

ALTERNATIVAS DE ANÁLISIS DEL IMÁN ESFÉRICO

RESUMEN

En este artículo se presentan dos alternativas diferentes a la ecuación de Laplace y al método de carga magnética y de fácil comprensión para el cálculo del campo magnético en un imán esférico uniformemente magnetizado.

PALABRAS CLAVES: Imán esférico, Campo magnético, Ley de Biot-Savart.

CARLOS A. RESTREPO P.

Estudiante VIII Semestre
Facultad de Ingeniería Eléctrica
Universidad Tecnológica de Pereira
cr@utp.edu.co
www.utp.edu.co/~cr

ABSTRACT

In this article is presented two, differents alternative to Laplace Equation solution and the charge magnetic method, for the magnetic field evaluation of the spherics iman with an uniform magnetization.

**Grupo de investigación en
Planeamiento de Sistemas
Eléctricos**

KEYWORDS: Spherics iman, Magnetics field, Law of Biot-Savart.

1. INTRODUCCIÓN

Los imanes esféricos es un tema que en la actualidad se encuentra sin explorar lo suficiente, muestra de ello es la poca bibliografía acerca de este tema y las recientes y pocas aplicaciones que la ciencia les está dando a ellos como son las comunicaciones inalámbricas.

El mejor estudio que se encontró de este tema es un artículo publicado en la edición N° 4 de esta revista titulado: "Análisis del Imán Esférico"; en este se hallaban el campo magnético utilizando la ecuación de Laplace, pero este procedimiento requiere un tratamiento matemático muy complejo. Por esta razón se presentan a continuación dos alternativas para el análisis del imán esférico, pero se tomara como guía el artículo mencionado anteriormente para llegar a los mismos resultados.

El aporte más importante de este artículo es la extensión que se hace de la aplicación de la ley de Biot Sarvat a modelos de corrientes, ya que esta ley en todas sus aplicaciones es utilizada con corrientes reales.

2. IMÁN ESFÉRICO UNIFORMEMENTE MAGNETIZADO

Se considera una esfera ferromagnética de radio b con una magnetización:

$$\vec{M} = M_0 \vec{a}_z \quad (1)$$

Como se muestra en al figura 1.

2.1 CÁLCULO DEL CAMPO MAGNÉTICO EN EL CENTRO EMPLEANDO LA ECUACIÓN DE LAPLACE

La metodología que se presenta a continuación es transcrita de [1] y lo único que pretende es facilitar al lector una consulta rápida e inmediata del texto que se

tomará como guía y al mismo tiempo hacer una recopilación de todas las alternativas de análisis del imán esférico. Para respetar la integridad del texto se va a dejar la numeración de las ecuaciones que este tiene pero para diferenciarlas de las ecuaciones de este artículo a ellas se le colocará un asterisco.

Dada la simetría del sistema se utilizan las siguientes expresiones correspondientes a la solución de la ecuación de la Laplace en dos dimensiones en coordenadas esféricas:

$$\mathbf{f}_{m1} = \left(A_1 + \frac{B_1}{r^2} \right) \cdot \cos \mathbf{q} \quad r \leq b \quad (1^*)$$

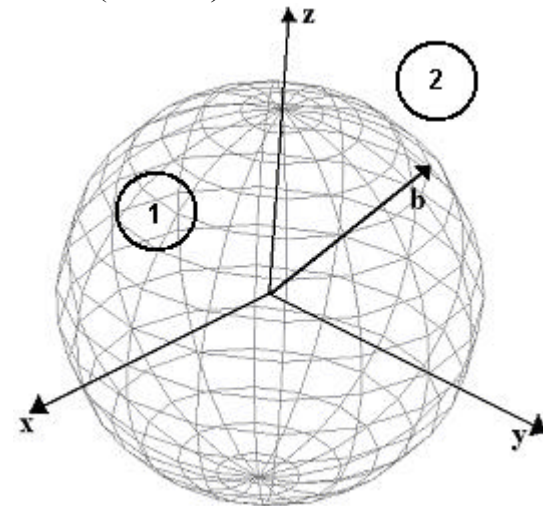


Figura 1. Geometría del imán esférico.

$$\mathbf{f}_{m2} = \left(A_2 + \frac{B_2}{r^2} \right) \cdot \cos \mathbf{q} \quad r \geq b \quad (2^*)$$

La evaluación de las constantes A1, A2, B1 y B2 se hará empleando condiciones análogas a las del campo electrostático, así:

$$\clubsuit \quad r \rightarrow 0, \mathbf{f}_{m1} \text{ es finito} \quad \Rightarrow B_1 = 0:$$

$$\mathbf{f}_{m1} = A_1 \cdot r \cdot \cos \mathbf{q} \quad (3^*)$$

$$\clubsuit \quad r \rightarrow \infty, \mathbf{f}_{m2} = 0 \quad \Rightarrow A_2 = 0:$$

$$\mathbf{f}_{m2} = \frac{B_2 \cdot \cos \mathbf{q}}{r^2}$$

♣ En la superficie $r = b$:

$$\mathbf{f}_{m1} = \mathbf{f}_{m2}$$

$$A_1 \cdot b \cdot \cos \mathbf{q} = \frac{B_2 \cdot \cos \mathbf{q}}{b^2}$$

$$A_1 \cdot b^3 = B_2 \quad \text{si} \quad \cos \mathbf{q} \neq 0$$

La condición anterior es equivalente a utilizar $\vec{H}_1 = \vec{H}_2$.

$$\clubsuit \quad \text{También en } r = b: \vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n}.$$

$$\vec{H}_1 = -\vec{\nabla} \mathbf{f}_{m1} = A_1 (-\cos \mathbf{q} \cdot \vec{a}_r + \text{sen} \mathbf{q} \cdot \vec{a}_q)$$

$$\vec{B}_1 = \mathbf{m}_0 (\vec{H}_1 + \vec{M}_1) \text{ en este caso } \vec{M}_1 = \vec{M}$$

$$\vec{B}_1 = \mathbf{m}_0 (-A_1 \cdot \cos \mathbf{q} \cdot \vec{a}_r + A_1 \cdot \text{sen} \mathbf{q} \cdot \vec{a}_q + M_o \cdot \vec{a}_z)$$

$$\vec{B}_{1n} = \mathbf{m}_0 (\vec{H}_{1n} + \vec{M}_{1n}), \text{ pero } \vec{M}_{1n} = M_o \cdot \cos \mathbf{q} \cdot \vec{a}_r$$

$$\vec{B}_{1n} = \mathbf{m}_0 (M_o - A_1) \cdot \cos \mathbf{q} \cdot \vec{a}_r$$

$$\vec{H}_2 = -\vec{\nabla} \mathbf{f}_{m2} = \frac{B_2}{r^3} \cdot (2 \cdot \cos \mathbf{q} \cdot \vec{a}_r + \text{sen} \mathbf{q} \cdot \vec{a}_q)$$

$$\vec{B}_{2n} = \frac{2 \cdot \mathbf{m}_0 \cdot B_2}{r^3} \cos \mathbf{q} \cdot \vec{a}_r$$

$$M_o - A_1 = \frac{2 \cdot B_2}{b^3} \quad (4^*)$$

de las ecuaciones (3*) y (4*):

$$A_1 = \frac{M_o}{3} \quad \text{y} \quad B_2 = \frac{M_o \cdot b^3}{3}$$

$$\mathbf{f}_{m1} = \frac{M_o \cdot r \cdot \cos \mathbf{q}}{3}, \quad \mathbf{f}_{m2} = \frac{M_o \cdot b^3 \cdot \cos \mathbf{q}}{3 \cdot r^3} \quad (5^*)$$

$$\vec{H}_1 = \frac{M_o}{3} (-\cos \mathbf{q} \cdot \vec{a}_r + \text{sen} \mathbf{q} \cdot \vec{a}_q) \quad (6^*)$$

Si la esfera tiene permeabilidad magnética \mathbf{m} :

$$\vec{B}_1 = \mathbf{m} \cdot \vec{H}_1$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mathbf{m} \cdot M_o}{3} (-\cos \mathbf{q} \cdot \vec{a}_r + \text{sen} \mathbf{q} \cdot \vec{a}_q) \quad (7^*)$$

También:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mathbf{m} M_o}{3} (-\cos \mathbf{q} \cdot \vec{a}_r + \text{sen} \mathbf{q} \cdot \vec{a}_q) + \mathbf{m}_0 M_o \vec{a}_z$$

$$\vec{B}_1 = \frac{2 \mathbf{m} \cdot M_o}{3} (\cos \mathbf{q} \cdot \vec{a}_r - \text{sen} \mathbf{q} \cdot \vec{a}_q)$$

$$\vec{B}_1 = \frac{2 \cdot \mathbf{m}_0 \cdot M_o}{3} \vec{a}_z \quad (8^*)$$

2.2 CÁLCULO DEL CAMPO MAGNÉTICO EN EL CENTRO EMPLEANDO BIOT-SAVART

Para una distribución de corriente real, el campo magnético está dado por [2]:

$$\vec{B} = \frac{\mathbf{m}_0}{4\mathbf{p}} \int \frac{\vec{K} ds \times \vec{R}}{R^3} \quad (2)$$

En donde \mathbf{m}_0 es la permeabilidad magnética en el vacío y tiene un valor de $4\mathbf{p} \cdot 10^{-7}$ h/m, \vec{K} es para este caso la densidad de corriente equivalente superficial y \vec{R} es un vector que va de la superficie al punto a analizar, en este caso el centro.

A partir de la teoría del dipolo magnético, el campo debido a un material magnetizado se puede calcular usando el rotacional de un potencial vectorial magnético el cual está dado por [6]:

$$\vec{A} = \frac{\mathbf{m}_0}{4\mathbf{p}} \int \frac{\vec{K} \cdot ds}{R} + \frac{\mathbf{m}_0}{4\mathbf{p}} \int \frac{\vec{J} \cdot dt}{R} \quad (3)$$

En donde \vec{J} es la densidad volumétrica de corriente de magnetización, la cual esta definida como:

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{M} \quad (4)$$

Para una magnetización uniforme, se tiene:

$$\nabla \times \vec{M} = 0$$

Al sustituir en (4) se obtiene

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{M} = 0 \quad (5)$$

Debido a que la magnetización es uniforme, la corriente de los dipolos atómicos vecinos que fluyen en direcciones opuestas se cancelarán en todo lugar y no quedarán corrientes netas en el interior. Esto indica que sólo va a existir un modelo superficial de corrientes.

La densidad de corriente superficial equivalente se define como:

$$\vec{K} = \vec{M} \times \vec{a}_N \quad (6)$$

$$\vec{K} = M_o \cdot (\cos \mathbf{q} \cdot \vec{a}_R - \text{sen} \mathbf{q} \cdot \vec{a}_q) \times \vec{a}_R \quad (7)$$

El diferencial de superficie se puede hallar como:

$$ds = b^2 \cdot \text{sen} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{q} \cdot d\mathbf{j} \quad (8)$$

por último el vector radial a la superficie es:

$$\vec{R} = -b \cdot \vec{a}_R \quad (9)$$

reemplazando (7), (8) y (9) en (2) se tiene que:

$$\vec{B} = \frac{\mathbf{m}_0 M_o}{4\mathbf{p}} \int_0^{\mathbf{p}} \int_0^{\mathbf{p}} \int_0^{\mathbf{p}} \text{sen}^2 \mathbf{q} \cdot d\mathbf{q} d\mathbf{j} \cdot (-\vec{a}_q) \quad (10)$$

convirtiendo a coordenadas cartesianas se tiene:

$$\vec{a}_q = \cos q \cdot \cos j \cdot \vec{a}_x + \sin j \cdot \cos q \cdot \vec{a}_y - \sin q \cdot \vec{a}_z \quad (11)$$

al reemplazar (11) en (10) y efectuar algunas integrales se obtiene:

$$\vec{B} = \frac{m_o M_o}{4p} \int_0^p \int_0^p \sin^3 q \cdot dq ddj \cdot (-\vec{a}_z) \quad (12)$$

al resolver la integral se tiene por último:

$$\vec{B} = \frac{2 \cdot m_o \cdot M_o \cdot \vec{a}_z}{3} \quad (13)$$

Este es el resultado (8) del análisis realizado por Laplace en [1].

2.3 CÁLCULO DEL CAMPO MAGNÉTICO EN EL CENTRO EMPLEANDO SUPERPOSICION DE ESPIRAS

Este método consiste en hallar el campo en una espira sobre la superficie de la esfera y luego superponerla a toda la esfera, pues ella está compuesta de muchas espiras de diferente radio.

En la figura 2 se muestra la espira a la cual se le calcula el campo de la siguiente forma:

$$\vec{B} = \frac{m_o \cdot I}{4p} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \quad (14)$$

Por facilidad se trabajará en coordenadas cilíndricas, donde se tiene para cada término las siguientes expresiones:

$$\vec{R} = -r \cdot \vec{a}_R - z \cdot \vec{a}_z \quad (15)$$

$$R = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (16)$$

$$R = b \quad (17)$$

$$d\vec{l} = r \cdot d\vec{j} \cdot \vec{a}_j \quad (18)$$

Al sustituir (15), (17) y (18) en (14) se tiene:

$$\vec{B} = \frac{m_o \cdot I}{4p \cdot b^3} \int_0^p (r^2 \cdot d\vec{j} \cdot \vec{a}_z - r \cdot z \cdot d\vec{j} \cdot \vec{a}_R) \quad (19)$$

donde el vector unitario en la dirección radial se define en términos de coordenadas cartesianas como:

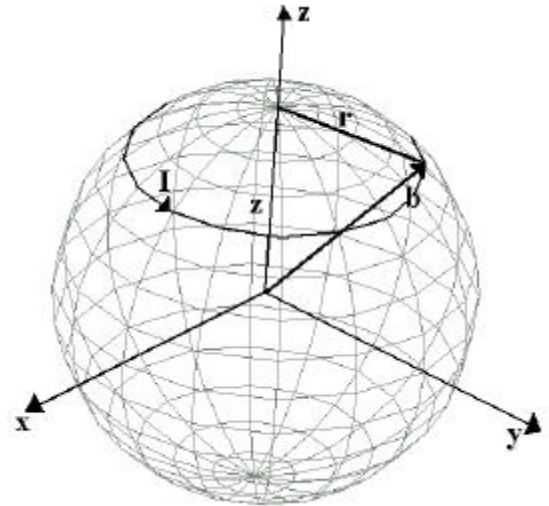
$$\vec{a}_R = \cos j \cdot \vec{a}_x + \sin j \cdot \vec{a}_y \quad (20)$$

Por último se tiene que el campo magnético debido a esa sola espira sobre el origen es:

$$\vec{B} = \frac{m_o \cdot I \cdot r^2 \vec{a}_z}{2 \cdot b^3} \quad (21)$$

Ahora se procede a hallar el campo debido a todas las espiras sobre la superficie de la esfera, esto se logra derivando la ecuación (21), debido a que este no es el campo total sino únicamente un diferencial de campo. Haciendo esto se tiene:

Figura 2. Espira sobre el imán esférico.



$$d\vec{B} = \frac{m_o dI \cdot (\sin q \cdot b)^2 \cdot \vec{a}_z}{2 \cdot b^3} \quad (22)$$

en donde se tiene que el diferencial de corriente está dado por:

$$I = \int K_o \cdot dp \quad (23)$$

$$I = \int M_o \cdot \sin q \cdot (b \cdot dq) \quad (24)$$

$$dI = M_o \cdot b \cdot \sin q \cdot dq \quad (25)$$

Al sustituir la ecuación (25) en (22) se tiene que:

$$d\vec{B} = \frac{m_o \cdot M_o}{2} \cdot \sin^3 q \cdot dq \cdot \vec{a}_z \quad (26)$$

integrando a ambos lados se tiene:

$$\vec{B} = \frac{m_o \cdot M_o}{2} \cdot \int_0^p \sin^3 q \cdot dq \cdot \vec{a}_z \quad (27)$$

resolviendo se deduce a que el campo resultante de todas las espiras sobre la superficie es:

$$\vec{B} = \frac{2 \cdot m_o \cdot M_o \cdot \vec{a}_z}{3} \quad (28)$$

Esta expresión es igual a la expresión (13), por lo que se comprueba que este método es otra alternativa de solución.

2.4 CÁLCULO DEL CAMPO MAGNÉTICO EN UN PUNTO SOBRE EL EJE Z EMPLEANDO MÉTODO DE CARGA MAGNÉTICA

$$\vec{f}_m = \frac{1}{4p} \left(\int_t \frac{\vec{r}_m \cdot dt}{R} + \int_s \frac{\vec{s}_m \cdot dS}{R} \right) \quad (20^*)$$

Los potenciales escalares magnéticos f_{m1} y f_{m2} se pueden encontrar también usando la expresión (20*) donde:

$$\mathbf{r}_m = -\vec{\nabla}' \cdot \vec{M} \text{ densidad volumétrica de carga equivalente.}$$

$$\mathbf{s}_m = \vec{M} \cdot \vec{a}_n \text{ densidad de carga superficial equivalente.}$$

A manera de verificación e ilustración y por facilidad se calculará el campo magnético en el punto P (0, 0, h) indicado en la figura 3. Se tendrá, entonces que:

$$\mathbf{r}_m = 0 \text{ y } \mathbf{s}_m = M_o \cdot \vec{a}_z \cdot \vec{a}_r = M_o \cdot \cos \mathbf{q}$$

$$\vec{R} = -b \cdot \vec{a}_r + h \cdot \vec{a}_z \text{ y } ds = r \cdot \text{sen } \mathbf{q} \cdot d\mathbf{f} \cdot r \cdot d\mathbf{q}$$

$$ds = b^2 \cdot \text{sen } \mathbf{q} \cdot d\mathbf{f} \cdot d\mathbf{q}$$

$$R^2 = (b^2 - 2bh \cdot \cos \mathbf{q} + h^2)$$

$$\mathbf{f}_m = \frac{M_o \cdot b^2}{4\mathbf{p}} \int_0^{\mathbf{p}} \int_0^{\mathbf{p}} \frac{\text{sen } \mathbf{q} \cdot \cos \mathbf{q} \cdot d\mathbf{q} \cdot d\mathbf{f}}{(b^2 - 2bh \cdot \cos \mathbf{q} + h^2)^{1/2}}$$

Al resolver la integral se tiene:

$$\mathbf{f}_{m1} = \frac{M_o \cdot h}{3} \quad (21^*)$$

$$\mathbf{f}_{m2} = \frac{M_o \cdot b^3}{3 \cdot h^2} \quad (22^*)$$

para el punto indicado:

$$\vec{B}_2 = -\vec{\nabla} \mathbf{f}_{m2} = \frac{2 \cdot \mathbf{m}_o \cdot b^3 \cdot M_o}{3 \cdot h^3} \vec{a}_z \quad (23^*)$$

2.5 CÁLCULO DEL CAMPO MAGNÉTICO EN UN PUNTO SOBRE EL EJE Z EMPLEANDO SUPERPOSICIÓN DE ESPIRAS

La ecuación (14) se sigue aplicando pero con algunos cambios. La geometría es como se indica en la figura 3, las componentes de la ecuación de campo se definen como:

$$d\vec{l} = r \cdot d\mathbf{j} \cdot \vec{a}_j \quad (29)$$

$$\vec{R} = -r \cdot \vec{a}_R + (h - z) \cdot \vec{a}_z \quad (30)$$

Por la ley de coseno, se tiene:

$$R^2 = h^2 + b^2 - 2 \cdot h \cdot b \cdot \cos \mathbf{q} \quad (31)$$

Sustituyendo (29), (30) y (31) en (14) se tiene que:

$$\vec{B} = \frac{\mathbf{m}_o \cdot I}{4\mathbf{p}} \int_0^{\mathbf{p}} \frac{r^2 \cdot \vec{a}_z \cdot d\mathbf{j} + (h - z) \cdot \vec{a}_R \cdot d\mathbf{j}}{(h^2 + b^2 - 2hb \cdot \cos \mathbf{q})^{3/2}} \quad (32)$$

resolviendo de forma similar al procedimiento anterior se tiene que:

$$\vec{B} = \frac{\mathbf{m}_o \cdot I \cdot r^2 \cdot \vec{a}_z}{2 \cdot (h^2 + b^2 - 2hb \cdot \cos \mathbf{q})^{3/2}} \quad (33)$$

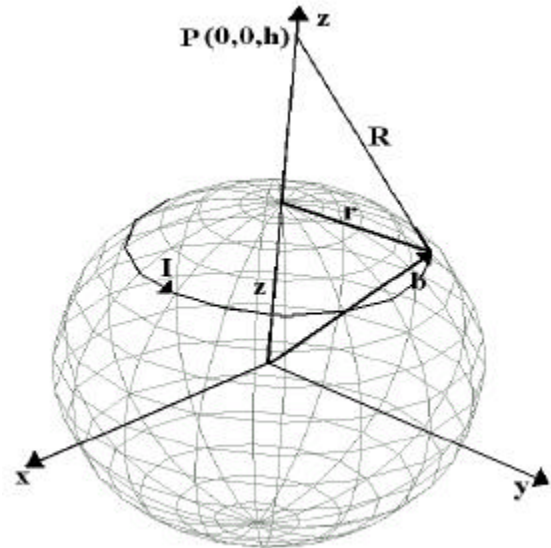


Figura 3 Espira sobre el imán esférico.

Pero este es sólo un diferencial de campo, así que el campo total es:

$$\vec{B} = \frac{\mathbf{m}_o \cdot M_o \cdot b^3}{2} \int_0^{\mathbf{p}} \frac{\text{sen}^3 \mathbf{q} \cdot d\mathbf{q} \cdot \vec{a}_z}{(h^2 + b^2 - 2hb \cdot \cos \mathbf{q})^{3/2}} \quad (34)$$

Esta integral es compleja, por lo que se utiliza un paquete matemático para resolverla como Matlab[®]. Quedando el campo total como:

$$\vec{B} = \frac{\mathbf{m}_o \cdot M_o \cdot \vec{a}_z}{3 \cdot h^3} \cdot ((b^2 - b \cdot h + h^2) \cdot |b + h| - (b^2 + b \cdot h + h^2) \cdot |b - h|) \quad (35)$$

De la figura 3 se deduce que tanto el radio como la altura son positivas, esta última es mayor que el radio debido a que el punto sobre el cual se está calculando el campo es exterior a la esfera, por lo tanto:

$$\vec{B} = \frac{2 \cdot \mathbf{m}_o \cdot M_o \cdot b^3 \vec{a}_z}{3 \cdot h^3} \quad (36)$$

Este es el resultado (23) del método de carga magnética del artículo [1] tomado como guía.

Al evaluar el límite cuando h tiende a cero, se estaría calculando el campo en el centro, así que se obtiene:

$$\vec{B} = \frac{2 \cdot \mathbf{m}_o \cdot M_o \cdot \vec{a}_z}{3} \quad (37)$$

Este es el resultado que ya se había hallado anteriormente por dos métodos.

2.6 CÁLCULO DEL CAMPO MAGNÉTICO EN UN PUNTO SOBRE EL EJE Z EMPLEANDO BIOT-SAVART

El campo está definido de la misma forma que en la ecuación (2), lo que si cambia es el radio y además todo se

debe definir en coordenadas cartesianas. Cada término queda definido como:

$$\vec{R} = -r \cdot \vec{a}_R + (h - z) \cdot \vec{a}_Z \quad (38)$$

$$\vec{R} = -r \cdot \cos \mathbf{j} \cdot \vec{a}_X - r \cdot \sin \mathbf{j} \cdot \vec{a}_Y + (h - z) \cdot \vec{a}_Z \quad (38)$$

$$\vec{K} ds = M_o \cdot b^2 \cdot \sin^2 \mathbf{q} \cdot d\mathbf{q} \cdot d\mathbf{j} \cdot \vec{a}_j \quad (39)$$

$$\vec{K} ds \times \vec{R} = M_o \cdot b^2 \cdot \sin^2 \mathbf{q} \cdot d\mathbf{q} \cdot d\mathbf{j} \cdot (\cos \mathbf{j} \cdot (h - z) \cdot \vec{a}_X + \sin \mathbf{j} \cdot (h - z) + r \cdot \vec{a}_z) \quad (40)$$

Dado que la integral en \mathbf{j} está definida para un período la integral de los vectores en la dirección X y Y se reduce a cero, resultando solamente la componente en Z:

$$\vec{K} ds \times \vec{R} = M_o \cdot b^3 \cdot \sin^3 \mathbf{q} \cdot d\mathbf{q} \cdot d\mathbf{j} \cdot \vec{a}_z \quad (41)$$

y además se conoce que:

$$R^2 = h^2 + b^2 - 2 \cdot h \cdot b \cdot \cos \mathbf{q} \quad (42)$$

al reemplazar se tiene:

$$\vec{B} = \frac{m_o \cdot M_o \cdot b^3}{2} \int_0^p \frac{\sin^3 \mathbf{q} \cdot d\mathbf{q} \cdot \vec{a}_z}{(h^2 + b^2 - 2hb \cdot \cos \mathbf{q})^{3/2}} \quad (43)$$

Esta ecuación coincide con la entregada en (34), por tanto, se demuestra que este es otro método válido para analizar el imán esférico.

Realizando una sencilla analogía, se puede determinar el campo en el centro, debido a una esfera dieléctrica uniformemente polarizada. Modificando la ecuación (12) se tiene:

$$\vec{B} = \frac{2 \cdot P_o \cdot \vec{a}_z}{3 \cdot \mathbf{e}_o} \quad (44)$$

En donde P_o es la polarización eléctrica y \mathbf{e}_o es la permitividad eléctrica del vacío. De igual forma se puede hallar el campo en un punto sobre el eje z.

3. CONCLUSIONES

- Se observa la facilidad matemática frente al desarrollo con Laplace de los dos métodos presentados en este artículo para el análisis del imán esférico y su fácil extensión a la geometría de un imán de barras el cual es un caso más práctico y comercial.
- Se muestra la aplicación al magnetismo del principio de superposición el cual es una metodología más aplicada a la teoría de circuitos y la extensión de la ley de Biot Savart a modelos de corrientes.
- Este es un modelo que ayuda a la comprensión de los campos magnéticos a través de las leyes que los describen debido a la geometría compleja que presenta. Para calcular el campo en puntos fuera del eje Z se deben de realizar aproximaciones o de lo contrario el procedimiento se haría muy dispendioso.

- Se demostró que mediante una simple analogía es posible hallar el campo debido a una esfera dieléctrica uniformemente polarizada a partir del campo de una esfera ferromagnética uniformemente magnetizada.

4. AGRADECIMIENTOS

A mi madre y abuela, por su empuje, estímulo y cariño.

A todos y cada uno de los miembros de mi familia quienes con su comprensión y apoyo han sido parte decisiva en mi vida.

A los profesores por su respaldo y por hacer parte de mi formación como persona y como profesional.

A mis compañeros por su amistad y entusiasmo, de quienes espero luchen sin descanso por alcanzar sus metas.

5. BIBLIOGRAFIA

- [1] CATAÑO, Heliodoro V., LÓPEZ, José Q. VÁSQUEZ, Julio C. Scientia Et Técnica, Año II, N°4, Octubre, 1996.
- [2] CHENG, David K. Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería, Primera edición, Pearson Educación, México, 1998.
- [3] EDMINISTER, Josep A. Teoría y problemas de electromagnetismo, Primera edición, McGraw-Hill Latinoamericana, Colombia, 1982.
- [4] HAYT, William H. Teoría Electromagnética, Segunda edición, McGraw-Hill, México, 1999.
- [5] Matlab User's Guide, Versión 6.0.0.88.
- [6] PLONOS, Martin A. Applied electromagnetics, McGraw-Hill, , 1978.
- [7] PLONSEY, R., COLLIN R. Principles and applications of electromagnetic fields, McGraw-Hill book company, New York, 1970.
- [8] POPOVIC, Zoya, Introducción al electromagnetismo, Cesca, España, 2001.
- [9] SADIKU, Matthew N. O. Elementos de electromagnetismo, Segunda edición, Compañía Editorial Continental, México, 1998.