportamiento matemático, ha resultado útil en el campo del cálculo (en particular para las cuatro operaciones) y, en general, en los campos en los cuales se pueden identificar procedimientos algorítmicos. Este modelo funciona siempre que el comportamiento esperado consiste en una secuencia de opciones entre un rango limitado de posibilidades identificadas y no ambiguas, pero falla cuando las opciones dependen de la conceptualización de nuevos objetos o relaciones.

Según Vergnaud, la principal debilidad del modelo de procesamiento de la información consiste en que no da ninguna teoría no sólo de lo que es un concepto sino de su carácter operacional. Este modelo tampoco ofrece una teoría plausible del papel que desempeñan en el pensamiento el lenguaje y los símbolos; o bien identifica y reduce el pensamiento a una manipulación de símbolos, o bien considera el pensamiento implícito como si fuera un conjunto de objetos definidos sin ambigüedad. Finalmente, es un modelo que no aporta una visión clara del desarrollo de las competencias y de las concepciones de los alumnos que suceden a través de la acción y de la comunicación mediante interacciones con problemas y con otros individuos.

Investigaciones acerca del comportamiento matemático

Existen diversas líneas de investigación dedicadas a los aspectos sociales y psicológicos de lo que podríamos llamar «comportarse como un matemático». Tratan cuestiones generales como son el comportamiento en la resolución de problemas: definir, conjeturar, probar. Se trata de habilidades matemáticas que todo matemático domina pero que no se enseñan ni consciente ni explícitamente y en las que entran consideraciones tan difíciles de definir como son, por ejemplo, la elegancia y la estética.

a) *Pruebas y demostraciones*

Demostrar es una de las características del comportamiento matemático y es probablemente la actividad que distingue más claramente el comportamiento matemático del comportamiento científico en otras disciplinas. Si bien actualmente existe una tendencia a retrasar el momento en que se supone que los alumnos han de dominar las técnicas de las demostraciones matemáticas formales, varios estudios se han ocupado de los comienzos en la comprensión y en la producción informal de demostraciones.

Existen varios estudios que se han ocupado de las ideas de los alumnos de bachillerato acerca de las demostraciones y que señalan los siguientes problemas generalizados: una falta del sentido de la necesidad de demostrar, una incomprensión de la naturaleza de la demostración como algo que asegura la ineludibilidad lógica y una especial dificultad en las demostraciones escritas.

Balacheff (1987) ha llevado a cabo una importante investigación sobre los procesos de prueba con alumnos de 12-15 años. Una de sus aportaciones consiste en haber estudiado los argumentos que utilizan los alumnos para su propio convencimiento, lo cual le ha llevado a distinguir entre las que llama pruebas pragmáticas y pruebas intelectuales. Los alumnos utilizan pruebas pragmáticas cuando argumentan basándose en hechos observados, mientras que las argumentaciones con pruebas intelectuales se basan en procesos de razonamiento y generalizaciones. Balacheff estudió el paso de un tipo de argumentación a otro y las habilidades para demostrar de los estudiantes en la situación social de la clase.

b) *Metacognición y resolución de problemas*

Es evidente que la resolución de problemas tiene un papel fundamental en el aprendizaje de las Matemáticas. En este sentido, nos parecen de especial relevancia los trabajos de Schoenfeld (1987) que ha desarrollado métodos de investigación que permiten observar a los estudiantes durante las sesiones de resolución de problemas de manera que el investigador pueda recoger información acerca de cuestiones como: cómo se decide qué conocimiento matemático es el adecuado al problema, de qué forma el resolutor decide utilizar este conocimiento y qué relaciones existen entre estas decisiones y la comprensión por parte del resolutor del campo matemático implicado en el problema.

Los trabajos de Schoenfeld han puesto de manifiesto la influencia del desarrollo sistemático, desde su adolescencia, de la capacidad reflexiva de los alumnos y de los medios intelectuales que les permitan controlar sus propios procesos de razonamiento. En este sentido destaca la importancia de ayudar a los alumnos a identificar los orígenes de sus concepciones previas como son las asociaciones rígidas, los modelos inadecuados, los inadecuados manejos de los modelos, las inadecuadas creencias intuitivas, las generalizaciones incorrectas..., que los alumnos deberían saber identificar y ser conscientes de su origen y de sus efectos.

Todo ello implica una teoría sobre los errores en Matemáticas, es decir, unas investigaciones que no sólo identifiquen los errores sistemáticos sino que expliquen sus orígenes profundos y unos proyectos de investigación destinados al desarrollo de la capacidad de los alumnos de comprender las causas reales de sus errores y de controlar su influencia.

El aprendizaje de las Matemáticas desde una perspectiva social

Las investigaciones que se ocupan de la dimensión social demuestran que el proceso de aprendizaje en la clase de Matemáticas debe entenderse en el contexto de interacciones sociales y debe tener en cuenta la especificidad de la situación en la que se desarrolla. El niño/adolescente aparece entonces como un subsistema dentro de otro sistema mayor que comprende otros subsistemas como son el profesor y el propio conocimiento; cada uno de ellos reacciona ante los otros y evoluciona dentro del proceso de enseñanza. La relevancia de este movimiento en la problemática de la psicología del aprendizaje de las Matemáticas se traduce en la hipótesis plausible de que lo que hacen los profesores en la clase introduce diferencias significativas en cuanto a lo que aprenden los alumnos.

Es sabido que las concepciones que tienen los profesores tanto de las Matemáticas como de la enseñanza de las Matemáticas influye en su comportamiento instruccional, pero se sabe poco de la influencia sobre la enseñanza y el aprendizaje, de la interacción entre las concepciones de los profesores y de los alumnos, lo que constituye la dimensión oculta de la enseñanza de las Matemáticas.

Se ha demostrado que algunos estudiantes pueden obtener la respuesta a una pregunta dada no mediante el razonamiento matemático esperado sino mediante la decodificación de las convenciones didácticas. Este fenómeno es consecuencia del hecho de que en cualquier situación de enseñanza el profesor intenta conseguir que los estudiantes entiendan lo que él quiere que ellos entiendan. Teóricamente, el proceso que va desde la instrucción y/o información del profesor hasta la respuesta esperada del alumno debería requerir que éste aplicara la parte de conocimiento considerada. Ahora bien, si se reconoce que hacer Matemáticas es hallar y resolver ciertos problemas específicos, entonces el profesor deberá producir no la comunicación de una parte de conocimiento sino la devolución (Brousseau, 1986: «el proceso a través del cual el profesor "pasa" al estudiante la responsabilidad acerca de la validez de la solución de un problema dado») de un problema específico para su construcción.

Por otro lado, Bishop (1985) afirma que «si existe algo que se deba aprender de las investigaciones en los aspectos sociales de la educación matemática es que el contexto y la situación son ambos importantes». Las situaciones de enseñanza como objeto de investigación plantean cuestiones del tipo: cómo funcionan con el propósito de favorecer el aprendizaje de los estudiantes, cómo afectan al significado del conocimiento y cómo interaccionan los distintos subsistemas dentro de una situación de enseñanza dada.

Dicha problemática define un campo de investigación cuyo objeto es el estudio de situaciones y de procesos organizados con la intención de dar a los estudiantes un buen conocimiento de Matemáticas. Dentro de esta situación problemática se estudian cuestiones que provienen de la práctica corriente como es la efectividad del aprendizaje individualizado con materiales de trabajo en comparación con la enseñanza a toda la clase o en grupo.

Desde el punto de vista de estudios de procesos y de fenómenos de aprendizaje la cuestión central consiste en la caracterización de la relación entre los aspectos relativos a las situaciones y el comportamiento cognitivo de los estudiantes. La dimensión «situación» es considerada por sí misma como un objeto de investigación. Brousseau (1988) ha intentado establecer una teoría de las situaciones didácticas.

A partir de la exposición de algunas líneas de investigación en las cuales se pone de manifiesto la implicación del conocimiento psicológico en la educación matemática, hemos tratado de ofrecer una visión de la pluraridad de los enfoques que, a nuestro entender, reflejan la situación actual.

Referencias

ARTIGUE, M. (1990). «Epistémologie et didactique», *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 10, N.° 2.3, pp. 241-286.

BALACHEFF, N. (1987). «Processus de preuve et situations de validation». *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 18, pp. 147-176.

BALACHEFF, N. (1990). «Future perspectives for research in the psychology of mathematics education». En NESHER, P., y KILPATRICK, J. (Ed.), *Mathematics and cognition.* Cambrigde: Cambrigde University Press, pp. 96-112.

BISHOP, A. (1985). «The social psychology of mathematics education». *Proceedings of the PME 9,* Vol. 3, pp. 1-13.

BROUSSEAU, G. (1986). «Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques». *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 7, N.° 2, pp. 33-115.

BROUSSEAU, G. (1988). «Le contrat didactique: le milieu». *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 9, N.° 3, pp. 309-336.

COLL, C. (1987). *Psicología y currículum. Una aproximación psicopedagógica a la elaboración del currículum escolar.* Barcelona: Laia.

COLL, C. (1991). «Constructivismo e interacción educativa: ¿cómo enseñar lo que se ha de construir?». Ponencia en el Congreso Internacional de Psicología y Educación «Intervención educativa». Madrid, noviembre 1991.
CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique.* Grenoble: La Pensée Sauvage.
DIENES, Z. P. (1970). *La construcción de las Matemáticas.* Barcelona: Vicens Vives.
DIENES, Z. P., y GOLDING, E. N. (1980). *Los primeros pasos en Matemáticas.* Barcelona: Teide.
DREYFUS, T. (1990). «Advanced mathematical thinking». En NESHER, P., y KILPATRICK, J. (Ed.), *Mathematics and cognition.* Cambrigde: Cambridge University Press, pp. 113-134.
FISCHBEIN, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: an educational approach.* Dordrecht: Reidel.
FISCHBEIN, E. (1990). «Introduction». En NESHER, P., y KILPATRICK, J. (Ed.). *Mathematics and cognition.* Cambridge: Cambridge University Press, pp. 14-30.
FREUDENTHAL, H. (1984). *Didactial phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel.
GUZMÁN, M. DE (1991). «Tendencias y experiencias innovadoras en Educación Matemática». Informe para la Organización de Estados Americanos.
HOWSON, G.; KEITEL, C., y KILPATRICK, J. (1981). *Curriculum development in Mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press.
KUHN, T. S. (1975). *La estructura de las revoluciones científicas.* México: Fondo de Cultura Económica.
LAVE, J. (1991). *La cognición en la práctica.* Barcelona: Paidós.
NESHER, P., y KILPATRICK, J. (Ed.) (1990). *Mathematics and cognition.* Cambridge: Cambridge University Press.
PIAGET, J. (1972). *Psicología y pedagogía.* Barcelona: Ariel.
RESNICK, L. B. y FORD, W. W. (1991). *La enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Barcelona: Paidós.
RIVIERE, A. (1990). «Problemas y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas: una perspectiva cognitiva», en Coll, C.; Palacios, J., y Marchesi A. (Eds.), *Desarrollo psicológico y Educación,* Vol. 3. Madrid: Alianza Editorial.
ROMBERG, T. A. (1991). «Características problemáticas del currículum escolar en Matemáticas». *Revista de Educación,* N.º 294, pp. 323-406.
SCHOENFELD, A. H. (Ed.) (1987). *Cognitive Science and Mathematics Education.* Hilldale, NJ: Erlbaum.
SFARD, A. (1991). «On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin», *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 22, pp. 1-36.
TALL, D., y VINNER, S. (1981). «Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity». *Educational Studies in Mathematics,* N.º 12, pp. 151-169.
VERGNAUD, G. (1990 a). «Epistemology and psychology of mathematics education». En NESHER, P., y KILPATRICK, J. (Ed.), *Mathematics and cognition.* Cambridge: Cambridge University Press, pp. 96-112.
VERGNAUD, G. (1990 b). «La théorie des champs conceptuels», *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 10, N.º 2.3, pp. 133-170.
VINNER, S. (1983). «Concept definition, concept image and the notion of function». *International Journal for Mathematical Educational in Science and Technology,* N.º 14, pp. 293-305.
VINNER, S., y DREYFUS, T. (1989). «Images and definitions for the concept of function». *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol. 20, pp. 356-366.
ZIMMERMANN, W., y CUNNINGHAM, S. (Ed.) (1991). *Visualization in teaching and learning Mathematics.* Mathematics Association of America.

Extended Summary

The first part of this paper views Mathematic Didactics as an independent, inter-disciplinary area of study, with its own theoretical and practical field, and still under development. The questions which Maths didactics attempts to answer refer to different areas of knowledge. But fundamentally they refer to mathematics itself, its history and its epistemology; and also to linguistics, pedagogy, psychology, sociology, communication, and technology, areas with which it has an increasingly important relation. Likewise, reference is made to the professional nature of Mathematics Didactics, linking it to teaching and to the specific problems which maths teachers encounter.

Due to the variety of scientific and applied sources within Maths Instruction, there is a wide range of areas of research: those referring to the teacher's

thoughts and the influence of his/her conceptual framework on his/her behaviour; those referring to the students, which include such diverse issues as students' ideas, their difficulties in learning in general, and in specific aspects of the subject area, the influence of the social, cultural and affective environment on learning, the role of motivation, of students' interests, their attitudes and aptitudes, student-teacher-student interactions,...; those referring to teaching strategies which incorporate from new curricular proposals and new resources of specific teaching, up to theories about learning through the use of problem solving,...; those referring to the framework in which the teaching (context) develops, such as the school centre, classroom, workshop, laboratory, and student-student, teacher-student, teacher-class interrelations.

Secondly, the characteristics of didactic theories of maths education in the last 30 years are described, underlining the psychological factors which explain different trends. First, the paper analyses the behaviourist approach, and the study focusses on the structuralist formative approach. Finally, this section ends with a review of the constructivism view. Particular emphasis is laid on the importance of planning and developing the teaching/learning process whose main implications for teachers may be summarized as follows: To give meaning to subject content and to maths problems; to provide alternative representation models; to interpret 'errors' as the expression of a specific logical-mathematic competence from which it is necessary to begin and which it is necessary to take into account; to structure a sequence and organize subject content so that they may support a real constructive process of mathematical knowledge; to use assessments as an educational tool at the disposal of the student and of the teaching/learning process. The aim is that neither the type of learning or the maths view that one wishes to be transmitted is damaged, in addition to stimulating the student to learning in depth.

The third section of this paper begins by summarizing the existing lines of research within Mathematics Education. Special emphasis is given to studies on the cognitive processes involved in learning maths concepts. In this sense, particular attention is paid to some models used in research work into these cognitive processes: conceptual image and visualization; conceptual scheme and conceptual definition; mathematical concepts and students' concepts; structural concepts and operational concepts; theories of conceptual fields and artificial intelligence. Next, reference is made to studies on mathematical behaviour. This includes everything that refers both to tests and demonstrations, to metacognition and problem solving. Finally, research into maths learning is approached from a social perspective. This includes research dealing with maths learning processes in the classroom, understood as a context of interactions where the specificity of each situation must be taken into account.